特異摂動形終端固定問題の準最適制御†

神 藤 久*・岩 住 哲 朗*

Suboptimal Control of a Singularly Perturbed Fixed-End-Point Problem

Hisashi KANDO* and Tetsuo IWAZUMI*

The application of singular perturbation theory to a fixed-end-point problem is shown in this paper. We deduce some sufficient conditions for the existence of the suboptimal solutions and give a systematic method for obtaining these asymptotic series solutions which are valid uniformly on the whole interval by using boundary layer methods. These conditions derived here are compared with those given by other authors. The design procedure given in this paper is applied to the fixed-end-point problem of a nuclear reactor system in order to demonstrate its effectiveness.

1. 緒 言

近年、特異摂動論を最適制御の分野に適用した例が数多く報告されている¹⁾。たとえば Kokotovic et al.²⁾ は、非線形の最適制御問題に特異摂動論を適用し、outer region での近似解を求める手法を提唱し、Sanuti et al.³⁾、Kokotovic and Yackel^{4), 5)} は最適レギュレータ問題の feedback gain の漸近級数解が存在するための十分条件を導出した。これらは、いずれも特異摂動論の有する種々のメリット（次数の低減化、時間スケールの分離など）を活用して最適制御の解析を行ったものであり、それぞれ興味のある結果を得ている。

本論文で取扱っている終端固定問題に関しては、すでに Wilde et al.⁶⁾、O'Malley et al.⁷⁾、Asatani⁸⁾ の論文がある。Wilde et al. は dichotomy transformation を用いて、準最適解の存在性の十分条件を導出し、O'Malley は最適レギュレータ問題で示した手法をある条件のもとに終端固定問題にも適用できることを示した。一方、Asatani は逆 Riccati 変換を用いて、

準最適 feedback gain を与えた。

本論文では、逆 Riccati 変換を用いて、準最適制御が存在するための十分条件を導出すると共に、boundary layer method⁹⁾ を用いて、経時間領域で十分な精度を有する漸近級数解を求める手法を与えている。さらに、本論文で導出した十分条件 [6]~[8] で示されている条件との関係を検討した。

2. 問題の記述

下式のような特異摂動形の終端固定問題を考える。

$$\frac{dx}{dt} = A_1(\varepsilon)x + A_2(\varepsilon)z + B_1(\varepsilon)u \quad (1. a)$$

$$\varepsilon \frac{dz}{dt} = A_3(\varepsilon)x + A_4(\varepsilon)z + B_2(\varepsilon)u \quad (1. b)$$

ここで x, z, u はそれぞれ n 次元, m 次元, r 次元ベクトルである。

評価関数は

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \left[(x', z') Q(\varepsilon) \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} + u' R(\varepsilon) u \right] dt \quad (2)$$

ここで

$$Q = \begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 \\ Q_2' & Q_3 \end{pmatrix}; (n+m) \times (n+m) \text{ 正半定値行列}$$

$$R; r \times r \text{ 正定値行列}$$

である。

境界条件は

$$x(t_0, \varepsilon) = x^0(\varepsilon), \quad z(t_0, \varepsilon) = z^0(\varepsilon) \quad (3. a)$$

$$x(t_f, \varepsilon) = x^f(\varepsilon), \quad z(t_f, \varepsilon) = z^f(\varepsilon) \quad (3. b)$$

ここで Hamiltonian を導入し、変分法を用いれば、下式のような特異摂動形準方程式を求めることができる。

$$\frac{dx}{dt} = A_1x + A_2z - S_1p_1 - S_2p_2 \quad (4. a)$$

$$\varepsilon \frac{dz}{dt} = A_3x + A_4z - S_1'p_1 - S_2'p_2 \quad (4. b)$$

$$\frac{dp_1}{dt} = -Q_1x - Q_2z - A_1'p_1 - A_3'p_2 \quad (4. c)$$

† 第 15 回計測自動制御学会学術講演会で発表 (昭 51・8)

* 名古屋工業大学工学部 名古屋市昭和区御器所町

* Faculty of Engineering, Nagoya Institute of Technology, Nagoya

(Received August 8, 1977)

$$\varepsilon \frac{dp_2}{dt} = -Q_2'x - Q_3z - A_2'p_1 - A_4'p_2 \quad (4. d)$$

ここで

$$S_1 = B_1R^{-1}B_1', \quad S_2 = B_2R^{-1}B_2', \quad S = B_1R^{-1}B_2'$$

上記のような特異振動形 2 点境界値問題を初期値問題に帰着させるため、次式のような逆 Riccati 変換¹⁰⁾を導入する。

$$\begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1(t, \varepsilon), \varepsilon K_2(t, \varepsilon) \\ K_2'(t, \varepsilon), K_3(t, \varepsilon) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_1(t, \varepsilon) \\ g_2(t, \varepsilon) \end{bmatrix} \quad (5)$$

(4), (5) 式より、以下に示すような Riccati 形微分方程式 (6. a) ~ (6. c) および補助方程式 (7. a) (7. b) が得られる。

$$\begin{aligned} dK_1/dt &= A_1K_1 + K_1A_1' + A_2K_2' + K_2A_2' \\ &\quad + K_1Q_1K_1 + K_2Q_2'K_1 \\ &\quad + K_1Q_2K_2' + K_2Q_3K_2' - S_1 \end{aligned} \quad (6. a)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{dK_2}{dt} &= K_2A_4' + K_2Q_3K_3 + K_1A_3' + K_1Q_2K_3 \\ &\quad + A_2K_3 + \varepsilon(A_1K_2 + K_2Q_2'K_2 \\ &\quad + K_1Q_1K_2) - S \end{aligned} \quad (6. b)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{dK_3}{dt} &= A_4K_3 + K_3A_4' + K_3Q_3K_3 \\ &\quad + \varepsilon(K_3Q_2'K_2 + K_2'Q_2K_3 + A_3K_2 \\ &\quad + K_2'A_3') + \varepsilon^2K_2K_1K_2 - S_2 \end{aligned} \quad (6. c)$$

$$\begin{aligned} dg_1/dt &= (A_1 + K_1Q_1 + K_2Q_2')g_1 \\ &\quad + (A_2 + K_1Q_2 + K_2Q_3)g_2 \end{aligned} \quad (7. a)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{dg_2}{dt} &= (A_3 + K_3Q_2' + \varepsilon K_2'Q_1)g_1 \\ &\quad + (A_4 + K_3Q_3 + \varepsilon K_2'Q_2)g_2 \end{aligned} \quad (7. b)$$

境界条件は、backward system に対しては

$$\begin{aligned} K(t_f, \varepsilon) &= \begin{bmatrix} K_1(t_f, \varepsilon), \varepsilon K_2(t_f, \varepsilon) \\ K_2'(t_f, \varepsilon), K_3(t_f, \varepsilon) \end{bmatrix} = 0, \\ g(t_f, \varepsilon) &= \begin{pmatrix} x^f(\varepsilon) \\ z^f(\varepsilon) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (8)$$

forward system に対しては

$$K(t_0, \varepsilon) = 0, \quad g(t_0, \varepsilon) = \begin{pmatrix} x^0(\varepsilon) \\ z^0(\varepsilon) \end{pmatrix} \quad (9)$$

したがって、backward system (forward system) に対しては条件 (8) (条件 (9)) のもとで、(6), (7) 式を時間を backward (forward) に解けば $K(t, \varepsilon)$, $g(t, \varepsilon)$ を得ることができる、以下、簡単のため backward system だけを取扱うことにする。

最適制御は次式のように与えられる。

$$u = -R^{-1}(B_1', B_2') \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= -R^{-1}(B_1', B_2') \begin{pmatrix} K_1, \varepsilon K_2 \\ K_2', K_3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x - g_1 \\ z - g_2 \end{pmatrix} \\ &; t \in [t_0, t_f] \end{aligned} \quad (10)$$

ここで特異振動論を用いて、(6), (7) 式の漸近級数解の存在条件を導出し、[6]~[8] で示された条件との比較、検討を行い、さらにそれらの漸近級数解を求める手法を以下に示そう。

3. 準最適解の存在条件

特異振動形初期値問題 (6), (7), (8) の解の収束条件は、Levin et al.¹¹⁾, Tihonov¹²⁾ の定理に従えばつぎのように与えられる。

(A-i) 退化系の解が $[t_0, t_f]$ で、unique に存在する。

(A-ii) 境界層方程式の解が、unique に存在し、退化系の解に漸近安定である。

(A-iii) fast mode の微分方程式における係数行列の $\varepsilon=0$ における Jacobian matrix の固有値は、 $[t_0, t_f]$ ですべて正の実数部をもつ。

3.1 退化系の解の存在条件

(6), (7) 式で $\varepsilon=0$ とすれば

$$\begin{aligned} dK_{10}/dt &= A_{10}K_{10} + K_{10}A_{10}' + A_{20}K_{20}' + K_{20}A_{20}' \\ &\quad + K_{10}Q_{10}K_{10} + K_{20}Q_{20}'K_{10} \\ &\quad + K_{10}Q_{20}K_{20}' + K_{20}Q_{30}K_{20}' - S_{10} \end{aligned} \quad (11. a)$$

$$\begin{aligned} 0 &= K_{20}A_{40}' + K_{20}Q_{30}K_{30} + K_{10}A_{30}' + K_{10}Q_{20}K_{30} \\ &\quad + A_{20}K_{30} - S_0 \end{aligned} \quad (11. b)$$

$$\begin{aligned} 0 &= A_{40}K_{30} + K_{30}A_{40}' + K_{30}Q_{30}K_{30} - S_{20} \\ &; K_{10}(t_f) = 0 \end{aligned} \quad (11. c)$$

$$\begin{aligned} dg_{10}/dt &= (A_{10} + K_{10}Q_{10} + K_{20}Q_{20}')g_{10} \\ &\quad + (A_{20} + K_{10}Q_{20} + K_{20}Q_{30})g_{20} \end{aligned} \quad (12. a)$$

$$\begin{aligned} 0 &= (A_{30} + K_{30}Q_{20}')g_{10} + (A_{40} + K_{30}Q_{30})g_{20} \\ &; g_{10}(t_f) = x_0^f \end{aligned} \quad (12. b)$$

ここで添字 0 は $\varepsilon=0$ における値を示す。

以下では (6), (7), (8) 式の解の収束条件を (A-i) ~ (A-iii) に対応して導出しよう。

最初に (11. c) 式の解の存在条件を考えよう。(11. c) 式は下記の output regulator system に関する代数 Riccati 方程式と一致している。

$$\frac{dz}{d\tau} = -A_{40}'z(\tau) - C_{20}'u(\tau) \quad (13. a)$$

$$y(\tau) = B_{20}'z(\tau) \quad (13. b)$$

$$J = \frac{1}{2} \int_0^\infty \{y'(\tau)R_0^{-1}y(\tau) + u'(\tau)u(\tau)\} d\tau \quad (13. c)$$

ただし $Q_{30} = C_{20}'C_{20}$

したがって(11. c)式が unique な解をもつためには、(13)式の output regulator system が unique な解をもてばよい。このためには(13)式が boundary layer controllable および boundary layer observable すなわち

$$(H-1) \quad \text{rank} [C_{20}', A_{40}'C_{20}', \dots, (A_{40}')^{m-1}C_{20}'] \\ = m$$

あるいは

$$\text{rank} [Q_{30}, A_{40}'Q_{30}, \dots, (A_{40}')^{m-1}Q_{30}] \\ = m$$

$$(H-2) \quad \text{rank} [B_{20}, A_{40}'B_{20}, \dots, (A_{40}')^{m-1}B_{20}] = m$$

であればよい。そのとき

$$\alpha(t) = -(A_{40}' + Q_{30}K_{30}); \text{ stable matrix} \quad (14)$$

である。つぎに(11. b)式より K_{20} を K_{10} で表せば、

$$K_{20} = K_{10} \cdot L_{10} + L_{20} \quad (15)$$

$$\text{ここで } L_{10} = (A_{30}' + Q_{20}K_{30}) \cdot \alpha^{-1}$$

$$L_{20} = (A_{20}K_{30} - S_0) \cdot \alpha^{-1}$$

(15)式を(11. a)式に代入し整理すれば、下式を得る。

$$dK_{10}/dt = \hat{A}K_{10} + K_{10}\hat{A}' + K_{10}\hat{Q}K_{10} - \hat{B}R_0^{-1}\hat{B}' \\ ; K_{10}(t_f) = 0 \quad (16)$$

同様に(12. a), (12. b)式より

$$dg_{10}/dt = (\hat{A} + K_{10}\hat{Q})g_{10}; g_{10}(t_f) = x_0^f \quad (17)$$

ここで

$$\hat{A} = (A_{10} + A_{20}L_{10}' + L_{20}Q_{20}' + L_{20}Q_{30}L_{10}') \\ (18. a)$$

$$\hat{Q} = (I, L_{10}) \begin{pmatrix} Q_{10} & Q_{20} \\ Q_{20}' & Q_{30} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ L_{10}' \end{pmatrix} \\ = \hat{C}' \cdot Q_0 \cdot \hat{C} \quad (18. b)$$

$$\hat{B} = B_{10} - L_{20}K_{30}^{-1}B_{20} \quad (18. c)$$

ここで(16), (17)式は、つぎの終端固定問題の Riccati 方程式と一致している。

$$dX_0/dt = \hat{A}X_0 + \hat{B}U_0; X_0(t_0) = x_0(0), \\ X_0(t_f) = x^f(0) \quad (19. a)$$

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} (X_0' \hat{Q} X_0 + U_0' R_0 U_0) dt \quad (19. b)$$

Bucy¹³⁾ は(19)式が unique な解をもつための条件として

- (i) R_0 ; 正定値行列
- (ii) $\hat{Q}$; 半正定値行列
- (iii) $\text{rank} [\hat{B}, \hat{A}\hat{B}, \dots, \hat{A}^{n-1}\hat{B}] = n$

を与えた。(i)は仮定から明らかに満足されている。また、(18. b)式から(ii)が成立することは明らかである。したがって(19)式すなわち(16), (17)式が unique な解をもつための条件は、

$$(H-3) \quad \text{rank} [\hat{B}, \hat{A}\hat{B}, \dots, \hat{A}^{n-1}\hat{B}] = n$$

以上より、条件(H-1)~(H-3)のもとで、(11), (12)

式は unique な解をもつことが保証できる。

3.2 境界層方程式の解の存在条件

ここでは(A-ii), (A-iii)に対する条件を導出しよう。まず、(6)式のような行列形微分方程式を Kronecker 積を用いてベクトル形の微分方程式に変形する。(6. b), (6. c)式に対するベクトル形微分方程式は

$$\varepsilon \frac{dk_2}{dt} = \{I \otimes (A_4 + K_3 Q_3)\} \cdot k_2 + f_1(k_1, k_3, t, \varepsilon) \\ (20. a)$$

$$\varepsilon \frac{dk_3}{dt} = (A_4 \otimes I) \cdot k_3 + (I \otimes A_4) \cdot k_3 + (K_3 Q_3) \cdot k_3 \\ + f_2(t, \varepsilon) \quad (20. b)$$

ここで $\otimes$ は Kronecker 積, k_1, k_2, k_3 は K_1, K_2, K_3 をベクトル表示したものである。

(20. a), (20. b)式における k_2, k_3 の Jacobian matrix J_{k_2}, J_{k_3} は、

$$J_{k_2} \Big|_{\varepsilon=0} = I \otimes (A_{40} + K_{30} Q_{30}); t \in [t_0, t_f] \\ (21. a)$$

$$J_{k_3} \Big|_{\varepsilon=0} = (A_{40} + K_{30} Q_{30}) \otimes I + I \otimes (A_{40} + K_{30} Q_{30}) \\ ; t \in [t_0, t_f] \quad (21. b)$$

同様に、(7. b)式の g_2 に関する Jacobian matrix は

$$J_{g_2} \Big|_{\varepsilon=0} = A_{40} + K_{30} Q_{30}; t \in [t_0, t_f] \quad (21. c)$$

ここで(14)式を考慮すれば、 $J_{k_2}, J_{k_3}, J_{g_2}$ の固有値はすべて正の実数部をもつことがわかる。したがって条件(H-1), (H-2)のもとで(A-iii)が成立する。また、 $t=t_f$ についての境界層方程式は stretching variable $\tau = (t - t_f)/\varepsilon$ を用いて、(6. b), (6. c), (7. b)式を変換し、 $\varepsilon=0$ とすれば次式のように得られる。

$$dK_{20}/d\tau = K_{20}(\tau)A_{40}' + K_{20}(\tau)Q_{30}K_{30}(\tau) \\ + A_{20}K_{30}(\tau) - S_0 \quad (22. a)$$

$$dK_{30}/d\tau = A_{40}K_{30}(\tau) + K_{30}(\tau)A_{40}' \\ + K_{30}(\tau)Q_{30}K_{30}(\tau) - S_{20} \quad (22. b)$$

$$dg_{20}/d\tau = (A_{30} + K_{30}(\tau)Q_{20}')g_{10}(t_f) \\ + (A_{40} + K_{30}(\tau)Q_{30})g_{20}(\tau) \quad (22. c)$$

境界層方程式(22. a)~(22. c)が条件(H-1), (H-2)のもとで漸近安定になること、すなわち(A-ii)が成立することは上と同様な手順により明らかである。

3.3 準最適解の存在条件

以上のことから以下の定理を得ることができる。

《定理 1》

(1)~(3)式までの終端固定問題において、 $A_i(\varepsilon)$, $B_i(\varepsilon)$, $Q(\varepsilon)$, $R(\varepsilon)$, $x^0(\varepsilon)$, $x^f(\varepsilon)$, $z^0(\varepsilon)$, $z^f(\varepsilon)$ は ε についてそれぞれ解析的であり、また、 $Q(\varepsilon)$ は半正定値行

列, $R(\varepsilon)$ は正定値行列と仮定する. またつぎの条件 (H-1) ~ (H-3) が満足されているものとする.

$$(H-1) \quad \text{rank} [Q_{30}, A_{40}' Q_{30}, \dots, (A_{40}')^{m-1} Q_{30}] = m$$

$$(H-2) \quad \text{rank} [B_{20}, A_{40} B_{20}, \dots, (A_{40})^{m-1} B_{20}] = m$$

$$(H-3) \quad \text{rank} [\hat{B}, \hat{A}\hat{B}, \dots, (\hat{A})^{n-1}\hat{B}] = n$$

そのとき十分小さな ε および $t \in [t_0, t_f]$ に対して, 次式が成立する.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} K_1(t, \varepsilon) = K_{10}(t); \quad t \in [t_0, t_f]$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} K_i(t, \varepsilon) = K_{i0}(t); \quad t \in [t_0, t_f], \quad i = 2, 3$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} g_1(t, \varepsilon) = g_{10}(t); \quad t \in [t_0, t_f]$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} g_2(t, \varepsilon) = g_{20}(t); \quad t \in [t_0, t_f]$$

ここで, 条件 (H-3) は $\hat{A}, \hat{B}$ の中に Riccati 方程式 (11. c) の解 K_{30} を含むので, 計算上好ましくない.

したがって, (H-3) をより簡単な等価な rank test の条件に置き換えることを考えよう.

今, [14] で示された変換を用いれば, (1) 式を下式のように slow mode および, fast mode に分離することができる.

$$\frac{d\xi}{dt} = (A - \varepsilon A_2 G) \xi + (B - \varepsilon (H L B_1 + M B_2)) u \quad (23. a)$$

$$\varepsilon \frac{d\eta}{dt} = (A_4 - \varepsilon L A_2) \eta + (B_2 + \varepsilon L B_1) u \quad (23. b)$$

$$\text{ここで } A = A_1 - A_2 A_4^{-1} A_3$$

$$B = B_1 - A_2 A_4^{-1} B_2$$

(23) 式で $\varepsilon = 0$ としたときの退化系および (2) 式を等価変換し, $\varepsilon = 0$ としたときの評価関数はそれぞれ

$$\text{rank} [B_0, A_0 B_0, \dots, A_0^{n-1} B_0]$$

$$= \text{rank} \begin{bmatrix} I & R^{-1} C_0' B_0 & R^{-1} C_0' A_0 B_0 & \dots & R^{-1} C_0' A_0^{n-2} B_0 \\ 0 & I & R^{-1} C_0' B_0 & & \\ \vdots & 0 & I & \ddots & \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & R^{-1} C_0' B_0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & I \end{bmatrix}$$

$$= \text{rank} [B_0, A_0 B_0, \dots, A_0^{n-1} B_0]$$

(28)

このことは, (24), (25) 式の両システムにおいて, 状態フィードバックのもとでは可制御性が保持されることから明らかである. したがって, (H-3) の条件を下記の条件で置き換えることができる.

$$(H-3)' \quad \text{rank} [B_0, A_0 B_0, \dots, A_0^{n-1} B_0] = n$$

以上のことからつぎの定理を得ることができる.

《定理 2》

(1) ~ (3) 式の終端固定問題において, 条件 (A-1)

次式のようになる.

$$\begin{aligned} d\xi_0/dt &= A_0 \xi_0 + B_0 u_0; \quad \xi_0(t_0) = x^0(0), \\ \xi_0(t_f) &= x^f(0) \end{aligned} \quad (24. a)$$

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \{ \xi_0' q_1 \xi_0 - 2u_0' B_{20}' A_{40}'^{-1} q_2' \xi_0 \\ &\quad + u_0' R u_0 \} dt \end{aligned} \quad (24. b)$$

$$\begin{aligned} \text{ここで } q_1 &= Q_{10} - A_{30}' A_{40}'^{-1} Q_{20}' - Q_{20} A_{40}^{-1} A_{30} \\ &\quad + A_{30}' A_{40}'^{-1} Q_{30} A_{40}^{-1} A_{30} \\ q_2 &= Q_{20} - A_{30}' A_{40}'^{-1} Q_{30} \\ R &= R_0 + B_{20}' A_{40}'^{-1} Q_{30} A_{40}^{-1} B_{20} \end{aligned}$$

$$(24) \text{ 式で } v_0 = u_0 - R^{-1} B_{20}' A_{40}'^{-1} q_2' \xi_0$$

なる変換を行えば, 次式が得られる.

$$\begin{aligned} d\xi_0/dt &= A_0 \xi_0 + B_0 \cdot v_0; \quad \xi_0(t_0) = x^0(0), \\ \xi_0(t_f) &= x^f(0) \end{aligned} \quad (25. a)$$

$$J_0 = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \{ \xi_0' Q \xi_0 + v_0' R v_0 \} dt \quad (25. b)$$

$$\text{ここで } A = A_0 + B_0 R^{-1} C_0'$$

$$C_0 = q_2 A_{40}^{-1} B_{20}$$

$$Q = q_1 - C_0 R^{-1} C_0'$$

ここで (19) 式および (25) 式において, 条件 (H-1) ~ (H-3) および (H-4) A_{40} は, 正則行列のもとで

$$\hat{A} = A, \quad \hat{Q} = Q \quad (26)$$

$$\hat{B} R_0^{-1} \hat{B}' = B_0 R^{-1} B_0'$$

が成立することを容易に示することができる (付録 I 参照).

このことから, 以下の関係式が式立する.

$$\begin{aligned} \text{rank} [\hat{B}, \hat{A}\hat{B}, \dots, \hat{A}^{n-1}\hat{B}] \\ = \text{rank} [B_0, A_0 B_0, \dots, A_0^{n-1} B_0] \end{aligned} \quad (27)$$

一方, (24), (25) 式のシステムでは

(1) ~ (A-4) が満足されているものとする.

$$(A-1) \quad \text{rank} [Q_{30}, A_{40}' Q_{30}, \dots, (A_{40}')^{m-1} Q_{30}] = m$$

$$(A-2) \quad \text{rank} [B_{20}, A_{40} B_{20}, \dots, A_{40}^{m-1} B_{20}] = m$$

$$(A-3) \quad \text{rank} [B_0, A_0 B_0, \dots, (A_0)^{n-1} B_0] = n$$

$$(A-4) \quad A_{40} \text{ は正則}$$

そのとき十分小さな ε および $t \in [t_0, t_f]$ に対して

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} K_1(t, \varepsilon) = K_{10}(t); \quad t \in [t_0, t_f]$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} K_i(t, \varepsilon) = K_{i0}(t); t \in [t_0, t_f], \quad i=2, 3$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} g_1(t, \varepsilon) = g_{10}(t); t \in [t_0, t_f]$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} g_2(t, \varepsilon) = g_{20}(t); t \in [t_0, t_f]$$

〔考察〕

(1) (A-1)の条件は、 Q : 正定値行列と仮定したときは自明の条件となり不要である。

(2) (A-4)の条件は、定理1では本来不要であるが、(H-3)を(A-3)で置き換えるために必要である。

(3) full system (1)~(3)の解の存在条件は[13]により

(i) $Q(\varepsilon)$: 半正定値行列

(ii) $R(\varepsilon)$: 正定値行列

(iii) (1)が完全可制御

(iii)の条件は[14]により、(23)式のシステムの可制御性 (slow mode および fast mode の可制御性) と等価であることが示されている。このことから、(A-2)~(A-4)はまた full system の解の存在を保証していることになる。

(4) O'Malley⁷⁾は終端固定問題の準最適解の存在条件として、下記の(C-1)~(C-5)を導出した。

(C-1) $A_{40}(t)$: 正則行列

(C-2) $Q(t)$: 半正定値行列

(C-3) (25)式が可制御

$$(C-4) \quad G(t) = \begin{bmatrix} A_{40}(t), & -B_{20}(t)R_0^{-1}(t)B_{20}'(t) \\ -Q_{30}(t), & -A_{40}'(t) \end{bmatrix}$$

の固有値の実数部分はすべて nonzero

(C-5) $\det P_{11}(t_0) \neq 0$ および $\det P_{12}(t_f) \neq 0$ を満足する下記のような変換行列 P が存在する。

$$P^{-1}(t)G(t)P(t) = \begin{bmatrix} \Lambda(t) & 0 \\ 0 & -\Lambda(t) \end{bmatrix}$$

ここで $\Lambda(t)$ の固有値の実数部分はすべて正

しかし(26)式から $Q = \hat{Q}$ が成立し、 $\hat{Q}$ は半正定値行列であるので(C-2)の条件は不要と考えられる。また、[15]により time-invariant system の場合には、(C-4)、(C-5)の条件は(A-1)、(A-2)の条件と等価になることが示される。したがって、ここで与えた定理2の条件は、time invariant system では(C-1)~(C-5)と等価であることがいえる。

(5) Wilde et al.⁶⁾は, dichotomy transformation を用いて (A-1)、(A-2) の条件を導出した。しかし slow mode の可制御性を保証する条件(A-3)が与えられていないことは興味深い。

(6) Asatani⁷⁾は、(A-1) および A_{40} : 安定行列の条件のみを与えている。本論文では、さらに(A-2)、

(A-3)の条件が付加されねばならないことを示し、また A_{40} に対する制約がゆるめられている。

(7) open-loop approach⁷⁾では、 A_{40} の固有値が正の実数部をもつようなシステムに対しては、境界層で準最適軌道が発散することがある⁶⁾のに対して、本論文における feedback approach では、常に安定な準最適軌道を得ることができる(付録II参照)。すなわち feedback approach では、(1)~(3)の終端固定問題は常に well-posed である。

(8) 定理2の条件(A-1)~(A-4)を

$$(A-1)' \quad \text{rank} [Q_{30}(t), A_{40}'(t)Q_{30}(t), \dots, (A_{40}'(t))^{m-1}Q_{30}(t)] = m$$

$$(A-2)' \quad \text{rank} [B_{20}(t), A_{40}(t)B_{20}(t), \dots, (A_{40}(t))^{m-1}B_{20}(t)] = m$$

$$(A-3)' \quad \text{rank} [P_0(t), P_1(t), \dots, P_n(t)] = n$$

$$\text{ここで} \quad \begin{cases} P_0(t) = B_0(t) \\ \vdots \\ P_{k+1}(t) = A_0(t)P_k(t) - \dot{P}_k(t) \end{cases}$$

(A-4)' $A_{40}(t)$: 正則

とすれば time varying system に対する定理を得ることができる。これらの条件は[16]を用いれば容易に導出することができる。

4. 準最適制御の計算手法

条件(A-1)~(A-4)のもとで boundary layer method¹⁰⁾を適用すれば、全時間領域で意味をもつ feedback gain の漸近級数解を導出することができる。今、(6)、(7)式の解 $K_i(t, \varepsilon)$, $g_i(t, \varepsilon)$ を outer solution および t_f 近傍における boundary layer solution の和として下式のように表そう。

$$K_i(t, \varepsilon) = H_i(t, \varepsilon) + P_i(\tau, \varepsilon); \quad i=1, 2, 3 \quad (29. a)$$

$$g_i(t, \varepsilon) = h_i(t, \varepsilon) + l_i(\tau, \varepsilon); \quad i=1, 2 \quad (29. b)$$

ここで

$$\tau = (t - t_f)/\varepsilon$$

$$H_i(t, \varepsilon) \sim \sum_{j=0}^{\infty} H_{ij}(t)\varepsilon^j, \quad h_i(t, \varepsilon) \sim \sum_{j=0}^{\infty} h_{ij}(t)\varepsilon^j$$

$$P_i(\tau, \varepsilon) \sim \sum_{j=0}^{\infty} P_{ij}(\tau)\varepsilon^j, \quad l_i(\tau, \varepsilon) \sim \sum_{j=0}^{\infty} l_{ij}(\tau)\varepsilon^j$$

(29)式および(6)、(7)式より、outer solution および boundary layer correction の満足すべき full system を導出し、これより ε に関する漸近級数展開の第 j 項 $[H_{ij}(t), h_{ij}(t)], [P_{ij}(\tau), l_{ij}(\tau)]$ の満足すべき方程式を導出すると以下ようになる。

$$\begin{aligned} dH_{1j}/dt &= (A_{10} + H_{10}Q_{10} + H_{20}Q_{20}')H_{1j} \\ &\quad + H_{1j}(A_{10}' + Q_{10}H_{10} + Q_{20}H_{20}') \\ &\quad + (A_{20} + H_{10}Q_{20} + H_{20}Q_{30}')H_{2j}' \\ &\quad + H_{2j}(A_{20}' + Q_{20}'H_{10} + Q_{30}H_{20}') \end{aligned}$$

$$+\alpha_{j-1}(t) \quad (30. a)$$

$$O=H_{2j}(A_{40}'+Q_{30}H_{30})+H_{1j}(A_{30}'+Q_{20}H_{30})$$

$$+(H_{20}Q_{30}+H_{10}Q_{20}+A_{20})H_{3j}+\beta_{j-1}(t)$$

$$O=(A_{40}+H_{30}Q_{30})H_{3j}+H_{3j}(A_{40}'+Q_{30}H_{30})$$

$$+\gamma_{j-1}(t) \quad (30. c)$$

$$dP_{1j}/d\tau=A_{j-1}(\tau) \quad (31. a)$$

$$dP_{2j}/d\tau=P_{2j}(A_{40}'+Q_{30}P_{30}+Q_{30}H_{30})$$

$$+(P_{20}Q_{30}+P_{10}Q_{20}+A_{20}+H_{20}Q_{30})$$

$$+H_{10}Q_{20})P_{3j}$$

$$+P_{1j}(A_{30}'+Q_{20}P_{30}+Q_{20}H_{30})$$

$$+H_{1j}Q_{20}P_{30}+H_{2j}Q_{30}P_{30}$$

$$+P_{20}Q_{30}H_{3j}+B_{j-1}(\tau) \quad (31. b)$$

$$dP_{3j}/d\tau=P_{3j}(A_{40}'+Q_{30}P_{30}+Q_{30}H_{30})$$

$$+(A_{40}+P_{30}Q_{30}+H_{30}Q_{30})P_{3j}$$

$$+H_{3j}Q_{30}P_{30}+P_{30}Q_{30}H_{3j}+C_{j-1}(\tau)$$

$$(31. c)$$

$$dh_{1j}/dt=(A_{10}+H_{10}Q_{10}+H_{20}Q_{20}')h_{1j}$$

$$+(A_{20}+H_{10}Q_{20}+H_{20}Q_{30})h_{2j}$$

$$+H_{1j}(Q_{10}h_{10}+Q_{20}h_{20})$$

$$+H_{2j}(Q_{20}'h_{10}+Q_{30}h_{20})+\xi_{j-1}(t)$$

$$(32. a)$$

$$O=(A_{30}+H_{30}Q_{20}')h_{1j}+(A_{40}+H_{30}Q_{30})h_{2j}$$

$$+H_{3j}(Q_{20}'h_{10}+Q_{30}h_{20})+\eta_{j-1}(t) \quad (32. b)$$

$$dl_{1j}/d\tau=f_{j-1}(\tau) \quad (33. a)$$

$$dl_{2j}/d\tau=(A_{30}+H_{30}Q_{20}'+P_{30}Q_{20}')l_{1j}$$

$$+(A_{40}+H_{30}Q_{30}+P_{30}Q_{30})l_{2j}$$

$$+P_{30}Q_{20}'h_{1j}+P_{30}Q_{30}h_{2j}$$

$$+P_{3j}\{Q_{20}'(h_{10}+l_{10})+Q_{30}(h_{20}+l_{20})\}$$

$$+H_{3j}\{Q_{20}'l_{10}+Q_{30}l_{20}\}+g_{j-1}(\tau)$$

$$(33. b)$$

ここで $\alpha_{j-1}, \beta_{j-1}, \gamma_{j-1}, A_{j-1}, B_{j-1}, C_{j-1}, \xi_{j-1}, \eta_{j-1}, f_{j-1}, g_{j-1}$ は第 $(j-1)$ 項までの係数よりなる関数である。

境界条件は (29. a), (29. b) 式および (8) より

$$H_{ij}(t_f)+P_{ij}(0)=0; i=1, 2, 3 \quad (34. a)$$

$$h_{1j}(t_f)+l_{1j}(0)=x_j^f \quad (34. b)$$

$$h_{2j}(t_f)+l_{2j}(0)=z_j^f \quad (34. c)$$

(30), (31) 式を条件 (34. a) のもとで以下の手順に従って解けば、漸近級数解を得ることができる。

(i) (31. a) 式より

$$P_{1j}(\tau)=\int_{-\infty}^{\tau} A_{j-1}(s)ds \quad (35)$$

(ii) (34. a) 式より

$$H_{1j}(t_f)=-P_{1j}(0)=-\int_{-\infty}^0 A_{j-1}(s)ds \quad (36)$$

(iii) 境界条件 (36) のもとで (30. a) ~ (30. c) 式を解いて $H_{1j}(t), H_{2j}(t), H_{3j}(t)$ を求める。

(iv) (34. a) 式より

$$P_{2j}(0)=-H_{2j}(t_f), P_{3j}(0)=-H_{3j}(t_f) \quad (37)$$

(v) 境界条件 (37) のもとで, (31. b), (31. c) 式を解いて $P_{2j}(\tau), P_{3j}(\tau)$ を求める。

上記の手順 (i) ~ (v) に従い, (32), (33) 式を (34. b), (34. c) 式のもとで解けば, $h_{ij}(t), l_{ij}(\tau)$ も同様にそれぞれ求めることができる。以上のことからつぎの定理が得られる。

《定理 3》

条件 (A-1) ~ (A-4) が満足されているものとする。

そのとき十分小さな ε および $t \in [t_0, t_f]$ に対して

$$K_i(t, \varepsilon)=\sum_{j=0}^m H_{ij}(t)\varepsilon^j+\sum_{j=0}^m P_{ij}(\tau)\varepsilon^j$$

$$+\varepsilon^{m+1}R_i(t, \varepsilon); i=1, 2, 3 \quad (38. a)$$

$$g_i(t, \varepsilon)=\sum_{j=0}^m h_{ij}(t)\varepsilon^j+\sum_{j=0}^m l_{ij}(\tau)\varepsilon^j+\varepsilon^{m+1}S_i(t, \varepsilon)$$

$$; i=1, 2 \quad (38. b)$$

Fig. 1 Feedback gain ($q_1=10, q_2=0, q_3=1, r=5 \times 10^4, t_f=10$ sec)

Fig. 2 Optimal and suboptimal trajectories of neutron density and precursor concentration ($q_1=10, q_2=0, q_3=1, r=5 \times 10^4, t_f=10$ sec)

が成立する。ただし、 $R_i(t, \varepsilon)$, $S_i(t, \varepsilon)$ は $[t_0, t_f]$ で一様に有界である。

上記の定理は O'Malley^{17), 18)} と同様な手法で容易に証明することができる。

5. 数 値 例

例として、下記のような原子炉における出力変更問題を考える。いま、遅発中性子一群近似の一点炉動特性方程式を目標値 (n_d, c_d) 近傍で線形規格化すれば、特異摂動形の次式が得られる。

$$dx/dt = -a_1x + a_1z \quad (39. a)$$

$$\varepsilon \frac{dz}{dt} = a_2x - a_2z + b_2u \quad (39. b)$$

ただし $x = \delta c / c_d$, $a_1 = \lambda$

$z = \delta n / n_d$, $a_2 = \varepsilon \beta / l$

$u = \delta k$, $b_2 = \varepsilon / l$

ここで n は中性子密度, c は遅発中性子先行核密度, δk は反応度, λ は先行核崩壊定数, β は先行核生成割合, l は中性子寿命である。

評価関数として次式を考えよう。

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \left\{ (x', z') \begin{pmatrix} q_1 & q_2 \\ q_2 & q_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} + r u^2 \right\} dt \quad (40)$$

いま、定常運転している炉を (40) 式のもとで目標出力に整定する問題を考えると終端固定問題となり、境界条件は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} x(t_0, \varepsilon) &= x^0, & x(t_f, \varepsilon) &= 0 \\ z(t_0, \varepsilon) &= z^0, & z(t_f, \varepsilon) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

ここで定理 2 の条件 (A-1) ~ (A-4) は, $q_3 \neq 0$ とすればすべて満足されている。したがって、4 節で示した計算手法に従って各 feedback gain の漸近級数解を求めることができる。Fig. 1 および Fig. 2 に、それぞれ feedback gain k_1, k_2, k_3 および軌道 x, z の計算結果を示す。これらの図から、全時間区間にわたり本手法を適用した場合の $0(\varepsilon)$ -近似解が、満足すべき結果を与えていることがわかる。なお計算に使用したデータは以下のとおりである。

$$\beta = 0.0064, \quad a_1 = 0.078, \quad x^0 = -0.1$$

$$l = 5 \times 10^{-3}, \quad a_2 = 0.128, \quad z^0 = -0.1$$

$$\lambda = 0.078, \quad b_2 = 20, \quad t_f = 10 \text{ sec}$$

$$\varepsilon = 0.1, \quad q_1 = 10, \quad q_2 = 0, \quad q_3 = 1, \quad r = 5 \times 10^4$$

6. 結 言

本論文では、特異摂動形終端固定問題を feedback approach により解析し、準最適解が存在するための条件を導出し、さらに全時間領域で高い精度を有する漸近級数解を求める計算手法を示した。導出された条件は、簡単な rank test だけからなり、open-loop ap-

proach の条件⁷⁾に比べ、より検証の容易な形で求められている。

また二つの approach により導出された条件が、本来等価なものであり、full system の slow mode および fast mode の可制御性を保証する条件でもあることが確かめられた。さらに open-loop approach では、 A_{40} の固有値が正の実数部分をもつような system については準最適軌道が不安定になることがある⁶⁾のに対して、feedback approach では常に well-posed であることが示された。また、本手法を原子炉システムの出力変更問題に適用し、求めた $0(\varepsilon)$ -近似解が全時間領域にわたって満足しうる精度を与えていることを示した。

参 考 文 献

- 1) P. V. Kokotovic, et al.: Singular Perturbation and Order Reduction in Control Theory—an Overview, Automatica, **12**, 123/132 (1976)
- 2) P. V. Kokotovic and P. Sannuti: Singular Perturbation Method for Reducing the Model Orders in Optimal Control Design, IEEE Trans. on AC, **AC-13**, 377/384 (1968)
- 3) P. Sannuti, et al.: Near Optimum Design of Linear Systems by a Singular Perturbation Method, IEEE Trans. on AC, **AC-14**, 15/22 (1969)
- 4) P. V. Kokotovic and R. A. Yackel: Singular Perturbation of Linear Regulators, Basic Theorems, IEEE Trans. on AC, **AC-17**, 29/37 (1972)
- 5) R. A. Yackel and P. V. Kokotovic: A Boundary Layer Method for the Matrix Riccati Equation, IEEE Trans. on AC, **AC-18**, 17/24 (1973)
- 6) R. R. Wilde, et al.: Optimal Open- and Closed-Loop Control of Singularly Perturbed Linear Systems, IEEE Trans. on AC, **AC-18**, 616/625 (1973)
- 7) R. E. O'Malley, Jr. and C. F. Kung: The Singularly Perturbed Linear State Regulator Problem, II, SIAM J. Control, **13**, 572/592 (1975)
- 8) K. Asatani: Sub-Optimal Control of Fixed-End-Point Minimum Energy Problem via Singular Perturbation, J. Math. Anal. Appl., **45**, 684/697 (1974)
- 9) R. E. O'Malley, Jr.: Boundary Layer Methods for Nonlinear Initial Value Problems, SIAM Rev., **13**, 425/434 (1971)
- 10) I. H. Mufti, C. K. Chow and F. T. Stock: Solution of Ill-Conditioned Linear Two-Point Boundary Value Problem by the Riccati Transformation, SIAM Rev., **11**, 616/619 (1969)
- 11) J. J. Levin and N. Levinson: Singular Perturbation of Non-Linear Systems of Differential Equations and an Associated Boundary Layer Equation, J. Rat. Mech. Anal., **3**, 247/270 (1954)
- 12) A. N. Tihonov: Systems of Differential Equations Containing a Small Parameter Multiplying the Derivative, Mat. Sb., **31**, 575/586 (1952)
- 13) R. S. Bucy: Two-Point Boundary Value Problems of Linear Hamiltonian Systems, SIAM J. Appl. Math., **15**, 1385/1389 (1967)
- 14) P. V. Kokotovic, et al.: Controllability and Time-Optimal Control of Systems with Slow and Fast Modes, IEEE Trans. on AC, **AC-20**, 111/113 (1975)

- 15) J. J. O'Donnell: Asymptotic Solution of the Matrix Riccati Equation of Optimal Control, Fourth Allerton Conf. on Circuit and System Theory, Univ. of Illinois, 577/586 (1966)
- 16) N. Viswanadham, et al.: On Invariance of Degree of Controllability Under State Feedback, IEEE Trans. on AC, **AC-20**, 271/273 (1975)
- 17) R. E. O'Malley, Jr.: Introduction to Singular Perturbation, Academic Press, New York (1974)
- 18) R. E. O'Malley, Jr.: On Initial Value Problems for Nonlinear Systems of Differential Equation with Two Small Parameters, Arch. Rat. Mech. Anal., **40**, 209/222 (1971)

《付 録》

〈付録Ⅰ〉 (19)式および(25)式において, 条件(H-1) ~ (H-4)のもとで

$$\hat{A} = A, \quad \hat{Q} = Q, \quad \hat{B}R_0^{-1}\hat{B}' = B_0R^{-1}B_0' \quad (26)$$

が成立することを証明する。

(証明)

$$\begin{aligned} R &= R_0 + B_{20}'A_{40}'^{-1}Q_{30}A_{40}^{-1}B_{20} = R_0 + B_{20}'A_{40}'^{-1} \\ &\quad \cdot K_{30}^{-1}\{-A_{40}K_{30} - K_{30}A_{40}' + S_{20}\}K_{30}^{-1}A_{40}'B_{20} \\ &= (I - B_{20}'A_{40}'^{-1}K_{30}^{-1}B_{20}R_0^{-1})R_0(I - R_0^{-1}B_{20}' \\ &\quad \cdot K_{30}^{-1}A_{40}^{-1}B_{20}) = F'R_0F \end{aligned}$$

$$\text{ここで } F = I - R_0^{-1}B_{20}'K_{30}^{-1}A_{40}^{-1}B_{20}$$

$$\begin{aligned} \hat{B}F &= [B_{10} - (A_{20}K_{30} - S_0)\alpha^{-1}K_{30}^{-1}B_{20}] \\ &\quad \cdot (I - R_0^{-1}B_{20}'K_{30}^{-1}A_{40}^{-1}B_{20}) \\ &= B_{10} - A_{20}K_{30}\alpha^{-1}K_{30}^{-1}(I - S_{20}K_{30}^{-1}A_{40}^{-1})B_{20} \end{aligned}$$

(11. c)より

$$\begin{aligned} \alpha^{-1}K_{30}^{-1}(I - S_{20}K_{30}^{-1}A_{40}^{-1}) &= K_{30}^{-1}A_{40}^{-1} \\ &= B_{10} - A_{20}A_{40}^{-1}B_{20} = B_0 \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} \hat{B}R_0^{-1}\hat{B}' &= (\hat{B}F)(F^{-1}R_0^{-1}F'^{-1})(F'\hat{B}') = B_0R^{-1}B_0' \\ \hat{Q} &= Q_{10} + (A_{30}' + Q_{20}K_{30})\alpha^{-1}Q_{20}' + Q_{20}\alpha'^{-1}(A_{30} + \\ &\quad K_{30}Q_{20}') + (A_{30}' + Q_{20}K_{30})\alpha^{-1}Q_{30}\alpha'^{-1}(A_{30} + \\ &\quad K_{30}Q_{20}') \\ &= Q_{10} + A_{30}'\alpha^{-1}(I + Q_{30}\alpha'^{-1}K_{30})Q_{20}' + Q_{20}(I + \\ &\quad K_{30}\alpha^{-1}Q_{30})\alpha'^{-1}A_{30} + Q_{20}(K_{30}\alpha^{-1} + \alpha'^{-1}K_{30} \\ &\quad + K_{30}\alpha^{-1}Q_{30}\alpha'^{-1}K_{30})Q_{20}' + A_{30}'\alpha^{-1}Q_{30}\alpha'^{-1}A_{30} \\ &= Q_{10} - A_{30}'A_{40}'^{-1}Q_{20}' - Q_{20}A_{40}^{-1}A_{30} + A_{30}'A_{40}'^{-1} \\ &\quad Q_{30}A_{40}^{-1}A_{30} - (Q_{20} - A_{30}'A_{40}'^{-1}Q_{30})K_{30}\alpha^{-1} \\ &\quad \cdot K_{30}^{-1}S_{20}K_{30}^{-1}\alpha'^{-1}K_{30}(Q_{20}' - Q_{30}A_{40}^{-1}A_{30}) \\ &= Q_{10} - A_{30}'A_{40}'^{-1}Q_{20}' - Q_{20}A_{40}^{-1}A_{30} + A_{30}'A_{40}'^{-1} \\ &\quad \cdot Q_{30}A_{40}^{-1}A_{30} - (Q_{20}' - Q_{30}A_{40}^{-1}A_{30})A_{40}^{-1} \\ &\quad \cdot B_{20}F^{-1}R_0^{-1}F'^{-1}B_{20}'A_{40}'^{-1}(Q_{20} - A_{30}'A_{40}'^{-1} \\ &\quad \cdot Q_{30}) = Q \\ \hat{A} &= A_{10} + A_{20}\alpha'^{-1}(A_{30} + K_{30}Q_{20}') + (A_{20}K_{30} - S_0') \\ &\quad \cdot \alpha^{-1}Q_{20}' + (A_{20}K_{30} - S_0')\alpha^{-1}Q_{30}\alpha'^{-1}(A_{30} \\ &\quad + K_{30}Q_{20}') \\ &= A_{10} + A_{20}\alpha'^{-1}A_{30} + A_{20}\alpha'^{-1}K_{30}Q_{20}' + (A_{20}K_{30} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &- S_0')\alpha^{-1}Q_{20}' + (A_{20}K_{30} - S_0')\alpha^{-1}Q_{30}\alpha'^{-1}A_{30} \\ &+ (A_{20}K_{30} - S_0')\alpha^{-1}Q_{30}\alpha'^{-1}K_{30}Q_{20}' \\ &= (A_{10} - A_{20}A_{40}^{-1}A_{30}) + [B_{10} - (A_{20}K_{30} - S_0')\alpha^{-1} \\ &\quad \cdot K_{30}^{-1}B_{20}]R_0^{-1}F'^{-1}B_{20}'A_{40}'^{-1}(Q_{20}' \\ &\quad - Q_{30}A_{40}^{-1}A_{30}) \\ &= A_0 + B_0R^{-1}B_{20}'A_{40}'^{-1}(Q_{20}' - Q_{30}A_{40}^{-1}A_{30}) = A \end{aligned}$$

(Q. E. D.)

〈付録Ⅱ〉 ここでは準最適軌道の安定性について検討する。最適軌道は, (1), (10)式より

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ \varepsilon z \end{pmatrix} &= \left[\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} S_1 & S \\ S' & S_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_1 & \varepsilon K_2 \\ K_2' & K_3 \end{pmatrix}^{-1} \right] \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} S_1 & S \\ S' & S_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_1 & \varepsilon K_2 \\ K_2' & K_3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \quad (A. 1) \end{aligned}$$

ここで $K_i(t, \varepsilon) = K_{i0}(t) + O(\varepsilon); i=1, 2, 3$

$$g_i(t, \varepsilon) = g_{i0}(t) + O(\varepsilon); i=1, 2$$

また

$$\begin{pmatrix} K_1 & \varepsilon K_2 \\ K_2' & K_3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} K_{10}^{-1} & O \\ -K_{30}^{-1}K_{20}'K_{10}^{-1}, & K_{30}^{-1} \end{pmatrix} + O(\varepsilon) \quad (A. 2)$$

したがって, $O(\varepsilon)$ -近似的準最適制御に対する準最適軌道は, 下式の初期値問題を解いて得ることができる。

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= (A_1 - S_1K_{10}^{-1} + SK_{30}^{-1}K_{20}'K_{10}^{-1})x \\ &+ (A_2 - SK_{30}^{-1})z + (S_1K_{10}^{-1} - SK_{30}^{-1}K_{20}'K_{10}^{-1}) \\ &g_1 + SK_{30}^{-1}g_2 \quad (A. 3a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{dz}{dt} &= (A_3 - S'K_{10}^{-1} + S_2K_{30}^{-1}K_{20}'K_{10}^{-1})x \\ &+ (A_4 - S_2K_{30}^{-1})z + (S'K_{10}^{-1} - S_2K_{30}^{-1}K_{20}' \\ &K_{10}^{-1})g_1 + S_2K_{30}^{-1}g_2 \quad (A. 3b) \\ &; x(t_0, \varepsilon) = x^0(\varepsilon), \quad z(t_0, \varepsilon) = z^0(\varepsilon) \end{aligned}$$

(A. 3b)式の z に対する Jacobian matrix を導出し, (11. c)式を用いて変形すれば

$$\begin{aligned} J_z \Big|_{\varepsilon=0} &= (A_{40} - S_{20}K_{30}^{-1}) \\ &= -K_{30}(A_{40}' + Q_{30}K_{30})K_{30}^{-1} \quad (A. 4) \end{aligned}$$

ここで(14)式を考慮すれば, $J_z|_{\varepsilon=0}$ の固有値の実数部分はすべて負であることがわかる。つまり, (A. 3)式は常に well-posed である。しかし open-loop control の場合には(1)式より

$$J_z \Big|_{\varepsilon=0} = A_{40} \quad (A. 5)$$

となり, A_{40} の固有値が負(k 個)および正($(n-k)$ 個)の実数部分を有するような場合には, $z^0(0) - Z_0(t_0)$ が k 個の負の実数部をもつ固有値に対する k 次元 eigen-space に属していれば well-posed であり, 属していなければ ill-posed であることが示される。