PLLと高速零位法を応用したアナログ式実時間 フーリエ分析器†

小林 史典*・中野 道雄*

Real-Time Analog Fourier Analyzer Using PLL and the High-Speed Null Method

Fuminori KOBAYASHI* and Michio NAKANO*

A harmonic analyzer which furnishes accurate information on the phases of harmonics is proposed. The operating principles of this harmonic analyzer consist in performing compute operations on function $f(t)$ of interest in terms of analog voltage for the Fourier coefficients, using quadrature harmonic sinewaves that are generated in phase with the fundamental of $f(t)$ by two phase-locked oscillators arranged tandem. Thus a d. c. voltage proportional to the real or imaginary part of each harmonic component of $f(t)$ can be obtained. The configuration used in the harmonic analyzer provides a high flexibility in analysis and allows a perfect real-time operation as well. The test run with a prototype consisting of about 35 logic and analog ICs indicated an accuracy of $\pm 0.6\%$ FS over the covered frequency range of 1 Hz to 50 kHz. A closed-loop version which was implemented by a kind of null method is also discussed. This version not only reduces errors by half but can find use in such applications as filtering devices, e. g., tracking band-pass/notch filters, and high-speed distortion meters.

1. ま え が き

フーリエ変換は信号処理の重要な一領域である。

電力関係の分野における高調波解析では、各調波の振幅に加えて、位相の情報が大きな意味をもつ場合がある¹⁾。しかし既存のスペクトル分析器は、一般に使われているフィルタ方式のもの、試作が報告されている時間領域での演算によるもの^{2), 3)}とも、出力が振幅

情報のみであるためこの目的には使用できない。

FFTを用いた分析装置およびいくつか発表されている簡易形の分析器^{4)~6)}では、フーリエ変換の実部と虚部とが別個に得られるため、信号源によっては位相を知ることができる。しかしこれらも、被分析信号に乗ずる $\sin$ および $\cos$ の関数を入力の繰返し周期に同期させる機能を欠いているために、一般の信号における各調波の位相関係を得ようとするに困難を伴うと考えられる。また簡易形の分析器には、サンプル数が少ないために時間連続データに対しては誤差が大きい、分析をシリアルに行おうとすると次数の変更がめんどものである、などの問題が残されている。

本論文では、正確な位相情報を得るとともにこれらの問題点を解決することを目標として、PLLによって入力信号の基本波に同期した二相の正弦高調波を発生し、これを用いてフーリエ係数の定義式どおりの演算をアナログ電圧の次元において実時間で行う、電圧信号用のフーリエ分析器を提案する。また、これに筆者らが先に提案した高速零位法と呼ぶ原理を適用することにより、精度が改善されるとともに、フィルタとして利用できることを示す。

2. 基本構成

周期 T で繰返す t の関数 $f(t)$ は、

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) \quad (1)$$

$$\text{ここで、}\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

のような級数に展開することができ、そのときの係数 a_n, b_n はつぎの二つの式で表される：

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos n\omega_0 t \, dt \quad (2)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin n\omega_0 t \, dt \quad (3)$$

† 第15回計測自動制御学会学術講演会で発表(昭51・8)

第16回計測自動制御学会学術講演会で発表(昭52・8)

* 東京工業大学工学部 東京都目黒区大岡山 2-12-1

* Faculty of Engineering, Tokyo Institute of Technology, Meguro-ku, Tokyo

(Received July 15, 1977)

Fig. 1 Analog computation for Fourier coefficients

Fig. 2 Schematic of frequency synthesizer

これらを求めることがフーリエ分析である。

ここで t を時間とすると、たとえば a_n については、 $\cos n\omega_0 t$ を $f(t)$ に同期させて発生するとともに、相関形サーボ・アナライザの乗算・積分部と同様の構成 (Fig. 1) を用いることにより、アナログ電圧の次元で (2) 式の演算を実現することができる。 b_n については、 $\cos n\omega_0 t$ のかわりに $\sin n\omega_0 t$ を使用すればよい。

上記の $\cos n\omega_0 t$ (または $\sin n\omega_0 t$) を、二相発振器などの正弦波発振器にパルスで強制同期をかけて発生することは、波形ひずみと同期の安定性の面から好ましくない。そこでここに、PLL による周波数シンセサイザ (Fig. 2) を利用することを提案する。

基準周波数としては、入力信号 $f(t)$ からローパス・フィルタとコンパレータによって基本波のクロックを抽出して用い、PC の分周比は分析次数 n に等しくとる。VCO に二相正弦波が得られるものを使用すれば、これによって出力には $f(t)$ に同期した n 次の正弦高調波を得ることができる。

上述の原理によるフーリエ分析器は、

- i) 正弦波が入力信号に同期しているため、正しい位相情報が得られる
- ii) アナログ方式のため、文献 4)～6) に比較して時間連続信号に対するサンプリングの誤差がなく
- iii) $t=T$ において完全に実時間で結果が得られる
- iv) 正弦波を周波数シンセサイザで発生しているため、分析次数の変更が容易である

という特徴を有している。

3. 試作装置の構成

3.1 同期二相正弦高調波発生部

PLL による正弦高調波の発生方法としてはいくつかの構成が考えられるが、ここでは、動作の安定化・調整の簡単化の二面からつぎの手法を考案して用い

Fig. 3 Quadrature divider

Fig. 4 Block diagram of the synchronous quadrature sinusoidal harmonic generator

た。

まず周波数シンセサイザを一つ用意し、その VCO の出力に Fig. 3 のような回路を接続して、二相の方形波を発生する。つぎに、この方形波出力に、帰還路に PC をもたず、正弦波を発生する VCO を使用した第 2 の PLL を同期させることにより、二相の正弦高調波を得るものである (Fig. 4 参照)。

この二相高調波は、周波数だけでなく位相まで $f(t)$ に同期していること、すなわちどちらの PLL においても位相の入出力定常偏差がゼロであることが要求されるが、つぎにこのための条件を考える。

PLL における制御量と一般のフィードバック系の代表としてのサーボ系における制御量との対応関係は、PLL において位相角 (注 1) の時間積分が物理量として意味をもたないことから、これがサーボ系での位置に相当する基本的な制御量となり、位相角の時間微分量である周波数がサーボ系での位置の時間微分量である速度に相当すると考えられる。PLL の動作は定常状態では入力周波数一定であるが、上述の対応関係から、これはサーボ系では入力速度一定、すなわちランプ入力時の動作に等価である。ランプ入力時に位相角に対応する位置の定常入出力偏差がゼロであるためには、サーボ系が 2 形であることが条件になるが、同様に本装置の二つの PLL も 2 形系でなければならない。PLL の各構成要素の伝達関数は一般に Fig. 5 のように表されるから、二つの LPF に 1 形の伝達関数 $K_F(1+Ls)/s$ をもたせれば、 $\cos n\omega_0 t$, $\sin n\omega_0 t$ を入力信号 $f(t)$ に同期させることができる。

さて、この場合の PLL の特性方程式は、PC の分

(注 1) ここでの位相角とは、たとえば $\cos(\omega t + \phi)$ における $\omega t + \phi$ を指す。通常の意味での位相 ϕ とは異なる。

Photo. 2 Waveforms for accuracy test

Fig. 10 Error characteristics

スケールに対して 0.60%，標準偏差が同じく 0.24% であった。波形の例を Photo. 2 に、その分析誤差を Fig. 10 に示す。入力信号の振幅を小さくした場合も、相対誤差はほぼ上記の値を保っている。

4.2 分析可能周波数

PLL はサンプル値系であるため、(4)式において $\Omega \leq \omega_0/2$ でなければならず、周波数シンセサイザの整定時間の許容値によって ω_0 の下限が定まる。実用上の限界はほぼ 1 Hz と考えられる。これに対して上限は VCO と乗算器の周波数特性によって決まり、前記の素子を使用した試作装置では 50 kHz 程度である。なお分析精度は、この範囲で前述の値を維持できることが確かめられた。分析次数 n の制限はない。

5. 高速零位法の適用

5.1 高速零位法

先に筆者らは、高精度を特徴とする零位法でありながら偏位法とほとんど同等の応答性をもつ高速零位法

Fig. 11 Schematic of the high-speed null method

Fig. 12 Fourier analyzer using the high-speed null method

と呼ぶ原理を用いた位置計測装置を提案した⁷⁾(注3)。この原理は、零位法において、測定量に平衡させる既知量の収束点を偏位法で推定することにより、基本的に 1 サンプルで応答を整定させるものである。これは、視点を変えると、Fig. 11 のように現在の既知量の大きさを測定原点として偏位法で測定を行い、その結果を用いて既知量を修正し、1 回の測定でバランスさせる原理とみることができる。

2～4 章で述べたフーリエ分析器は、その演算方法から偏位法によるものといってよく、したがって Fig. 11 の構成によって高速零位法を適用することが考えられる。すなわち、たとえば a_n^* への測定原点の移動は $f(t) - a_n^* \cos n\omega_0 t$ の分析と等価であることにより、Fig. 12 の破線内に示した偏位法による構成に、 a_n^* の保持・修正を受持つ積分器と上記の演算を行う乗算器および減算器を追加すると、Fig. 12 のような構成が得られる。この構成は閉ループ系であるから、誤差の軽減と外乱に対する感度の低下が期待できる。

なお、図が複雑になるため Fig. 12 では省略したが、上記のフィードバックは乗算器のオフセットに対しては効力をもたないから、3.2 節で述べたドリフト補償ループはこの構成においても必要である。

Fig. 13 Analysis error by the the high-speed null method

Table 1 Accuracy improvement by the high-speed null method

Standard deviations of errors	
Deflection method (Fig.1)	0.24%
High-speed null method (Fig.12)	0.11%

(注3) 文献7)ではこの原理を高速零位処理法と称していたが、意味を拡張し適用範囲を広げるために、高速零位法と呼ぶことにする。文献8)はその応用の一例である。

実際の装置において高速零位法による構成を実現し、Photo. 2の波形を分析した場合の誤差を Fig. 13に示す。偏位法を用いた場合 (Fig. 10) に比較して、誤差がほぼ半分に減少することがわかる (Table 1 参照)。

5.2 バンドパス/ノッチ・フィルタとしての利用

Fig. 12は、 a_n , b_n のどちらか一方を分析する場合の構成であるが、Fig. 14のような構成をとると、これらを同時に分析することができる。ところでこの装置は、視点を変えて⑧、⑨点に着目すると、フィルタとして動作していることに注意したい。

まず、⑧点の電圧は $a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t$ であるから、振幅だけでなく位相まで④点に入力される信号の n 次成分に等しい。ここにはその他の成分はまったく現れないから、④→⑧間は $n\omega_0$ を中心周波数とするバンドパス・フィルタになる。④点および⑧点の波形の例を Photo. 3 に示す。

つぎに⑨点に注目すると、⑨点の電圧が④点の信号の n 次成分に等しく、また⑨=④-⑧であることにより、ここには n 次成分は現れない。したがって④→⑨間は、 $n\omega_0$ を中心周波数とするノッチ (バンドリジエクト) フィルタとして動作している。Photo. 4 は、

Fig. 14 Configuration for deriving both a_n and b_n

Photo. 3 Band-pass inputs and outputs

Photo. 4 Notch inputs and outputs

④点および⑨点の波形の例である。

このフィルタは、前述のように目的とする調波のみを抽出もしくは除去するものであるが、ここで、PLL およびタイミング回路に入力するクロックと調波関係のない一般の周波数に対する応答を考える。入力の実験は Fig. 8 に示したように $3T$ ごとであるため、周期が $3T$ の整数分の1でない信号に対しては、 $3T$ ごととの分析結果が異なることにより、出力が非定常になる (Photo. 5 参照) (調波関係にある周波数では、もちろんこの現象は見られない)。Fig. 15 実線および黒丸は、出力が変動する場合はその平均値をとって示した前記フィルタのバンドパス出力の周波数特性である (ノッチ出力の場合は、これの天地を逆にしたものになる)。計算機上でこのフィルタの動作をシミュレートして得られた結果と実測値 (中心周波数: 50 Hz, レベル: 飽和値) との差は、分析誤差が原因と考えられる。

このフィルタは、(2), (3) 式の積分区間を $[0, mT]$ ($m=2, 3, \dots$) とすると、構成をまったく変えずに、 m を大きくするだけでスカート特性をシャープにすることができる。 $m=10$ の場合が Fig. 15 の破線および白丸であるが、この場合は上述の出力の非定常現象は低レベル領域での問題となって実用上無視でき、通常のフィルタとして一般の信号への適用が可能になる。

Photo. 6 は、積分区間を $[0, T]$ として三角波のトーンバースト信号を印加した場合の、上記フィルタの応答の様子である。過渡応答は $3T$ でほぼ整定し、定常動作になることに注目したい。なお、積分時間が

Photo. 5 An unstationary output

Fig. 15 Frequency responses of the band-pass filter (amplitude characteristics)

Photo. 6 Toneburst responses of the band-pass/notch filter

mT の場合の整定時間は $(m+2)T$ となる。

上述のフィルタは、

- i) 入出力の信号間に位相のずれがまったくない
- ii) 目的の次数以外の調波成分はまったく出力されない、もしくはまったく減衰を受けない
- iii) そうした周波数特性の鋭さにもかかわらず応答性がよい
- iv) 中心周波数が ω_0 の変化に自動的に追従する
- v) 中心周波数を、目的の調波に簡単に設定できる
- vi) 複数個の、周波数特性が完全に同一のフィルタが得られる

という特徴をもっている。

5.3 高速歪率計

上記のフィルタにおいて $n=1$ とすると、⑨点には入力信号の基本波が、また⑩点には高調波がそれぞれ得られることから、これらの実効電圧の比をとると、その信号の全高調波歪率を求めることができる。この歪率計は、⑨、⑩点の応答が Photo. 6 に示すように高速であるため、同調操作にかなりの時間を要する従来の歪率計に比較して、きわめて短時間で結果が得られることを特徴としている。

二つ目の乗算器にも公称精度 1% のものを使用した試作装置における歪率の測定限界は、Photo. 7 に示す、線形回路でよく見られる 2 種のひずみ波 (50 Hz, レベル：飽和値) において、いずれも 1.2% であった。この値は、入力信号のレベルによらずほぼ一定である。

6. む す び

周波数シンセサイザによって被分析信号に同期した二相正弦高調波を発生し、これを用いてフーリエ係数

Photo. 7 Waveforms for distortion detectivity test

の定義式どおりにアナログ演算を行う、電圧信号用のフーリエ分析器について述べた。この分析器は、位相が正確に得られること、デジタル方式と比較して、サンプリングに基づく誤差がなく、完全に実時間で動作すること、および分析次数の変更がきわめて容易であることを特徴としている。装置は 35 個程度の IC によって構成され、1 Hz~50 kHz の周波数成分に対

してフル・スケールの $\pm 0.6\%$ の分析精度が実現されることが確かめられた。また、これに高速零位法と呼ぶ原理を適用することにより、誤差がほぼ半分に減少すること、バンドパス/ノッチ・フィルタとして応用することができ、1.2% までの歪率をきわめて短時間で測定できる歪率計に利用可能なことを確認した。なお上記の仕様値は、高性能部品を使用することにより、周波数範囲の上限を 1 MHz に、分析精度および歪率計における測定限界をいずれも 0.1% のオーダーに、それぞれ改善しようと考えられる。フィルタとしての本装置は、中心周波数が、たとえば電源周波数の変動に追従するとともに、その整数倍の周波数に電子的に正確に設定できることを特徴としており、電力関係の分野におけるフィルタリング処理などへの応用が期待される。実際例については別の機会に述べたい。

終りに、日ごろご指導いただく東京工業大学 長谷川健介教授、ならびに精度測定に際して協力された卒業生 米倉幹夫君にお礼申し上げる。

参 考 文 献

- 1) 山崎, 室谷: 高調波フィルタ, 昭和52年電気学会全国大会講演論文集, 222/225 (1977)
- 2) 磯部, 牧野: 音響の周波数分析器, 応用物理, 41-5, 515/520 (1972)
- 3) 藤村, 幹: 任意階段関数発生装置を用いた簡易形スペクトル分析器, 電子通信学会論文誌 D, 55-D-10, 660/667 (1972)
- 4) 田所, 樋口, 穴山: 実時間で動作する離散形フーリエ分析器とその応用, 計測自動制御学会論文集, 10-2, 58/63 (1974)
- 5) 田所, 樋口: ハイブリッド演算処理による簡易形実時間フーリエ分析器, 電子通信学会論文誌 C, 58-C-2, 96/97 (1975)
- 6) 吉岡, 青木: 簡易形実時間フーリエ分析器, 昭和51年度電子通信学会総合全国大会講演論文集 [分冊6], 6-5 (1976)
- 7) 中野, 小林: 高速零位処理法による位置計測, 計測自動制御学会論文集, 13-1, 87/92 (1977)
- 8) 小林, 中野: 高速零位法による f/V 変換器, 第16回 SICE 学術講演会予稿集, 647/648 (1977)
- 9) 特集 PLL の基礎と実際, 電子科学, 23-11, 13/40 (1973)