可制御条件の幾何学的考察†

市 川 邦 彦*

Geometrical Interpretation of Controllability Condition

Kunihiko ICHIKAWA*

It is well known that the necessary and sufficient condition for a pair (A, B) to be completely controllable is that the rank of controllability criterion matrix $[B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B]$ equal to n , the dimension of the state vector. Many ways of the proof of the criterion have been contrived by many researchers. Although the point of view that the complete controllability implies the coverage of the whole state space by controllable subspace somehow gives a geometrical interpretation of the controllability criterion, the root of controllability from the geometrical point of view has not yet been disclosed. The author discovered that relative configurations of eigenvectors of A and b (single-input case) play the essential role with regard to controllability. A single-input case is first considered. Realness and multiplicity of eigenvalues are examined in detail. Many examples are provided for a full understanding of the presented theorems. A multi-input case is briefly treated by applying Gopinath's lemma. The problem of dimension of controllable subspace is also examined from the geometrical point of view.

1. ま え が き

システム

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (1)$$

を考える。ここに $x \in R^n$ は状態ベクトル, $u \in R^r$ は入力ベクトル, また $A \in R^{n \times n}$, $B \in R^{n \times r}$ とする。

$$V \triangleq [B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B] \quad (2)$$

とおく。対 (A, B) が完全可制御である必要十分条件は V のランクが n であることはよく知られている。しかしながら、対 (A, B) の完全可制御性を単に行列の

ランクとむすびつけるだけでなく、もう少し可制御性の本質を説明するものが望まれる。本論文の趣旨を説明するために、単入力系であって、 A の固有値がすべて相異なる実根であると仮定しよう。このとき、固有ベクトル $p^1, p^2, \dots, p^n$ は相異なる実ベクトルである。固有ベクトルの任意の部分集合 $\{p^i\}$ が張る部分空間は A -invariant である。それゆえ、たとえば入力係数ベクトル b が p^1 に一致しているとする、 $Ab, A^2b, \dots$ もすべて p^1 の張る 1 次元の部分空間内にあり、これらは決して R^n を張ることはできず、したがって対 $\{A, b\}$ は完全可制御とはならない。このように完全可制御性の本質は、 A の固有ベクトルと B の列ベクトルの幾何学的関係によって定まると考えられる。この論文は、 A の固有値が複素数となる場合や重複根をもつようなすべての場合を含めて、完全可制御の条件を、 A の固有ベクトルと B の列ベクトルの幾何学的関係から求めたものである。

従来からこのような考察がないわけではない。たとえば Rosenbrock¹⁾ は、多項式行列 $sI - A$ と B が left prime になるとき、 B の各列に直交する複素部分空間は A^* -invariant 部分空間を含まないという定理と、 $sI - A$ と B が left prime になるとき対 $\{A, B\}$ は完全可制御であるという定理とを証明しており、間接的ながら本論文のように可制御条件に幾何学的考察を与えている。しかし、その説明は本論文ほどに明確な幾何学的条件を与えていない。

また Brockett²⁾ は、 b が A -invariant 部分空間に含まれないことと、 $\det [b \ Ab \ \dots \ A^{n-1}b] \neq 0$ とが等価であることを述べている。この考え方は、本論文の出発点の一つにもなっている。

2. 単入力系の可制御条件

A の固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ とする。はじめに重複した固有値はないものとする。このとき、各固有値に対応した固有ベクトルは一義的に定まり、かつ互いに独立である。固有値に複素数のものがあると、その共役

† 計測自動制御学会四国支部講演会 (昭 51・11)

* 上智大学理工学部 東京都千代田区紀尾井町 7

* Faculty of Science and Engineering, Sophia University, Chiyoda-ku, Tokyo

(Received December 9, 1976)

複素数も固有値になっている。それらに対応する固有ベクトルは複素数ベクトルであり、かつ互いに共役になっている。

説明の便宜上、2組の共役複素数固有値があり、他の固有値は実数であるとする。このとき、固有値および固有ベクトルはつぎのように表される。

$$\lambda_1, \bar{\lambda}_1, \lambda_3, \bar{\lambda}_3, \lambda_5, \dots, \lambda_n \quad (3)$$

$$p^1, \bar{p}^1, p^3, \bar{p}^3, p^5, \dots, p^n \quad (4)$$

いま

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2}(p^1 + \bar{p}^1) &= q^1 \\ \frac{1}{2j}(p^1 - \bar{p}^1) &= q^2 \\ \frac{1}{2}(p^3 + \bar{p}^3) &= q^3 \\ \frac{1}{2j}(p^3 - \bar{p}^3) &= q^4 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

とおく。\$q^1, q^2, q^3\$, および \$q^4\$ はいずれも実数ベクトルであり、かつ

$$q^1, q^2, q^3, q^4, p^5, \dots, p^n \quad (6)$$

は互いに独立である。

(4)式の固有ベクトルの組から、第 \$i\$ 番目の固有ベクトルを除去し、残りの固有ベクトルが \$R^n\$ に張る部分空間を \$S_i\$ で表す。これらはつぎのように明確な集合として表される。

$$S_1 = S_2 = \{x \mid x = \alpha_3 q^3 + \alpha_4 q^4 + \alpha_5 p^5 + \dots + \alpha_n p^n, \alpha_i \in R, i=3, 4, 5, \dots, n\} \quad (7)$$

$$S_3 = S_4 = \{x \mid x = \alpha_1 q^1 + \alpha_2 q^2 + \alpha_5 p^5 + \dots + \alpha_n p^n, \alpha_i \in R, i=1, 2, 5, \dots, n\} \quad (8)$$

$$S_5 = \{x \mid x = \alpha_1 q^1 + \alpha_2 q^2 + \alpha_3 q^3 + \alpha_4 q^4 + \alpha_6 p^6 + \dots + \alpha_n p^n, \alpha_i \in R, i=1, 2, 3, 4, 6, \dots, n\} \quad (9)$$

以下 \$S_n\$ までは同様である。

《定理 1》 \$A\$ の固有値がすべて相異なるとき、対 \$(A, b)\$ が完全可制御となる必要十分条件は、\$b\$ がどの \$S_i\$ にも属していないことである。

(証明)

\$\langle (A, b)\$ が完全可制御 \$\Rightarrow \langle b\$ はどの \$S_i\$ にも属していない \$\rangle\$:

\$b \in S_1\$ または \$b \in S_5\$ と仮定したときに矛盾に陥ることを示せば十分である。

\$b \in S_1\$ と仮定すると、次式が成り立つような実数 \$\alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \dots, \alpha_n\$ が存在する。

$$\begin{aligned} b &= \alpha_3 q^3 + \alpha_4 q^4 + \alpha_5 p^5 + \dots + \alpha_n p^n \\ &= (\alpha_3/2)(p^3 + \bar{p}^3) + (\alpha_4/2j)(p^3 - \bar{p}^3) + \alpha_5 p^5 + \dots + \alpha_n p^n \\ &= \left(\frac{\alpha_3}{2} + \frac{\alpha_4}{2j}\right)p^3 + \left(\frac{\alpha_3}{2} - \frac{\alpha_4}{2j}\right)\bar{p}^3 + \alpha_5 p^5 + \dots + \alpha_n p^n \end{aligned} \quad (10)$$

これより、\$Ab, A^2b, \dots\$ を求めるとつぎの式をうる。

$$[b \quad Ab \quad \dots \quad A^{n-1}b] = [p^3 \quad \bar{p}^3 \quad p^5 \quad \dots \quad p^n] \begin{bmatrix} \frac{\alpha_3}{2} + \frac{\alpha_4}{2j} & & & & \\ & \frac{\alpha_3}{2} - \frac{\alpha_4}{2j} & & & \\ & & O & & \\ & & & \alpha_5 & \\ O & & & & \ddots \\ & & & & & \alpha_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \lambda_3 & \dots & \lambda_3^{n-1} \\ 1 & \bar{\lambda}_3 & \dots & \bar{\lambda}_3^{n-1} \\ 1 & \lambda_5 & \dots & \lambda_5^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix} \quad (11)$$

明らかに、対 \$(A, b)\$ は完全可制御とはならない。これは仮定に矛盾する。

つぎに、\$b \in S_5\$ と仮定すると、次式が成り立つような実数 \$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_6, \dots, \alpha_n\$ が存在する。

$$\begin{aligned} b &= \alpha_1 q^1 + \alpha_2 q^2 + \alpha_3 q^3 + \alpha_4 q^4 + \alpha_6 p^6 + \dots + \alpha_n p^n \\ &= (\alpha_1/2)(p^1 + \bar{p}^1) + (\alpha_2/2j)(p^1 - \bar{p}^1) \end{aligned} \quad \nearrow$$

これより、\$Ab, A^2b, \dots\$ を求めるとつぎの式をうる。

$$[b \quad Ab \quad \dots \quad A^{n-1}b] = [p^1 \quad \bar{p}^1 \quad p^3 \quad \bar{p}^3 \quad p^6 \quad \dots \quad p^n] \begin{bmatrix} \frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{2j} & & & & & \\ & \frac{\alpha_1}{2} - \frac{\alpha_2}{2j} & & & & \\ & & O & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \alpha_6 & \\ O & & & & & \ddots \\ & & & & & & \alpha_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \dots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \bar{\lambda}_1 & \bar{\lambda}_1^2 & \dots & \bar{\lambda}_1^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \lambda_6 & \lambda_6^2 & \dots & \lambda_6^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix} \quad (13)$$

明らかに $[b \ Ab \ \dots \ A^{n-1}b]$ のランクは n より小であり, 対 (A, b) は完全可制御とはならない. これは仮定に矛盾する.

$\langle b$ がどの S_i にも属さない $\Rightarrow \langle (A, b)$ は完全可制御 $\rangle$: b がどの S_i にも属さないから, b はつぎのように表される.

$$\left. \begin{aligned} b &= \alpha_1 q^1 + \alpha_2 q^2 + \alpha_3 q^3 + \alpha_4 q^4 + \alpha_5 p^5 + \dots + \alpha_n p^n \\ \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n &\neq 0 \end{aligned} \right\} \quad (14) \nearrow$$

$\searrow b$ をつぎのように書き直す.

$$\begin{aligned} b &= \left(\frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{2j} \right) p^1 + \left(\frac{\alpha_1}{2} - \frac{\alpha_2}{2j} \right) \bar{p}^1 + \left(\frac{\alpha_3}{2} + \frac{\alpha_4}{2j} \right) p^3 \\ &\quad + \left(\frac{\alpha_3}{2} - \frac{\alpha_4}{2j} \right) \bar{p}^3 + \alpha_5 p^5 + \dots + \alpha_n p^n \end{aligned} \quad (15)$$

しかるとき

$$[b \ Ab \ \dots \ A^{n-1}b] = [p^1 \ \bar{p}^1 \ p^3 \ \bar{p}^3 \ p^5 \ \dots \ p^n] \begin{bmatrix} \frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{2j} & & & & & \\ & \frac{\alpha_1}{2} - \frac{\alpha_2}{2j} & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \alpha_5 & & \\ O & & & & \ddots & \\ & & & & & \alpha_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \dots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \bar{\lambda}_1 & \bar{\lambda}_1^2 & \dots & \bar{\lambda}_1^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \lambda_5 & \lambda_5^2 & \dots & \lambda_5^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix} \quad (16)$$

明らかに $[b \ Ab \ \dots \ A^{n-1}b]$ のランクは n である.

(Q. E. D.)

つぎに固有値に重複がある場合を考える. 重複固有値には, 固有ベクトルが一義的に決定される場合と, 一義的に決定できず無数の固有ベクトルを求めうる場合とがある. 前者を正常な重複固有値, 後者を特異な重複固有値という. 特異な重複固有値をもつ場合には, いかなる b をもってきても対 (A, b) は完全可制御とはならない³⁾. すなわち, A はサイクリックでないのである. ここでは正常な重複固有値がある場合のみを考える.

固有値に重複を生ずるのは, 特性多項式の係数の間に, あるいはさらにさかのぼって, A の各要素の間にきわめて特別な関係がある場合に生じ, 係数または要素が少しでも変化すれば一般に重複固有値を生じない. ゆえに重複固有値は, ある要素が特定の値に接近した極限として発生すると考えられる. このことを固有ベクトルについて考察すると, はじめの n 個の固有ベクトルは独立であったが, ある要素が, ある特定の値に接近するに従って, そのうちの 2 個の固有ベクトルが互いに接近し, 極限において, 2 個の固有ベクトルが重なり合うのであると考えることができる.

重複固有値がある場合を考えるためには, 重複固有値が 2 組ある場合を考えておけば十分である. ここでは説明を簡単にするため, 固有値 $\lambda_1, \lambda_3, \lambda_5, \lambda_6, \dots, \lambda_n$ は実数と仮定する. 各固有値に対する固有ベクトル p^i は一義的にきまる. たとえば p^1 は $[\text{adj}(sI - A)]_{s=\lambda_1}$ の任意の非零列ベクトルである. これを $[p(s)]_{s=\lambda_1}$ と

$\searrow$ 書くこともできる. 重複固有値に対しては $[dp(s)/ds]_{s=\lambda_1}$ および $[dp(s)/ds]_{s=\lambda_3}$ なる非零ベクトルを求めることができ, $p^1, p^3, p^5, p^6, \dots, p^n$ と合せて n 個の独立なベクトルを形成することはよく知られている. これらのベクトルに対し, つぎの関係が成立している.

$$\left. \begin{aligned} Ap^i &= \lambda_i p^i, \quad i=1, 3, 5, 6, \dots, n \\ A[dp(s)/ds]_{s=\lambda_i} &= \lambda_i [dp(s)/ds]_{s=\lambda_i} + p^i, \\ &\quad i=1, 3 \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

ベクトルの集合 $\{p^1, [dp(s)/ds]_{s=\lambda_1}, p^3, [dp(s)/ds]_{s=\lambda_3}, p^5, p^6, \dots, p^n\}$ は定理 1 におけるベクトルの集合 (6) 式に相当しており, S_i を定義したのとまったく同様に P_i を定義することができる. たとえば P_1 は p^1 を除いた残りの $n-1$ 個のベクトルが張る部分空間である.

《定理 2》 A が正常な 2 重固有値を 2 組もっているとする. 対 (A, b) が完全可制御な必要十分条件は, b がどの P_i にも属していないことである.

(証明)

$\langle (A, b)$ が完全可制御 $\rangle \Rightarrow \langle b$ はどの P_i にも属していない $\rangle$:

b が P_1, P_2 および P_5 に属していないことを証明できれば十分である. いま $b \in P_1$ と仮定すると, 次式が成り立つような実数 $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ が存在する.

$$\begin{aligned} b &= \alpha_2 [dp(s)/ds]_{s=\lambda_1} + \alpha_3 p^3 + \alpha_4 [dp(s)/ds]_{s=\lambda_3} \\ &\quad + \alpha_5 p^5 + \dots + \alpha_n p^n \end{aligned} \quad (18)$$

これよりつぎの関係式をうる.

$$[b \ Ab \ \dots \ A^{n-1}b] = [p^1 [dp(s)/ds]_{s=\lambda_1} \ p^3 [dp(s)/ds]_{s=\lambda_3} \ p^5 \ \dots \ p^n]$$

$$\times \begin{bmatrix} 0 & \alpha_2 & & & \\ \alpha_2 & 0 & & & \\ & & \alpha_3 & \alpha_4 & \\ & & \alpha_4 & 0 & \\ & O & & & \ddots \\ & & & \alpha_5 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & \alpha_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \dots & \lambda_1^{n-1} \\ 0 & 1 & 2\lambda_1 & \dots & (n-1) \lambda_1^{n-2} \\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2 & \dots & \lambda_3^{n-1} \\ 0 & 1 & 2\lambda_3 & \dots & (n-1) \lambda_3^{n-2} \\ 1 & \lambda_5 & \lambda_5^2 & \dots & \lambda_5^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix} \quad (19)$$

明らかに $[b \ Ab \ \dots \ A^{n-1}b]$ のランクは n に達せず対 (A, b) は完全可制御ではない。これは仮定に矛盾する。同様にして $b \in P_2$ あるいは $b \in P_5$ と仮定すると、対 (A, b) が完全可制御であるという仮定に矛盾することを示すことができる。明らかに b がどの P_i に属すると仮定しても、対 (A, b) が完全可制御であるという仮定に矛盾する。 $\nearrow$

$\searrow \langle b$ はどの P_i に属さない $\Rightarrow \langle (A, b)$ は完全可制御 $\rangle$: b がどの P_i にも属さないから、 b はつぎのように表せる。

$$b = \alpha_1 p^1 + \alpha_2 [dp(s)/ds]_{s=\lambda_1} + \alpha_3 p^3 + \alpha_4 [dp(s)/ds]_{s=\lambda_3} + \alpha_5 p^5 + \dots + \alpha_n p^n, \quad \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \neq 0 \quad (20)$$

これよりつぎの関係式をうる。

$$[b \ Ab \ \dots \ A^{n-1}b] = [p^1 [dp(s)/ds]_{s=\lambda_1} \ p^3 [dp(s)/ds]_{s=\lambda_3} \ p^5 \ \dots \ p^n]$$

$$\times \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & & & \\ \alpha_2 & 0 & & & \\ & & \alpha_3 & \alpha_4 & \\ & & \alpha_4 & 0 & \\ & O & & & \ddots \\ & & & \alpha_5 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & \alpha_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \dots & \lambda_1^{n-1} \\ 0 & 1 & 2\lambda_1 & \dots & (n-1) \lambda_1^{n-2} \\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2 & \dots & \lambda_3^{n-1} \\ 0 & 1 & 2\lambda_3 & \dots & (n-1) \lambda_3^{n-2} \\ 1 & \lambda_5 & \lambda_5^2 & \dots & \lambda_5^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix} \quad (21)$$

明らかに $[b \ Ab \ \dots \ A^{n-1}b]$ のランクは n である。

(Q. E. D.)

以上 2 重固有値が 2 組ある場合について定理を述べその証明を行ったが、一般に正常でさえあれば、任意の重複度をもつ固有値が任意組あっても同様な定理が成り立つことは明らかであり、さらに定理 1 と組合せれば複素固有値を含んでいる場合にも拡張できる。

3. 例題

(1)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}$$

固有値は $-1, -2$ および -3 で、対応する固有ベクトルは

$$p^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad p^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad p^3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 9 \end{bmatrix}$$

である。 S_i はつぎに示す R^3 の部分空間である。

$$S_1 = \mathbb{R}\{p^2, p^3\}, \quad S_2 = \mathbb{R}\{p^3, p^1\},$$

$$S_3 = \mathbb{R}\{p^1, p^2\}$$

例として $b \in S_3$ の場合を考える。たとえば $\nearrow$

$$\searrow \quad b = 2p^1 - p^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

は S_3 に属する。このとき

$$[b \ Ab \ A^2b] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 6 \\ -2 & 6 & 14 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{ランクは } 2$$

また、どの S_i にも属さない b の例として

$$b = p^1 + 2p^2 - p^3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

をとると

$$[b \ Ab \ A^2b] = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 22 \\ 0 & 22 & -120 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{ランクは } 3$$

(2)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$$

固有値は $1 \pm j$ で、対応する固有ベクトルは

$$p^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1+j \end{bmatrix}, \quad \bar{p}^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1-j \end{bmatrix}$$

である。このとき $S_1 = S_2 = \{0\}$ である。したがって、すべての非零な b に対して対 (A, b) は完全可制御で

ある。事実 $b=[b_1 \ b_2]^T$ とおくと

$$[b \ Ab] = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_2 & -2b_1-2b_2 \end{bmatrix}$$

となり、 $b_1=b_2=0$ 以外の場合は、ランクは2である。

(3)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

固有値は0, -1, -1 であって、-1は正常な重複固有値であり、固有ベクトルはつぎの2個しかない。

$$p^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad p^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\mathcal{R}\{p^1, p^2\}$ に属する b の例として

$$b = p^1 - p^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

をとる。しかるとき

$$[b \ Ab \ A^2b] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{ランクは2}$$

また $\mathcal{R}\{p^1, p^2\}$ に属さない b の例として

$$b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

をとると

$$[b \ Ab \ A^2b] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{ランクは3}$$

4. 可制御部分空間

部分空間 $\mathcal{R}\{b \ Ab \ \dots \ A^{n-1}b\}$ は可制御部分空間と呼ばれる⁴⁾。ここでは A が n 個の固有ベクトルをもっているとする。固有ベクトルのなかに複素数ベクトルがある場合も論ずることができるが、ここでは固有ベクトルはすべて実数ベクトルと仮定する。 n 個の固有ベクトルの中から ν 個の固有ベクトルを選び出し、それらが張る部分空間を S_ν で表す。このような部分空間は C_ν 個あるので、 $j=1, 2, \dots, C_\nu$ となる。

《定理3》 b がある部分空間 S_ν に含まれるが ν 次元より低い部分空間には含まれないとき、可制御部分空間の次元は ν である。

(証明) $j=1$ において証明しても一般性を失わない。 S_1 とは $\mathcal{R}\{p^1, p^2, \dots, p^\nu\}$ のことである。 $b \in S_1$ で、かつ b は S_1 より低い次元の部分空間に含まれないから

$$b = \beta_1 p^1 + \beta_2 p^2 + \dots + \beta_\nu p^\nu,$$

$$\beta_i \neq 0, \quad i=1, 2, \dots, \nu \quad (22)$$

と表される。 A の固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ とすると、 $A p^i = \lambda_i p^i$, $i=1, 2, \dots, n$ が成り立つので、(22)式より

$$[b \ Ab \ \dots \ A^{\nu-1}b] = [p^1 \ p^2 \ \dots \ p^\nu] \begin{bmatrix} \beta_1 & & & 0 \\ & \beta_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \beta_\nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \dots & \lambda_1^{\nu-1} \\ 1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_2^{\nu-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_\nu & \dots & \lambda_\nu^{\nu-1} \end{bmatrix} \quad (23)$$

しかるとき

$$A^\nu b = \beta_1 \lambda_1^\nu p^1 + \beta_2 \lambda_2^\nu p^2 + \dots + \beta_\nu \lambda_\nu^\nu p^\nu$$

$$= [p^1 \ p^2 \ \dots \ p^\nu] \begin{bmatrix} \beta_1 \lambda_1^\nu \\ \beta_2 \lambda_2^\nu \\ \vdots \\ \beta_\nu \lambda_\nu^\nu \end{bmatrix}$$

$$= [p^1 \ p^2 \ \dots \ p^\nu] \begin{bmatrix} \beta_1 & & & 0 \\ & \beta_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \beta_\nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1^\nu \\ \lambda_2^\nu \\ \vdots \\ \lambda_\nu^\nu \end{bmatrix} \quad (24)$$

(23), (24)式より

$$A^\nu b = [b \ Ab \ \dots \ A^{\nu-1}b] \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \dots & \lambda_1^{\nu-1} \\ 1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_2^{\nu-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_\nu & \dots & \lambda_\nu^{\nu-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \lambda_1^\nu \\ \lambda_2^\nu \\ \vdots \\ \lambda_\nu^\nu \end{bmatrix} \quad (25)$$

これは

$$A^\nu b = \gamma_0 b + \gamma_1 Ab + \dots + \gamma_{\nu-1} A^{\nu-1}b \quad (26)$$

と書き直される。これより $A^\nu b$ は $\{b, Ab, \dots, A^{\nu-1}b\}$ に従属であることがわかる。同様にして $A^{\nu+1}b, \dots, A^{n-1}b$ は $\{b, Ab, \dots, A^{\nu-1}b\}$ に従属である。よって

$$\begin{aligned} \text{rank}[b \ Ab \ \dots \ A^{n-1}b] \\ = \text{rank}[b \ Ab \ \dots \ A^{\nu-1}b] = \nu \end{aligned} \quad (27)$$

(Q. E. D.)

5. 多入力系の可制御条件

つぎのシステムを考える。

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (28)$$

ここに $x \in R^i$, $u \in R^r$ とする。 A はサイクリックであるとする。補題1は Gopinath によるものである⁵⁾。

【補題1】 対 (A, B) が完全可制御ならば、ほとんどすべての $\alpha \in R^r$ に対して、対 $(A, B\alpha)$ は完全可制御である。

もう一つの補題を用意する。

【補題2】 対 $(A, B\alpha)$ が完全可制御となるような $\alpha \in R^r$ が存在すれば、対 (A, B) は完全可制御である。

(証明) つぎの関係式が成立する。

$$[B\alpha \ A B\alpha \ \dots \ A^{n-1}B\alpha]$$

$$= [B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B] \begin{bmatrix} \alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha \end{bmatrix} \quad (29)$$

$\text{rank}[B\alpha \ AB\alpha \ \dots \ A^{n-1}B\alpha] = n$ なるゆえ $\text{rank}[B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B] = n$. (Q. E. D.)

《定理 4》 A の固有値が相異なるとき、対 (A, B) が完全可制御である必要十分条件は、 $B\alpha$ がいかなる S_i にも属さないような α が存在することである。

(証明) 対 (A, B) が完全可制御であるとする。補題 1 より、ほとんどすべての α に対して、対 $(A, B\alpha)$ は完全可制御である。したがって定理 1 より、ほとんどすべての α に対して $B\alpha$ はいかなる S_i にも属さない。当然 $B\alpha$ がいかなる S_i にも属さないような α が存在する。

ある α が存在して $B\alpha$ がいかなる S_i にも属さないならば、定理 1 より対 $(A, B\alpha)$ は完全可制御である。したがって補題 2 より、対 (A, B) は完全可制御である。(Q. E. D.)

《定理 5》 A が正常な重複根をもっているとき、対 (A, B) が完全可制御である必要十分条件は、 $B\alpha$ がいかなる P_i にも属さないような α が存在することである。

証明は定理 2、補題 1 および 2 より明らかである。

6. む す び

対 (A, b) または対 (A, B) の完全可制御性が A の固有ベクトルと、ベクトル b または B の各列ベクトルとの間の幾何学的関係によって決定されるものであることを明らかにした。まず単入力システムについて詳しく検討し、多入力システムの考察は Gopinath の補題を用い単入力システムに帰着させて行った。また可制御部分空間の次元についても幾何学的考察を行った。

終りに種々討論をいただいた上智大学 田村助教授はじめ研究室の諸氏に感謝する。また、本研究の一部は文部省科研費特定研究（環境モニタリング・制御システム）として行われたことを報告する。

参 考 文 献

- 1) H.H. Rosenbrock: State-Space and Multivariable Theory, Chaps. 2.6 and 5.2, Nelson (1970)
- 2) R.W. Brockett: Finite Dimensional Linear Systems, p. 8 Exercise 24, John Wiley & Sons (1970)
- 3) 市川邦彦: 可制御性と可観測性, 計測と制御, **10-4**, 284/288 (1971)
- 4) W.M. Wonham and A.S. Morse: Decoupling and Pole Assignment in Linear Multivariable Systems; A Geometric Approach, SIAM J. Control, **18-1**, 1/8 (1970)
- 5) B. Gopinath: On the Control of Linear Multiple Input-Output Systems, The Bell Systems Technical Journal, **50-3**, 1063/1081 (1971)