状態依存性雑音を受ける非線形分布定数系の一安定解析[†]

畑 四郎*・柴田 浩*・前田 裕司*

A Stability Analysis of a Class of Nonlinear Distributed-Parameter Systems with State-Dependent Noise

Shiro HATA*, Hiroshi SHIBATA* and Hiroshi MAYEDA*

This paper deals with the stochastic stability of a class of nonlinear distributed-parameter systems described by Ito's stochastic partial differential equation. Under appropriate assumptions, the state of the system is expanded into a series of eigenfunctions. By using MKY (Meyer-Kalman-Yakubovich) Lemma, a stochastic Liapunov functional in a form of infinite series is proved to exist, if countably many Popov type conditions are satisfied. Consequently, sufficient conditions are obtained for the system to be asymptotically stable with probability one. Finally an example, which is typical of a physical system, is presented to illustrate the applicability of the main result.

1. 緒 言

分布定数系に対する解析は、難解であるにもかかわらず、その重要性から、集中定数系に劣らず研究され、かずかずの解決を得ている。安定性に関しても、リアプノフの方法、入出力安定の手法、半群の性質や最大値原理の利用などの結果が報告されている。北村¹⁾は固有関数展開手法を用いて、円板定理に類似の定理よりリアプノフ汎関数の存在を示している。また線形の場合ではオブザーバの問題に関連し、安定化に関する研究²⁾もなされ、これらの重要さはいままでのない。

しかし実在の物理システムには、不確定な要因が回避不可能である場合が多いにもかかわらず、上記システム解析はほとんど確定系に限られている。不規則性を考慮する、いわゆる雑音を受ける分布定数系の安定問題の研究では、たとえば G. Jumarie³⁾が周波数領域での解析を行い入出力（有界入力有界出力）の安定定理を得ているが、リアプノフの意味での安定性とは

異なっている。一方 P. K. C. Wang⁴⁾はリアプノフの意味で確率1の安定性を取扱っているが、系が線形な場合に限られている。また、文献 1) は非線形系に対しリアプノフ汎関数を用いて安定解析を行っているが、そこでは不規則はまったく考慮されておらず、その結果は確率系に対しては適用できない。そこで雑音を伴う非線形分布定数系のリアプノフの意味での安定性の解析に対しては、確率系としての新しい安定定理が必要となる。

本稿では、空間分布したウィナー過程を新たに導入し、状態依存性雑音を受ける非線形分布定数系について、確率1の漸近安定定理を導く。不確定さに関しては、R. F. Curtain, P. L. Falb⁵⁾の立場をとっており、伊藤形確率偏微分方程式を採用している。このことは上記文献 3), 4) と異なり、数学的取扱いにおいてより厳密なものとなっている。また確率安定性に関しては H. J. Kushner⁶⁾に沿っており、積分形に拡張した微分生成作用素を用いる。システムの各変数は適当な仮定のもとに固有関数展開でき、可算無限個の常微分方程式の系に対して、M. K. Y. (Meyer-Kalman-Yakubovich) Lemma を用いて、無限級数の形の確率リアプノフ汎関数の存在を示す。その結果リアプノフの意味での安定解析がなされ、安定定理に付随して可算無限個のポポフの条件が導かれる。最後に代表的な分布定数系の例を取上げ、得られた結果を適用し、その有効性を示す。

2. 問題の記述

r 次元ユークリッド空間の有界な開領域 D は、十分滑らかな境界 S をもつとする。 D の r 次元空間座標ベクトルを $x=(x_1, x_2, \dots, x_r)$ とし、 $x \in D$ と時刻 $t(>0)$ において次式の状態依存性雑音を受ける非線形分布定数系を考える。

$$\begin{aligned} du(t, x) = \{A(L)u(t, x) + bf(t, x, \sigma)\} dt \\ + g(t, x, u)dw(t, x) \end{aligned} \quad (1)$$

[†] 第20回日本自動制御協会学術講演会で発表(昭51・5)

* 大阪府立大学工学部 堺市百舌鳥梅町 4-804

* Faculty of Engineering, University of Osaka Prefecture, Sakai

(Received February 3, 1977)

$$\sigma(t, x) = {}^t c u(t, x) \quad (2)$$

ここに $u(t, x)$ は n 次元実ベクトルの状態変数であり、各成分は領域 D において 2 乗可積分な関数空間 $L^2(D)$ に属する。このことを $u(t, \cdot) \in [L^2(D)]^n$ と記す。 $\sigma(t, x)$ はスカラー出力を示す。 $n \times n$ 行列 $A(L)$ は

$$A(L) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ L & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad (3)$$

なる形で、 $a_i (i=1, 2, \dots, n-1)$ は定数、 L は D 上で自己共役な偏微分作用素とする。(3)式の行列は時間に関する n 階の偏微分方程式を位相変数標準形 (phase-variable canonical form) に書き変えた場合のシステム行列として現われ¹⁾、(1), (2)式は拡散方程式、波動方程式などを含むかなり一般性のある方程式である。 b と c は n 次元実数ベクトルとし、 ${}^t(\cdot)$ はベクトルあるいは行列の転置を示す。スカラー非線形関数 $f(t, x, \sigma)$ と n 次元ベクトル $g(t, x, u)$ はヘルダー連続とする。 $w(t, x)$ は D に分布したスカラー値の不規則過程である。

(1), (2)式のシステムに対し、初期条件、境界条件はそれぞれ次式で与えられる。

$$u(0, x) = u_0(x), \quad x \in D \quad (4)$$

$$\alpha(\xi)u(t, \xi) + \{1 - \alpha(\xi)\} \frac{\partial u(t, \xi)}{\partial n_\xi} = 0, \quad \xi \in S \quad (5)$$

ここでスカラー関数 $\alpha(\xi)$ は領域 D の境界 S 上で定義された 2 回連続微分可能な関数で

$$0 \leq \alpha(\xi) \leq 1 \quad (6)$$

なる値を取る。 $\partial/\partial n_\xi$ は点 $\xi \in S$ での D の外向き法線微分を示す⁷⁾。

関数空間 $[L^2(D)]^n$ は

$$(u, v)_n = \int_D {}^t u(x) v(x) dx, \quad u, v \in [L^2(D)]^n \quad (7)$$

を内積とする実ヒルベルト空間 " $\mathfrak{H}_n$ " であり、 u のノルム $\|u\|_n$ は

$$\|u\|_n = (u, u)_n^{1/2}, \quad u \in [L^2(D)]^n \quad (8)$$

で定義される。

不規則過程を表す $w(t, x)$ は、 $L^2(D)$ をヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$ と見なせば $\mathfrak{H}$ -値ウィナー過程で、そのサンプルパスにおいて時刻 t を固定すれば $L^2(D)$ に属し、平均値ゼロ、また共分散に関して、

$$\begin{aligned} E[\{w(t) - w(s)\} \circ \{w(t) - w(s)\}] \\ = |t - s| Q \end{aligned} \quad (9)$$

を満たす⁵⁾。ただし $E(\cdot)$ は期待値を示し、作用素 " $\circ$ " はヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$ の任意の要素 h_1, h_2, h に対して次式で定義される線形作用素を示す。

$$(h_1 \circ h_2)h = h_1(h_2, h) \quad (10)$$

Q は完全連続正値有界対称な核形作用素である。 Q を核形作用素、 G_1, G_2 を任意の有界作用素とする時、 $G_1 Q G_2$ も核形作用素である⁸⁾。

作用素 Q はつぎの核表示が可能である⁹⁾。

$$Qh(x) = \int_D Q(x, y)h(y)dy, \quad h \in \mathfrak{H} \quad (11)$$

ここで積分核 $Q(x, y)$ は x, y について対称な非負スカラー関数である。

つぎに (1), (2)式の解過程に関する微分生成作用素 $\mathfrak{L}$ は、集中定数系のもを積分形に拡張した次式で定義される^{6), 10)}。

$$\begin{aligned} \mathfrak{L} \left[\int_D W dx \right] = \int_D {}^t (Au + bf) W_u dx \\ + \frac{1}{2} \text{tr} [(gQ'g)W_{uu}] \end{aligned} \quad (12)$$

ここに W は $[L^2(D)]^n \rightarrow L^2(D)$ への関数で、 u に関して 2 階 Fréchet 微分可能、また W_u, W_{uu} は W のこう配およびヘシアン⁵⁾を表し、 W_{uu} は有界作用素とする。 $(gQ'g)W_{uu}$ は $[L^2(D)]^n$ から $[L^2(D)]^n$ への核形作用素である。 $\text{tr}(\cdot)$ は核形作用素に対して定義される作用素のトレースで⁸⁾、 $[L^2(D)]^n$ の完全正規直交系の一つを $\{e_i\}_{i=1,2,\dots}$ とすれば、核形作用素 K に対して

$$\text{tr}(K) = \sum_{i=1}^{\infty} (K(e_i), e_i)_n \quad (13)$$

と定義される。また $\text{tr}(\cdot)$ は完全正規直交系の取り方に対して不変であるから⁸⁾、実際の計算に当っては $[L^2(D)]^n$ の任意の完全正規直交系を用いればよい。たとえば付録 A のように選べる。

以後の考察ではつぎのことを前提として解析を行う。

(A.1) 初期条件(4)および境界条件(5)を有する偏微分方程式(1), (2) はアダマールの意味で適切、すなわち確率 1 で解が一意に存在し、かつ初期条件および境界条件に連続的に依存する。

(A.2) 各状態変数は 2 乗可積分すなわち、ある固定された t に対し

$$\begin{aligned} u(t, \cdot) \in [L^2(D)]^n, \quad \sigma(t, \cdot) \in L^2(D), \\ f(t, \cdot, \cdot) \in L^2(D). \end{aligned}$$

3. 本 論

本稿では固有関数展開手法を用いて安定解析を行っ

ている。偏微分作用素 L は自己共役であるから、次式を満たす固有値 λ_k と正規直交な固有関数 $\phi_k(x)$ が存在する⁷⁾。

$$L\phi_k(x) = \lambda_k \phi_k(x) \quad (14)$$

$$\alpha(\xi)\phi_k(\xi) + \{1 - \alpha(\xi)\} \frac{\partial \phi_k(\xi)}{\partial \mathbf{n}_\xi} = 0 \quad (15)$$

状態変数 $u(t, \cdot) \in [L^2(D)]^n$ と非線形出力 $f(t, \cdot, \cdot) \in L^2(D)$ は平均収束の意味でつぎのように固有関数展開される。

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \phi_k(x) \quad (16)$$

ここで $u_k(t)$ は n 次元ベクトルで

$$u_k(t) = \int_D u(t, x) \phi_k(x) dx \quad (17)$$

$$f(t, x, \sigma) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \phi_k(x) \quad (18)$$

$$f_k(t) = \int_D f(t, x, \sigma) \phi_k(x) dx \quad (19)$$

と与えられる。

以下の解析においてつぎの仮定を置く。

【仮定】 i) すべての固有値 λ_k に対して

$$A(\lambda_k) + pI \quad (I \text{ は } n \times n \text{ 単位行列}) \quad (20)$$

がフルビッツ行列となる正定数 p が存在するものとする。ただし $A(\lambda_k)$ は $A(L)$ のスペクトル表示で、偏微分作用素 L を固有値 λ_k に置き換えた行列である¹⁾。

ii) すべての λ_k に対して、行列対 $(A(\lambda_k), b)$ は完全可制御とする。

iii) 非線形関数はつぎの積分形セクタ条件を満足する。

$$f(t, x, 0) = 0 \quad (21)$$

$$\int_D \sigma f(t, x, \sigma) dx \geq \mathfrak{R}^{-1} \int_D f^2(t, x, \sigma) dx \\ F \geq |\sigma| > 0 \quad (22)$$

ここで $\mathfrak{R}$ は正定数、 F は正または ∞ である。

以上の準備のもとに、後の安定定理の証明に必要なつぎの補題を述べる。

【補題】 仮定 i), ii) が成り立つとする。各固有値 λ_k に対し

$$\begin{aligned} & {}^t A(\lambda_k) P(\lambda_k) + P(\lambda_k) A(\lambda_k) \\ & = -q(\lambda_k) {}^t q(\lambda_k) - 2pP(\lambda_k) \end{aligned} \quad (23)$$

$$P(\lambda_k) b + \frac{c}{2} = \gamma q(\lambda_k) \quad (24)$$

$$\gamma^2 = \mathfrak{R}^{-1} \quad (25)$$

を満たす $n \times n$ 正値対称行列 $P(\lambda_k)$ 、 n 次元実ベクトル $q(\lambda_k)$ 、実数 γ が存在するための必要かつ十分条件はつぎの不等式

$$\mathfrak{R}^{-1} - \operatorname{Re} [{}^t c \{ (i\omega - p)I - A(\lambda_k) \}^{-1} b] \geq 0 \quad (26)$$

がすべての実数 ω に対して成り立つことである。

上記補題は M. K. Y. Lemma^{11), 12)} の拡張であり¹³⁾、従来のものに比べて(23)式の右辺に $-2pP(\lambda_k)$ なる項が表れる特徴がある。この項をうまく利用することによって確率系に関するつぎの安定定理が証明される。《安定定理》 仮定 i), ii), iii) が成り立つとする。この時すべての実数 ω とすべての固有値 λ_k に対して(26)式が成り立ち、さらに任意の $u \in [L^2(D)]^n$ についてつぎの2個の条件

$$C_1) \quad V = \sum_{k=1}^{\infty} {}^t u_k P(\lambda_k) u_k < \infty \quad (27)$$

$$C_2) \quad \operatorname{tr} [(gQ {}^t g)P(L)] \leq 2p \int_D {}^t u P(L) u dx \quad (28)$$

を満たすならば、システム(1), (2)は(8)式のノルムに関して、確率1で漸近安定である。

ただし、 $P(L)$ は $n \times n$ の作用素としての正値行列を示し、 $P(\lambda_k)$ はそのスペクトル表示で、補題によってその存在が証明されている。

(証明) まず条件 C_1 によってつぎの確率リアプノフ汎関数

$$\begin{aligned} V &= \int_D \int_D {}^t u(t, x) P(L) \delta(x-y) u(t, y) dx dy \\ &= \int_D {}^t u(t, x) P(L) u(t, x) dx \end{aligned} \quad (29)$$

が存在することがわかる。 $\delta(\cdot)$ はデルタ関数を示す。 V に(12)式の微分生成作用素 $\mathfrak{L}$ を作用させると、

$$\begin{aligned} \mathfrak{L} V &= \int_D \left\{ {}^t (Au + bf) P u + {}^t u P (Au + bf) \right. \\ &\quad \left. + \left(\sigma f - \frac{f^2}{\mathfrak{R}} \right) \right\} dx - \int_D \left(\sigma f - \frac{f^2}{\mathfrak{R}} \right) dx \\ &\quad + \operatorname{tr} [(gQ {}^t g)P(L)] \end{aligned} \quad (30)$$

上式右辺において、 u, f を(16), (18)式を用いて固有関数展開し、作用素はスペクトル表示する。さらに和と積分の順序を入れ換え項別積分すると

$$\begin{aligned} \mathfrak{L} V &= \sum_{k=1}^{\infty} \left[{}^t u_k(t) \{ {}^t A(\lambda_k) P(\lambda_k) + P(\lambda_k) A(\lambda_k) \} u_k(t) \right. \\ &\quad \left. + 2 {}^t u_k(t) \left\{ P(\lambda_k) b + \frac{c}{2} \right\} f_k(t) - \frac{f_k^2(t)}{\mathfrak{R}} \right] \\ &\quad - \int_D \left(\sigma f - \frac{f^2}{\mathfrak{R}} \right) dx + \operatorname{tr} [(gQ {}^t g)P(L)] \end{aligned} \quad (31)$$

ここで定理の仮定により、すべての λ_k について補題が適用できるから(23)~(25)式を用いて

$$\begin{aligned} \mathfrak{L} V &= \sum_{k=1}^{\infty} \{ -|{}^t q(\lambda_k) u_k(t) - \gamma f_k(t)|^2 \} \\ &\quad - \int_D \left(\sigma f - \frac{f^2}{\mathfrak{R}} \right) dx - 2p \sum_{k=1}^{\infty} {}^t u_k(t) P(\lambda_k) u_k(t) \end{aligned}$$

$$+\operatorname{tr}[gQ'gP(L)] \quad (32)$$

固有関数の完全正規直交性と条件 C_2 によって

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}V = & \sum_{k=1}^{\infty} \{-|{}^tq(\lambda_k)u_k(t)-\gamma f_k(t)|^2\} \\ & - \int_D \left(\sigma f - \frac{f^2}{\mathfrak{R}} \right) dx - 2p \int_D {}^t u P(L) u dx \\ & + \operatorname{tr}[(gQ'g)P(L)] \leq 0 \end{aligned} \quad (33)$$

ゆえにシステム (1), (2) は確率 1 で漸近安定である。
(Q. E. D.)

すべての固有値 λ_k について (26) 式が成り立つことは、可算無限個のポポフの条件であり、各モードの安定性を保証している。定理の条件 C_1, C_2 の検証は個々の制御系により異なり、一般的な結論は得られないが以下の例題では比較的容易に検証できる。

4. 具体例

上記の安定解析手法の有効性を示すため、確率的分布定数系の具体例として、工学的にも重要なつぎの状態依存性雑音を受けるスカラー放物形偏微分方程式で記述されるシステムを考察する。

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = & \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} + g u(t, x) \\ & + b f(t, x, \sigma) + u(t, x) \dot{w}(t, x) \end{aligned} \quad (34)$$

$$\sigma(t, x) = u(t, x) \quad (35)$$

ただし $D = \{x | 0 < x < 1\}$, $t > 0$ とする。また境界条件は吸収壁、反射壁あるいはそれらの混在した場合を示す十分一般性のあるものとして

$$u(t, 0) = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=1} + h u(t, 1) = 0 \quad (36)$$

で与えられるとする。ただし g, b と $h(>0)$ は定数、 $\dot{w}(t, x)$ は $\mathfrak{Q}$ -値ウィナー過程の形式的な時間微分で、外部から加わる時間に関する白色雑音を表す。(34), (35) 式を (1), (2) 式の伊藤形確率微分方程式の表現に書き改めると

$$du = \{Lu + b f(t, x, \sigma)\} dt + u dw \quad (37)$$

$$\sigma = u \quad (38)$$

となる。ここで偏微分作用素

$$L = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + g \quad (39)$$

は自己共役作用素であり、固有値 λ_k と固有関数 $\phi_k(x)$ は次式で与えられる。

$$-\lambda_k = \nu_k^2 - g \quad (k=1, 2, \dots) \quad (40)$$

$$\phi_k(x) = \sqrt{\frac{2h}{h + \cos^2 \nu_k}} \sin \nu_k x \quad (k=1, 2, \dots) \quad (41)$$

ただし ν_k は $\tan x = -x/h$ の第 k 番目の正根でつぎの性質をもつ¹⁴⁾。

$$(k-1/2)\pi < \nu_k < k\pi \quad (k=1, 2, \dots) \quad (42)$$

また $\mathfrak{Q}$ -値ウィナー過程 $w(t, x)$ は平均値がゼロ、共分散に相当する (11) 式の対称な積分核を

$$Q(x, y) = \sin \pi x \sin \pi y \quad (43)$$

とする。

まず条件 C_2 について調べる。 $P(L)$ が有界作用素であること、すなわち条件 C_1 が成り立つことは付録 B に述べる。ゆえに (28) 式の左辺は作用素のトレースに関する性質によって

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}[(uQu)P(L)] &= \operatorname{tr}[uP(L)Qu] \\ &= \int_0^1 u(t, x) \left(\int_0^1 P(L) \delta(x-y) Q(x, y) dy \right) u(t, x) dx \\ &= \int_0^1 u(t, x) P(L) u(t, x) \sin^2 \pi x dx \\ &< \int_0^1 u(t, x) P(L) u(t, x) dx \end{aligned} \quad (44)$$

となるから、 $p=1/2$ と選べば任意の有界な $P(L)$ に対して条件 C_2 は満たされる。また本例はスカラーの場合であるから仮定 ii) は $b \neq 0$ の時成立する ($b=0$ の時は線形系となり漸近安定であることは明らか)。仮定 i) が成り立つためには、(20) 式からすべての固有値 λ_k が

$$\begin{aligned} \lambda_k &< -p \\ \therefore -\nu_k^2 + g &< -1/2 \quad (k=1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (45)$$

を満たさねばならない。ゆえに (42) 式を考慮すればまずパラメータ g は

$$g < \nu_1^2 - 1/2 \quad (46)$$

であれば十分である。つぎに可算無限個のポポフの条件すなわち“すべての正整数 k を取る時、すべての実数 ω について

$$\frac{1}{\mathfrak{R}} - \operatorname{Re} \left[\frac{b}{i\omega - p - \lambda_k} \right] \geq 0 \quad (k=1, 2, \dots) \quad (47)$$

が成り立たねばならない。”ただし $\mathfrak{R}$ は非線形関数 f のセクタの上限を示す。(47) 式を $b < 0$ と $b > 0$ の場合に分けて、パラメータ $b, \mathfrak{R}$ の関係を求めると、

$$\textcircled{1} \quad b < 0 \text{ の時 } \mathfrak{R} > 0 \quad (48)$$

$\textcircled{2} \quad b > 0$ の時 (40), (42) 式より固有値は実数かつ可算無限個で有限範囲に集積点をもたず、 k とともに単調減少し、 $-\infty$ に近づく。ゆえに (47) 式は最大の固有値で成り立てば十分である。よってパラメータが満たすべき関係式は次式となる。

$$\frac{\nu_1^2 - g - 1/2}{b} > \mathfrak{R} > 0 \quad (49)$$

このような $\mathfrak{R}$ の値に対して非線形関数 $f(t, x; \sigma)$ は積分形セクタ条件 (21), (22) 式を満たすものとする。

最後に可算無限個のポポフの条件 (47) が成り立つか

ら補題によって $P(\lambda_k), q(\lambda_k), \gamma$ の存在が保証され、(23)~(25)式を解くことによって $P(\lambda_k)$ が得られる。これを用いて無限級数の形の確率リアプノフ汎関数(27)式が構成できるが、その収束性は $P(L)$ が有界作用素となることであり、付録Bで簡単に述べた¹⁾。 $P(L)$ の有界性の検証は条件 C_2 のトレースが意味をもつためにも必要である。

以上で定理の仮定および条件がすべて満足された。ゆえに各パラメータが(46)と(48)式あるいは(46)と(49)式を満たせば、システム(34)、(35)式は確率1で漸近安定である。

5. 結 言

状態依存性雑音を受ける非線形分布定数系を対象に確率1の漸近安定性について検討した。安定解析にあたり固有関数展開手法を用いたため、集中定数系との対応関係がみられる。しかしポポフの条件がすべての固有値に対して成立しなければならないこと、あるいは無限級数の形の確率リアプノフ汎関数の収束性を吟味しなければならないことなどは、分布定数系独得の特徴を示している。また雑音に関する条件 C_2 において作用素のトレースが表れる。これは空間的に分布した雑音、すなわちヒルベルト空間でのウィナー過程を考慮したことによって生じたものであり、非確率系の安定解析と相違する点である。

本研究に関し積分形セクタ条件や安定条件 C_2 の改善および簡単な検証方法、確率リアプノフ汎関数の選び方など今後に残された問題も多い。

参 考 文 献

- 1) 北村, 西村, 稲垣: ある分布定数系に対するリアプノフ汎関数と円板定理, システムと制御, **15**-6, 51/58(1971)
- 2) Y. Sakawa and T. Matsusita: Feedback Stabilization of a Class of Distributed Systems and Construction of a State Estimator, IEEE Trans. on Automatic Control, **AC-20**-6, 748/753 (1975)
- 3) G. Jumarie: Input-Output Stability Criteria for a Broad Class of Stochastic Nonlinear Distributed Systems Defined by Green's Function, Trans. ASME, **G-97**-1, 83/91 (1975)
- 4) P.K.C. Wang: On the Almost Sure Stability of Linear Stochastic Distributed-Parameter Dynamical Systems, Trans. ASME, **E-33**-1, 182/186(1966)
- 5) R.F. Curtain and P.L. Falb: Ito's Lemma in Infinite Dimensions, J. Math. Anal. Appl., **31**, 434/448 (1970)
- 6) H.J. Kushner: Stochastic Stability and Control, 1/76, Academic Press (1967)
- 7) 伊藤: 偏微分方程式, 培風館 (1966)
- 8) 溝畑: 積分方程式入門, 朝倉書店 (1969)
- 9) 畑, 柴田, 大松: 関数解析手法による状態依存性雑音を受ける線形分布定数系の最適フィルタ, システムと制御, **16**-10, 809/817 (1972)

- 10) 秋月, 宮崎, 田島: 確率的分布定数系の安定解析, 第13回 SICE 学術講演会予稿集, 243/244 (1974)
- 11) R.E. Kalman: Lyapunov Function for the Problem of Lur'e in Automatic Control, Proc. Nat. Acad. Soc., **49**, 201/205 (1963)
- 12) E.B. Lee and L. Markus: Foundation of Optimal Control Theory, 394/418, John Wiley (1968)
- 13) A.K. Mahalanabis and S. Purkayastha: Frequency-Domain Criteria for Stability of a Class of Nonlinear Stochastic Systems, IEEE Trans. on Automatic Control, **AC-18**-3, 266/270 (1973)
- 14) 高橋: 物理数学, 54/57, 培風館 (1958)

《 付 録 》

〈付録A〉 (14)式の固有関数 $\phi_k(x)$ を用いて n 次元ベクトル $\Phi_{ij}(x)$ を

$$\Phi_{ij}(x) = (0 \ 0 \ \dots \ 0 \ \overset{j}{\phi_i(x)} \ 0 \ \dots \ 0) \quad (\text{a.1})$$

とすれば

$$\{\Phi_{ij}(x) | i=1, 2, \dots, \infty; j=1, 2, \dots, n\} \quad (\text{a.2})$$

は $[L^2(D)]^n$ の完全正規直交系である。なぜなら(正規直交性)

$$\begin{aligned} (\Phi_{ij}, \Phi_{kl})_n &= \int_D {}^t \Phi_{ij}(x) \Phi_{kl}(x) dx \\ &= \delta_{jl} \int_D \phi_i(x) \phi_k(x) dx \\ &= \delta_{ik} \delta_{jl} \end{aligned} \quad (\text{a.3})$$

ただし δ_{ik} はクロネッカーのデルタを示す。

(完全性)

$\{\phi_k | k=1, 2, \dots\}$ は $L^2(D)$ における完全正規直交系をなすから、任意の $u \in [L^2(D)]^n$ に対し

$$u(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^n u_{ij} \Phi_{ij}(x) \quad (\text{a.4})$$

と書くことができる。ただし u_{ij} は展開係数を示す。

〈付録B〉 (23)~(25)式を解くことによって

$$\begin{aligned} P(\lambda_k) &= \frac{1}{b^2} \left\{ -\left(\frac{\lambda_k + p}{\Re} + \frac{b}{2} \right) - \sqrt{\left(\frac{\lambda_k + p}{\Re} + \frac{b}{2} \right)^2 - \frac{b^2}{4}} \right\} \\ &= \frac{1}{b^2} \left\{ \frac{\nu_k^2 - g - p}{\Re} - \frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{\nu_k^2 - g - p}{\Re} - \frac{b}{2} \right)^2 - \frac{b^2}{4}} \right\} \end{aligned} \quad (\text{a.5})$$

が得られる。(42)式を考慮すれば $P(\lambda_k)$ は

$$P(\lambda_k) = O\left(\frac{1}{k^2}\right) \quad (k \rightarrow \infty) \quad (\text{a.6})$$

であることがわかる。ただし $O(\cdot)$ は Landau の記号を示し、数列 r_k が $r_k = O(1/k^2) (k \rightarrow \infty)$ であるとは、 $k \rightarrow \infty$ で $k^2 r_k$ が有界な値に収束することである。ゆえに(27)式の無限級数が収束し、条件 C_1 が満たされる。さらに $P(L)$ は正值有界作用素として存在することがわかり¹⁾、条件 C_2 のトレースおよび(29)式の確率リアプノフ汎関数が意味をもつことになる。