一対比較のための非計量的手法[†]

小林 彬*・芝田 勉**

A Nonmetrical Method for Paired Comparisons

Akira KOBAYASHI* and Tsutomu SHIBATA**

In this paper, the authors propose a new nonmetrical algorithm to construct an interval scale from the numerical data obtained by paired comparisons. In the algorithm, the band function model is introduced, and, with respect to the function's average characteristics, a monotone increasing relation is assumed between the numerical data and the difference of a psychological scale on the attribute of the compared objects.

The algorithm to construct an interval scale is based on an iterative method of calculus, and has the following advantages.

- 1) Not necessarily all results about the comparison of each pair of objects are required.
- 2) The amount of fuzziness or scattering included in the results of the paired comparisons can be known from the width of the dead zone introduced in the algorithm.
- 3) An interval scale can be constructed more precisely by this algorithm than by a usual paired comparison method.

Through the numerical experiments using artificial data, the fundamental characteristics of the algorithm are examined.

For testing its practical utility, a case of subjective comparisons of weights by human hands is taken up as an example, and the algorithm is applied to reconstructing their real weights. The reconstructed weights show good agreement with the real weights measured by a direct balance.

1. ま え が き

本論文は、比較判断の結果得られたデータに対する計量化処理法に関し、間隔尺度構成を目的として非計

量的な新しい手法を提案するものである。

官能検査などに見られるように計測量概念が未だ整っていない対象の計量化においては心理学的測定法が活用されるが、中でも一対比較法は質の良い結果が得られるものとされよく用いられている¹⁾。このような計測行為の初期段階において得られる測定値は結果として心理学的尺度にすぎないが、物理的尺度による計測量概念の整備を図っていくことを考えると、この心理学的尺度を尺度論的²⁾にできるだけ整備しておくことが望ましく、少なくとも間隔尺度を構成してよく都合がよい。すなわち因子分析法³⁾や回帰分析法など多変量解析法⁴⁾の手法においては、基本的に間隔尺度をなす尺度間の関連分析について種々の手法がすでに用意されているので、それらの手法を活用していくことが効果的であるからである。またそのような間隔尺度が物理的尺度に直接的に結びついていく場合も十分考えられる。

一対比較法における代表的な手法として Thurstone の方法、Scheffé の方法などがあり、比較判断の結果はそれぞれ順位を表す数値や評点の形で与えられる¹⁾。この場合その数値処理にあたっては、判断に付随したあいまいさやばらつきは加法的確率変数として扱われ、さらにそのあいまいさやばらつきが減少し零になった極限では一対比較判断の結果は、各対象についての心理学的尺度の差に比例した数値を与えるものとされている^{5), 6)}。つまり一対比較判断の平均的性格は間隔尺度をなすものであることが始めから仮定されていることになる。しかし人間感覚の非線形性（たとえば Weber-Fechner の法則など）を考慮すれば、このような仮定は必ずしも現実的でなく、もう少しゆるい条件を前提とする手法が必要になる。

本研究では以上の観点から、帯関数モデルを考え、一対比較判断の結果はある範囲にわたってばらつきをもつものであるがその平均的性格は心理学的尺度の差と単調増加関係にある数値が得られるものと仮定し、そのような数値の組から心理学的尺度につき間隔尺度

[†] 第 19 回自動制御連合講演会で発表（昭 51・11）

* 東京工業大学工学部 東京都目黒区大岡山 2-12-1

** オリンパス光学工業(株) 八王子市石川町 2951

* Faculty of Engineering, Tokyo Institute of Technology, Meguro-ku, Tokyo

** Olympus Optical Co. Ltd., Hachioji

(Received May 31, 1977)

を与えるためのアルゴリズムを考察する。

アルゴリズムは非計量多次元尺度構成の数値処理法に見られる考え方⁷⁻⁹⁾を応用した逐次的手法で計算機による処理を前提とするが、(1)すべての比較対に対する判断結果を必ずしも必要としない、(2)判断結果に入っているあいまいさやばらつきの程度を、アルゴリズムに導入されている不感帯幅の大きさから知ることができる、(3)従来の一対比較法の数値処理より質の良い間隔尺度を構成することができる、などの利点を有している。以下ではそれらの利点を人工データに対する数値実験を通じて検討すると共に、重さの主観的比較結果から実際の質量を再現する実験に適用しアルゴリズムの実用上の有効さを検証する。

2. 問題の記述

本論文では、 N 個の対象を考えその可能な対についていわゆる一対比較判断を行うものとする。この場合各対象 x_i に対応して仮想的に考えた心理学的尺度を m_i とし、 x_i に対する x_j の比較判断の結果を数値的に $\varphi(x_i, x_j)$ で表す。このとき、 $\varphi(x_i, x_j)$ と m_i, m_j の間にはつぎの関係があるものとする。

$$f_u(m_j - m_i) \geq \varphi_{ij} \equiv \varphi(x_i, x_j) \geq f_d(m_j - m_i); \\ i, j \in \{1, \dots, N\} \quad (1)$$

ここで $f_u(m), f_d(m)$ は共に m に関するある単調増加関数である。(Fig. 1 参照)。

(1)式において $f_u(m)$ と $f_d(m)$ とに挟まれる領域は比較判断に含まれるあいまいさやばらつきの範囲を表現し、また $f_u(m)$ と $f_d(m)$ が単調増加関数であることによって比較判断の平均的性格が $m_j - m_i$ と単調増加関係にあることを表現する。以下これを一対比較の帯関数モデルと呼ぶが、このモデルは Thurstone の方法や Scheffé の方法で仮定されている、 φ_{ij} の平均的性格は $m_j - m_i$ に比例するという条件^{5), 6)}を大幅に緩めたものであると共に、従来一般の一対比較法で扱われているほとんどのデータを統一的に表現する

Fig. 1 Band function model for paired comparisons

もので広い活用可能性をもつと考える。

さてわれわれの目標は適切な m_i を最終的に決定することである。しかしわれわれが最初手にするデータは φ_{ij} だけであり $f_u(m)$ や $f_d(m)$ についてはその単調増加性以外まったく未知である。そのため m_i を決定しようとするとき直接的な数値的手法でなく何か新しい逐次的手法を考案する必要がある。そこでつぎのような問題が生ずる。

「 N 個の対象につき、その一対比較判断に関する数値の組 φ_{ij} が与えられた場合、(1)式の前提のもとに間隔尺度¹⁾をなすようその心理的尺度 m_i を構成する方法を見出すこと」

この問題に解答を与えることが本研究の主題である。

3. 非計量的アルゴリズムの考え方

説明をわかりやすくするために、まず(1)式において $f_u(m)$ と $f_d(m)$ の差が小さくなり零になった極限を考える。すなわち判断にあいまいさやばらつきがなくなった理想的状況のもとでアルゴリズムの基本的性格を考えるわけである。この場合(1)式はつぎのように書ける。

$$\varphi_{ij} = f(m_j - m_i); i, j \in \{1, \dots, N\} \quad (2) \\ f(m); m \text{ に関する単調増加関数}$$

(2)式を仮定すれば、 $f(m)$ の関数形は未知であるから φ_{ij} から知れる情報はその数値的順序のみであって数値自体に特別な意味はない。そこで φ_{ij} を小さいほうから順に並べ、その順序で各 φ_{ij} の順位を求めそれを α_{ij} とする。

一方適当に m_i を仮定すれば

$$d_{ij} \equiv m_j - m_i \quad (3)$$

が与えられ、 d_{ij} に関する同じような順位 β_{ij} を決めることができる。この場合、もし α_{ij} と β_{ij} がまったく一致すれば仮定された m_i はデータ φ_{ij} に則して間隔尺度を構成する正しい解の一つとなる(注1)。しかし一般には最初から一致が得られることはまれであり、そのため m_i に関して適当な修正が必要となる。この修正を行う根拠を与えるため、つぎのような α_{ij} と β_{ij} の不一致の程度を表す測度 S を定義し、これを順位ひずみと呼ぶ。

$$S = \sum_{i,j=1}^N |\alpha_{ij} - \beta_{ij}| (d_{ki} - d_{ij})^2 \quad (4)$$

ただし d_{ki} はその順位について $\beta_{ki} = \alpha_{ij}$ となるも

(注1) 本論文では直接触れないが、別の数値解析によればこの種の問題の解は一意的に決まるのではなく解がある領域をもつことが知られる¹³⁾。

のが選ばれる。順位ひずみの定義では、 φ_{ij} と d_{ij} の順位の違いおよび d_{ij} の大きさの違いが相乗的に考慮され、当然 S は非負であり、また $S=0$ は m_i につき修正の必要がない状態にあることを意味する。

なお便宜上 m_i は次式を満たすものとするが、間隔尺度ではその原点と単位の取り方に任意性があるから一般性は失われない。

$$\sum_{i=1}^N m_i = 0 \quad (5)$$

$$\sum_{i=1}^N m_i^2 = 1 \quad (6)$$

このような S を導入すると、 S が減少するよう m_i の適当な修正を行えばよく、ここでは最急降下法に従い、つぎのような修正を繰返しつつ、逐次 $S=0$ に収束させるようにした。

$$m_i \Rightarrow m_i - \gamma \frac{\partial S}{\partial m_i} \quad (7)$$

γ は一応、正の定数であるが、収束速度を加味し状況に応じて適応性をもたせるため若干の工夫が施されている。以上のアルゴリズムは Kruskal の非計量多次元尺度構成法の考え方^{8),9)} を応用したものであるが、(2)式で関数 f の引数が距離でなく $m_j - m_i$ になっている点、順位を活用する点、順位ひずみの定義の仕方などまったく異なったものである。

一方、帯関数モデルに幅が存在する実際的な状況においては以上のアルゴリズムにつきのような若干の工夫を施せばよい。すなわち比較判断結果に幅を考えるわけであるから、 φ_{ij} の間の小さな差は φ_{ij} の順位を決めるうえで決定的な意味をもちえない。そこで不感帯を考えその幅を ε とすると、

$$|\varphi_{ij} - \varphi_{kl}| \leq \varepsilon \quad (8)$$

の関係にある φ_{ij} と φ_{kl} についてはその差によって両者間の順位をつけることを保留し d_{ij} のほうから決まる β_{ij} に準じて α_{ij} を決める。 ε の値を固定したまま m_i の修正を行い S が零に収束するかどうか判断する。零に収束しないときは適当な段階で m_i の修正を打ち切り、 ε を適当に増加させ同様の操作を行い、 S が零に収束するまで操作を続行する。このような方法を用いると帯関数モデルに幅が存在していてもうまく m_i を決定することができると共に、その幅の大きさを不感帯幅 ε の大きさとして知ることが可能となる。

Table 1 Artificial data to test the nonmetrical algorithm

$m_1=0.405, m_2=0.389, m_3=0.325, m_4=0.214, m_5=0.046, m_6=0.014$ $m_7=-0.193, m_8=-0.321, m_9=-0.417, m_{10}=-0.465.$											
d_{ij}											
i	j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1		0.000	0.016	0.080	0.192	0.359	0.391	0.599	0.726	0.822	0.870
2			0.000	0.064	0.176	0.343	0.375	0.583	0.713	0.806	0.854
3				0.000	0.112	0.279	0.311	0.519	0.647	0.742	0.790
4					0.000	0.168	0.199	0.407	0.535	0.631	0.678
5						0.000	0.032	0.239	0.367	0.463	0.511
6							0.000	0.208	0.335	0.431	0.479
7								0.000	0.128	0.223	0.271
8									0.000	0.096	0.144
9										0.000	0.048
10											0.000

4. 人工データによる検討

本節では数値例を示しながら前節で述べたアルゴリズムのもつ主要な性質について述べる。

人工データは対象の個数を 10 とし、 m_i を適当に定めて d_{ij} を求め、 d_{ij} の単調増加変換として φ_{ij} を与えたものを利用した。その場合の m_i および d_{ij} を Table 1 に示す。このような φ_{ij} から最初の m_i が、どのようにまたどの程度再現できるかを検討するのが本節の目的である。 d_{ij} の表で左下半分は $d_{ji} = -d_{ij}$ の性質があるため省略してある。なお本節では一貫して Table 1 の数値を用いる。

4.1 帯関数モデルの幅が零の場合

(i) f の関数形の影響

d_{ij} から φ_{ij} への単調増加変換に関して、Fig. 2 に示すような関数形を 5 種類用意し、主として m_i の収束の様子と再現された値の質について関数形の影響を観察した。Fig. 3 は全体的な収束の様子を示す分散図の一例であり、Fig. 4 は Fig. 3 のデータについて特定の d_{ij} を選びその収束の様子を図示したものである。

Fig. 2 Examples of monotone increasing function prepared

Fig. 3 Examples of scatter diagram

Fig. 4 An aspect of convergence

このようなデータの観察の範囲では、関数の傾きが急な所や緩やかな所、角張った所での違いを含め関数形の違いによる影響として有意なものはまったく現われなかった。これは φ_{ij} から順位情報を得る段階で関数形の影響を受ける部分がほとんど除去されてしまうためであると考えられる。

(ii) 初期値の与え方

この種の問題で m_i の初期値をどう与えるかは計算の回数を少なくするうえで重要な鍵であるが、幾種類かの初期値の与え方を検討した結果、次式のように初期値 m_{i0} を与えると効果的であることが判明した。

$$m_{i0} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \varphi_{ij} \quad (9)$$

Fig. 5 Convergence rate and number of vacant data

これは、原点を通る直線による $f(m)$ の近似を最小 2 乗法の意味で最適に行ったものになるが¹⁰⁾、いわゆる一対比較法が与える解に相当するものである^{11), 5), 6)}。また、最初 φ_{ij} を作るときの m_i を m_i^* とすると、 $f(m)$ が単調増加関数であることから次式がいえるが、

$$m_i^* > m_j^* \rightarrow m_{i0} > m_{j0} \quad (10)$$

これは (9) 式を用いれば m_i に関する順位は初期値の段階ですでに整えられていることを意味する¹⁰⁾。したがって、その分 m_i の修正を行う計算回数が節約でき、実際他の初期値の与え方をすると収束に十数回の計算回数を必要とする (Fig. 3 の結果はその一例である) ものが、(9) 式で初期値を与えると数回の計算回数で $S=0$ に収束することが確かめられている。これは Fig. 3 の結果に対応させていえば計算回数 10 前後から計算を始めることに相当する。

(iii) 不完備データの場合

すでに指摘されているように、一対比較法の最大の難点は比較判断を対象のあらゆる組合せの対に対して行わねばならない点にあり、数の困難を伴っていることである¹¹⁾。この点比較判断の個数を減らしたいが、本アルゴリズムにおいては比較判断の結果が 1 部欠除している不完備なデータに対してもまったく同一の手順を適用することができ、存在するデータのみを用いて m_i を求めることが可能である。ただしこの場合の初期値は、不完備データに対して (9) 式を拡張した Gulliksen の方法¹¹⁾ による結果を利用した。なお除くデータの個数やどの φ_{ij} を除くかの選択は一樣乱数を 2 値化する方法を利用してランダムに行った。

Fig. 5 は除かれたデータの個数 M と収束するのに必要とした計算回数 C との関係を示したものである。Fig. 5 を見ると、データの数が増えたため m_i 間の全体的調整が容易になり C が減少する側面と初期値設定が乱されることにより C が増加する側面の相反する両面が複雑に現れている。

Fig. 6 は、 $S=0$ となったときの m_i の値 $\bar{m}_i$ に関し、その再現性の良さを次式で評価し、 M との関

Fig. 6
Goodness of fit to original scale and number of vacant data

係を示したものである。

$$R = \sum_{i=1}^N (\bar{m}_i - m_i^*)^2 \quad (11)$$

M が増すにつれ R の最大値つまり最悪のときの m_i の再現性が悪くなることがわかるが、 M が大きいからといって必ずしも m_i の再現性の質が悪くなるとは限らない。

なお収束の様子に特別な差異は現れなかった。

4.2 帯関数モデルの幅がある場合

まず幅のある帯関数モデルに対応した人工データを作るため先に利用した φ_{ij} に乱数を加える手法をとった。乱数としては平均値零の正規乱数、一様乱数、3値乱数を用い、その分散の大きさを適当に変えた。

前節に述べたアルゴリズムに従い計算を行ったが、ここでは完備なデータに対する結果のみを示す。なお計算にあたり不感帯の幅 ε は最初零とし 0.02 ピッチで増加させ最終段階に近い所ではそのピッチを 0.01 に変更する方法をとっている。収束に必要とした計算回数は加えた乱数の大きさのレベルにより異なっているが、一つの ε に対して平均数回の計算を行うことで

Fig. 7
Width of dead zone and size of added random numbers

満足のいく結果が得られている。

Fig. 7 は加えられた乱数が正規乱数 $N(0, \sigma^2)$ または一様乱数 $U(-\xi, \xi)$ の場合、 $S=0$ に達したときの ε の大きさ ε^* と σ または ξ との関係を図示したものである。

Fig. 7に見られるとおり ε^* は加えられた乱数の大きさにほぼ比例して増加している。本来不感帯幅は、近接する φ_{ij} に乱数が加わったため相互の正しい順位が逆転していることを考慮しようとするもので、 ε^* は逆転を生じている φ_{ij} 間の差の絶対値に関する最大値に一致するはずである（実際は ε を増加させるピッチの大きさにより若干大きくなりうる）。この点を詳細に検討するため、 $-\eta, 0, \eta$ の値をとる3値乱数を用いた実験を行った。この場合 ε^* の最大値が 2η の値に近い値をとるかどうかが前述の考え方の正しさが確かめられるが、結果は Table 2 に示すとおりであり、その考え方が正しいことがわかる。なお Table 2 では、 $\bar{m}_i$ の再現性の良さ R と、 m_{i0} つまりいわゆる一対比較法が与える解について同様の評価を行ったもの、すなわち

Table 2 Width of dead zone and goodness of fit to original scale with adding trinary random numbers

$\eta=0.1$			$\eta=0.3$			$\eta=0.5$		
ε^*	R_0	R	ε^*	R_0	R	ε^*	R_0	R
0.20	1.77×10^{-3}	4.63×10^{-4}	0.52	2.20×10^{-3}	1.19×10^{-3}	0.92	2.90×10^{-3}	1.52×10^{-3}
0.18	1.58 "	6.38 "	0.52	1.50 "	1.19 "	0.92	1.56 "	1.38 "
0.12	1.49 "	2.98 "	0.52	1.27 "	3.85×10^{-4}	0.92	1.22 "	1.21 "
0.20	1.61 "	3.85 "	0.48	1.74 "	1.11×10^{-3}	0.90	2.16 "	2.52 "
0.20	1.95 "	5.58 "	0.56	2.85 "	1.86 "	0.96	4.19 "	4.48 "
0.20	1.82 "	2.99 "	0.50	2.20 "	7.62×10^{-4}	0.90	2.67 "	6.52×10^{-4}
0.12	1.75 "	3.72 "	0.58	2.04 "	9.56 "	0.88	2.42 "	2.27×10^{-3}
0.16	1.50 "	4.68 "	0.36	1.59 "	1.05×10^{-3}	0.62	2.20 "	1.87 "
0.20	1.64 "	3.79 "	0.58	1.70 "	9.30×10^{-4}

Fig. 8 Comparison of goodness of fit to original scale between proposed algorithm and usual paired comparison method

$$R_0 = \sum_{i=1}^N (m_{i0} - m_i^*)^2 \quad (12)$$

が比較して示されている。そのような比較を正規乱数を加えた場合について示したものが Fig. 8 である。

加わる乱数の大きさが大きくなると、 $f(m)$ の関数形に存在する非直線性が判断のあいまいさやばらつきの中に埋もれてしまい両者の区別がしにくくなるため本アルゴリズムによる結果もいわゆる一対比較法の結果と同程度の質をもった解を与えるようになる傾向がうかがわれる。したがって本アルゴリズムが最も効果を発揮するのはあいまいさやばらつきが存在しかつその大きさに比して非直線性が大きく現れるような状況であると考ええる。

5. 重さの比較とアルゴリズムの実効性の検証

本節では、本アルゴリズムのもつ実用上の効用を実際的に検証するため、重さの主観的比較（一対比較）

から得られたデータに提案したアルゴリズムを適用し、どの程度正しく質量が再現できるかを考察した。

まず直径約 31 mm、高さ約 53 mm のプラスチック製不透明円筒を用意し、その中に鉄板およびアルミニウム板を入れ、直示天秤を用いて 10 mg の単位まで質量を調整した 14 個の試料 $x_1, x_2, \dots, x_{14}$ を作った（各試料の質量を Table 3 の左欄に示した）。

つぎに被験者に対しランダムな対呈示を行いどちらが重いかを判断させた（両手を用いる主観的比較）。被験者数は 8 名で、それぞれ 5 回の反復実験を行ったため、一つの対につき 40 回の比較を繰返したことになる。結果の集計を Table 3 に示すが、数値は x_i に対し x_j がより重いと判断された頻度を百分率で表したものである¹²⁾。対角線の所は 50% とみなし、また対角線に対称の位置にある要素はその和が 100% の関係にあるため左下半分の数値は省略してある。

このような結果を帯関数モデルに対応したデータと見なせば、Fig. 9 のような幅と非直線性を有する一つの帯関数が得られる。

このデータに対し、いくつかの数値処理法を適用して m_i を求め、試料の質量に関する平均値と分散に合せて質量値に読み換えた結果を比較したものが Table 4 である。Table 4 において、(A) は Table 3 に関して右上方の余白を 100% と見なして完備させたデータにつき不感帯幅を考慮するアルゴリズムを適用したもので、 $\varepsilon^* = 8\%$ のとき $S = 0$ に収束した。

(B) は完備なデータにつき、不感帯の考え方をいないで S が最小となったときの m_i から質量を再現させた場合である。(C) は (B) と同様であるがデータは Table 3 の不完備な数値のみを利用した場合である。

Table 3 Frequency on subjective comparison of weights

mass g	i	j	frequency %													
			X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}	X_{11}	X_{12}	X_{13}	X_{14}
90.00	X_1			57.5	70.0	75.0	100									
91.00	X_2				62.5	67.0	97.5	100								
92.00	X_3					57.5	90.0	97.5	100							
93.00	X_4						85.0	97.5	100							
96.00	X_5							67.5	95.0	100						
98.00	X_6								75.0	85.0	97.5	100				
100.00	X_7									67.5	75.0	77.5	80.0	95.0	100	
101.00	X_8										65.0	72.5	77.5	90.0	100	
102.00	X_9											65.0	72.5	80.0	90.0	97.5
103.00	X_{10}												67.5	72.5	87.5	95.0
104.00	X_{11}													62.5	82.5	92.5
105.00	X_{12}														65.5	92.5
107.00	X_{13}															72.5
109.00	X_{14}

Fig. 9 Band function on subjective comparison of weights

(D)は完備なデータにつき(9)式から質量を再現したものである。(E)は完備なデータにつきThurstoneのケースVの方法⁵⁾を適用した結果である。この場合データに100%の数値が多数あり、その処理が難しいため良い結果が得られないが参考のため記載した。

Table 4では実際の質量と再現された質量の差の2乗和が示されており、それらを比較すると本アルゴリズムの有効さが理解できる。なおFig. 9の中で→印で指示されている2点は、このデータの中で順位の逆転をきたし最大の差を与える2点でその差は7.5%であるが、(A)の $\epsilon^*=8\%$ はこれとよく一致している。

6. あとがき

本研究では一対比較法に関し帯関数モデルを提案し、そのようなデータから間隔尺度を構成するため不感帯幅を考慮した非計量的アルゴリズムにつき考察した。

人工データを用いてアルゴリズムのもつ主要な基本的性格を検討すると共に、重さの主観的比較実験に適用しアルゴリズムの実用性を確めた。また従来の一対比較法の処理結果と比較し、より質の良い結果を与える可能性のある効果的な手法であることが判明した。

本方法が最も効果を発揮するのは、データの欠除、ばらつきや非直線性が強く存在する状況と思われるが、今後さまざまな分野における実際の活用を考えてみたい。

なお、このようなアルゴリズムのもつ数理的性質の解析や、Schefféの方法に見られる順序効果、組合せ効果の分析への適用可能性などは残された今後の検討課題である。また筆者らは本手法を非計量一対比較法

Table 4 Reconstructed weights and comparison of goodness of fit to real weights

real weight g	reconstructed weight g					remark
	nonmetrical algorithm			usual paired comparison method		
	(A)	(B)	(C)	(D)	(E)	
90.00	90.23	90.43	90.23	90.72	94.44	(A); complete data, consider dead zone.
91.00	91.03	91.05	91.05	91.23	92.88	
92.00	91.85	92.09	92.05	92.13	92.74	
93.00	92.43	92.16	92.23	92.60	95.07	
96.00	96.03	95.78	95.96	95.61	101.76	(B); complete data, neglect dead zone.
98.00	97.79	97.78	97.80	97.09	98.33	
100.00	100.48	100.03	100.11	99.75	93.89	(C); incomplete data, neglect dead zone.
101.00	101.32	101.19	101.38	100.88	96.19	
102.00	102.30	102.47	102.58	102.21	97.98	
103.00	103.16	103.40	103.22	103.15	97.96	
104.00	104.05	103.91	104.31	104.20	102.80	(D); complete data, use eq. (9).
105.00	105.02	105.04	104.84	105.49	108.87	
107.00	106.74	106.75	106.64	107.21	106.07	
109.00	108.63	108.66	108.58	108.73	112.25	(E); complete data, Thurstone method case V.
sum of square difference	1.1020 $\epsilon^*=$ 8.0%	1.6036	1.6614	2.2750	192.8	

と名付けたいと考えている。

参 考 文 献

- 1) 日科技連官能検査委員会編：新版官能検査ハンドブック，241/570，日科技連出版社（1973）
- 2) S.S. Stevens: On the Theory of Scales of Measurement, Science, **103**, 670/680 (1946)
- 3) 芝祐順：因子分析法，東大出版会（1972）
- 4) 北川敏男編：多変量解析論，共立出版（1967）
- 5) J.P. ギルホード：精神測定法（秋重義治監訳），189/218 培風館（1971）
- 6) H. Scheffé: An Analysis of Variance for Paired Comparisons, J. Am. Stat. Ass., **47**, 381/400 (1952)
- 7) R.N. Shepard: Analysis of Proximities as a Technique for the Study of Information Processing in Man, Human Factors, **5-2**, 33/48 (1963)
- 8) J.B. Kruskal: Multidimensional Scaling by Optimizing Goodness of Fit to a Nonmetric Hypothesis, Psychometrika, **29-1**, 1/27 (1964)
- 9) J.B. Kruskal: Nonmetric Multidimensional Scaling—A Numerical Method, Psychometrika, **29-2**, 115/129 (1964)
- 10) 小林彬：最小2乗法と順序関係，第18回自動制御連合講演会前刷，1124（1970）
- 11) H. Gulliksen: A Least Squares Solution for Paired Comparison with Incomplete Data, Psychometrika **21**, 125/134 (1956)
- 12) 諏訪部和之：順序構造と計測，東京工業大学制御工学科修士論文（1976）
- 13) 芝田勉：一対比較法のための非計量的処理，東京工業大学制御工学科卒業論文（1977）
- 14) 小林彬，芝田勉：主観的比較計量と順位差を利用する非計量尺度構成，第19回自動制御連合講演会前刷，4002（1976）
- 15) 小林彬：いくつかの順序則と判定関数のための帯関数モデル，第14回 SICE 学術講演会予稿集，3514（1975）