非線形フィードバックシステムにおける跳躍現象の一般的判定条件†

平井 正*・沢井 伸之*

A General Criterion for Jump Resonance of Nonlinear Feedback Systems

Kazumasa HIRAI* and Nobuyuki SAWAI*

A new general criterion for jump resonance of nonlinear control system is presented. The jump resonance phenomenon is classified into two types, namely the wave crest type and the island type, according to the form of the frequency response curve, and the various modified types of jump resonance based on these two types are shown. Some of them are new and not found in the past publications. A simple graphical method to predict each type of jump resonance is studied. The experimental results by analog simulation are shown.

1. はじめに

非線形フィードバックシステムの周波数特性においては、ある周波数において、一つの入力振幅に対して複数の出力振幅が存在する場合がある。このとき、ゲイン特性が連続な場合は波頭形跳躍現象、一方、ゲイン特性がその主特性から離れて存在する場合があります、これを島形跳躍現象と呼ぶことにする。島形跳躍現象は、特別な非線形システムについてはすでに観測され研究されているが^{2)~6)}、一般的な発生条件は求められていない。最近、福間・松原は島形跳躍現象の一般的な発生条件を発表したが⁷⁾、適用方法が複雑であり、また、波頭形と島形の跳躍現象の発生に対する見通しが明らかでない。ここでは、まったく異なる観点から島形跳躍現象が発生する一般的な条件を求め、従来の波頭形跳躍現象との関係を明らかにした⁹⁾。

2. 跳躍現象発生の一般的条件とその図式判定法

Fig. 1 のシステムにおいてつぎの仮定を設ける。

- 1) システムは安定である。
- 2) 分数調波振動は発生しない。
- 3) 出力の高調波成分は無視できる。
- 4) 非線形要素はひとつか、あるいは複数個あってもひとつにまとめることができる。

これらの条件にさらに若干の条件を付加するとき、ある周波数の正弦波入力において、Fig. 2 のようにある入力振幅 R に対して複数の出力振幅 E が存在する場合がある。入力振幅 R を出力振幅 E の関数であるとみなすとき、 $\partial R / \partial E = 0$ となるところで跳躍現象が起り、また、 $\partial R / \partial E < 0$ の部分が跳躍現象発生領域であることが知られている。畑中や福間らはこれから波頭形跳躍現象発生条件を求めているが^{1), 2)}、この条件は単にある周波数において複数のゲインが存在する条件を求めたものであって、ゲイン特性の連続性については考慮されていない。そのため、条件 $\partial R / \partial E < 0$ は波頭形の条件だけでなく、島形跳躍現象の発生条件をも含んでいると考えられる。そこで島形跳躍現象発生条件を求めるために、いま周波数の変化に対する $R-E$ 曲線の形の変化について調べてみよう。

Fig. 1 Block diagram of a nonlinear feedback system

Fig. 2 Steady-state output amplitude E vs. input amplitude R in a system exhibiting jump resonance

† 電子通信学会で発表 (昭 52・10)

* 神戸大学工学部 神戸市灘区六甲台町 1

* Faculty of Engineering, Kobe University, Kobe

(Received December 5, 1977)

Fig. 3 Change of amplitude characteristic as input frequency increases

周波数変化に対する $R-E$ 曲線の変化は、システムを構成する線形要素や非線形要素によってさまざまなパターンをとる。しかし入力振幅 R_1 に対して複数個のゲインをもつと仮定すると、その変化の主なパターンはつぎの四つになる。簡単のため $R-E$ 曲線が $\partial R/\partial E=0$ でしかも左に凸の場合を+、同じく右に凸の場合を-と呼ぶことにし、 $R-E$ 曲線と直線 $R=R_1$ の位置関係の周波数による変化を考える。

i) $+ \rightarrow -$ 型

この場合、 $R-E$ 曲線は周波数 $\omega=\omega_1$ で、 $R=R_1$ の直線に左に凸の側から接する。つぎに周波数を高くすると $\omega=\omega_2$ においては $R=R_1$ において出力値が3個存在し、さらに周波数をあげていくと、 $R=R_1$ の直線を右に凸の側から離れてゆく。この変化を簡単な図式解法によって $E-\omega$ 平面に描くと Fig. 3(a)に示すように波頭形跳躍現象が現れることがわかる。

ii) $+ \rightarrow +$ 型

$R-E$ 曲線は、 $R=R_1$ の直線に対し周波数 $\omega=\omega_1$ において左に凸の側から接し、さらに周波数を高くす

ると ω_3 において左に凸の側から離れてゆく。このような場合、Fig. 3(b)に示すように $E-\omega$ 平面に島形跳躍現象が現れる。

iii) $- \rightarrow +$ 型

この場合、i) と同じようにして、Fig. 3(c) に示すように波頭形跳躍現象が現れる。

iv) $- \rightarrow -$ 型

この場合、Fig. 3(d) に示すように、島形跳躍現象が主特性より下側にできる。このような現象はこの研究によって初めて見出されたものであり、興味ある現象である。

さて、上で用いた+記号は、 $\partial R/\partial E=0$ の点で2回微分 $\partial^2 R/\partial E^2$ が正、また-記号は $\partial^2 R/\partial E^2$ が負であることを考慮すると、跳躍現象が波頭形か島形かの判定に際しては、 $\partial R/\partial E < 0$ を満足する R, ω が存在するかどうかの判定にくわえて、 $\partial R/\partial E=0$ の点での $\partial^2 R/\partial E^2$ の符号をチェックすればよいことがわかる。この判定は非線形要素の記述関数⁸⁾を用いて、つぎのように簡単に図式的に行うことができる。

今、Fig. 1 の非線形システムにおいて入力 $r(t)=R \sin \omega t$ とするとき、 $e(t)$ をつぎのように仮定する。

$$e(t)=E \sin (\omega t+\phi) \quad (1)$$

このとき、このシステムの入出力関係はつぎのように書くことができる。

$$\frac{E(j\omega)}{R(j\omega)}=\frac{G(j\omega)}{1+N(E)G(j\omega)}=\frac{1}{\{G(j\omega)\}^{-1}+N(E)} \quad (2)$$

ただし $N(E)$ は $F(e)$ の記述関数である。

伝達関数 $G(j\omega)$ 、 $N(E)$ は一般的につぎのように書くことができる。

$$\left. \begin{aligned} \{G(j\omega)\}^{-1} &= \alpha(\omega) + j\beta(\omega) \\ N(E) &= \eta_1(E) + j\eta_2(E) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

(3)式を(2)式に代入すると、

$$\{\alpha(\omega) + \eta_1(E)\}^2 + \{\beta(\omega) + \eta_2(E)\}^2 = \left(\frac{R}{E}\right)^2 \quad (4)$$

となる。これより、

$$\frac{\partial R}{\partial E} = \frac{E}{R} \left\{ \left(\alpha + \eta_1(E) + \frac{E\eta_1'(E)}{2} \right)^2 \right.$$

$$+ \left(\beta + \eta_2(E) + \frac{E\eta_2'(E)}{2} \right)^2 - \frac{E^2\eta_1'(E)^2 + E^2\eta_2'(E)^2}{4} \quad (5)$$

ただし、

$$\eta_1'(E) = \frac{\partial \eta_1(E)}{\partial E}, \quad \eta_2'(E) = \frac{\partial \eta_2(E)}{\partial E}$$

を得る。先に述べたように跳躍現象発生領域は $\partial R/\partial E|_{\omega=\text{const.}} < 0$ であり、 $\partial R/\partial E|_{\omega=\text{const.}} = 0$ が臨界跳躍点であるので、(5)式をゼロとおくと、入力振幅を R_1 と固定したときの臨界跳躍点における α, β は E を変数としてつぎのように求められる。

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= -\eta_1 - \frac{\eta_1' \frac{R_1}{E^2} \pm \eta_2' \sqrt{(\eta_1')^2 + (\eta_2')^2 - \frac{R_1^2}{E^4}}}{(\eta_1')^2 + (\eta_2')^2} \frac{R_1}{E} \\ \beta &= -\eta_2 - \frac{\eta_2' \frac{R_1}{E^2} \mp \eta_1' \sqrt{(\eta_1')^2 + (\eta_2')^2 - \frac{R_1^2}{E^4}}}{(\eta_1')^2 + (\eta_2')^2} \frac{R_1}{E} \end{aligned} \right\} \quad (\text{複号同順}) \quad (6)$$

$\eta_1, \eta_2, \eta_1', \eta_2'$ は E の関数であるから、 E を与えるとこれらの値が一意的に求まる。 R を一定とし、 E をパラメータとして、 α, β を求め、これを G^{-1} 平面上に描くことによって跳躍現象発生臨界曲線を得ることができる。この曲線上で、

$$\frac{\partial^2 R}{\partial E^2} = \frac{E^2}{R_1^2} \left\{ (\eta_1')^2 + \eta_1 \eta_1'' + \alpha \eta_1'' + (\eta_2')^2 + \eta_2 \eta_2'' + \beta \eta_2'' - \frac{3R_1^2}{E^4} \right\}$$

ただし、

$$\eta_1'' = \frac{\partial^2 \eta_1(E)}{\partial E^2}, \quad \eta_2'' = \frac{\partial^2 \eta_2(E)}{\partial E^2} \quad (7)$$

となり、これより $\partial^2 R/\partial E^2$ の符号が求められる。

以上のことから、波頭形および島形跳躍現象の発生の判定方法はつぎようになる。

1) 線形部の逆ベクトル軌跡 $G^{-1}(j\omega)$ を複素平面上に描く。

2) (6)式で囲まれる跳躍現象発生領域 (これを Ω とする) を同じ複素平面上に描く。

3) (6)式の臨界曲線上での $\partial^2 R/\partial E^2$ の符号を(7)式より求め、これを臨界曲線上に記入する。このとき、

4) $G^{-1}(j\omega)$ 軌跡が Ω を横切らないとき、跳躍現象は起らない。

5) $G^{-1}(j\omega)$ 軌跡が Ω を横切るとき、このとき、 $G^{-1}(j\omega)$ 軌跡が ω を増すにつれて Ω を横切るパターンに注目する。すなわち、 $G^{-1}(j\omega)$ 軌跡が臨界曲線を横切るとき曲線の上に付された $\partial^2 R/\partial E^2$

の符号をチェックし、 $G^{-1}(j\omega)$ 軌跡が Ω を離れるまでこの符号がどう変化したかを調べる。符号変化が $+\rightarrow-(\rightarrow+)$ の場合には波頭形跳躍現象が発生し、その共振ピークは左(右)に傾く。符号変化が $+\rightarrow+(\rightarrow-)$ の場合には島形跳躍現象が発生し、島は主曲線の上(下)に発生する。

以上の判定法は簡単であり、またいろいろな跳躍現象のタイプに対する見通しを明るくする利点がある。

ただし、跳躍現象の判定を行うとき、ある種の非線形要素に対しては、つぎのようなことに注意を要する。

1) $R-E$ 曲線が $E=E_1$ で $\partial R/\partial E = \partial^2 R/\partial E^2 = \dots = \partial^{n-1} R/\partial E^{n-1} = 0$, $\partial^n R/\partial E^n \neq 0$ のとき、

n が偶数のとき、 $E=E_1$ での $\partial^n R/\partial E^n$ の符号によって $+$, $-$ の判定をする。

n が奇数のとき、境界線上の符号はきまらない。すなわち、このとき島形と波頭形の跳躍現象の臨界状態である。 $G^{-1}(j\omega)$ 軌跡は臨界曲線上、 $+$ と $-$ の臨界点を横切る。

2) $E=E_1$ で微分不可能なとき。

たとえば、 $R-E$ 曲線が $E=E_1$ で尖点をもつ場合である。前と同様の考え方に基いて、 R に対して E が E_1 で極大 (極小) のときは $- (+)$ を対応させる。 E_1 に対応する跳躍現象発生臨界曲線は、(6)式からは求められないが、それは(4)式より $(-\eta_1(E_1), -\eta_2(E_1))$ を中心とし、半径 R/E_1 の円弧となる。他の E に対する臨界曲線は(6)式より得られ、これらの曲線で囲まれる領域が発生領域である。

今、例として飽和要素をもつ非線形フィードバックシステムを考える。この系の逆ベクトル軌跡平面上での跳躍現象発生領域、およびその領域の境界線上での $\partial^2 R/\partial E^2$ の符号を示せば Fig. 4 のようになる (図中で境界線の実線 (破線) の部分が $+$ ($-$) 符号である。以下同じとする)。線形部逆ベクトル軌跡 $G^{-1}(j\omega)$ が

Fig. 4 The region where jump resonance occurs and $G^{-1}(j\omega)$ locus

(a) の場合には、臨界曲線を正から負へ横切っているため、前述の $+\rightarrow-$ 型のパターンとなり、波頭形跳躍現象がゲイン線図上に現れる。また、(b) の場合には、 $+\rightarrow+$ 型のパターンで島形跳躍現象が現れる。

3. ゲイン線図の種々のパターン

前節では、線形部の逆ベクトル軌跡が跳躍現象発生領域を横切る際の基本的な四つのパターンについて、その周波数応答におけるゲイン線図の形を検討した。ここでは、前述のパターンよりも若干複雑な場合についてさらに詳しく検討を行う。

系を構成する非線形要素によっては $R-E$ 曲線の S 字形カーブがひとつ現れる場合と、それ以上現れる場合がある。今、説明を簡単にするために、ひとつの S 字形カーブに対する非線形要素を第 I 型、二つの S 字形カーブに対する非線形要素を第 II 型と呼ぶことにする。

これら二つの型では、跳躍現象発生領域のパターンが異なり、これを横切る逆ベクトル軌跡の状態によって、ゲイン曲線のパターンがいろいろ変化する。

1) 第 I 型

(a) $G^{-1}(j\omega)$ locus (b) Frequency-amplitude characteristic ($R=1$)

Fig. 5 Frequency characteristic of the system with type I nonlinearity ($+\rightarrow-\rightarrow+\rightarrow-\rightarrow+$ type)

(a) $G^{-1}(j\omega)$ locus (b) Frequency-amplitude characteristic ($R=1$)

Fig. 6 Frequency characteristic of the system with type I nonlinearity ($+\rightarrow-\rightarrow+\rightarrow-\rightarrow-$ type)

このタイプに属する非線形要素としては、飽和要素、不感帯要素、バックラッシュなどがある。以下に飽和要素を例にとって説明する。

i) $(+\rightarrow+)\rightarrow(+\rightarrow+)\rightarrow$ 型

かっこで示した部分は、逆ベクトル軌跡が跳躍現象発生領域に入っている部分を示す。

この場合、**Fig. 5(a)**に示すように、逆ベクトル軌跡は $+$ 側から領域内に入り、また $+$ 側から領域を出る。この後、また $+$ 側から領域内に入り、 $+$ 側から領域を出る。前節の結果から容易に推測できるように、この場合、ゲイン線図上には二つの島形跳躍現象が現れる。**Fig. 5(b)**はこれに対応するゲイン線図を示したものである。

ii) $(+\rightarrow+)\rightarrow(-\rightarrow-)\rightarrow$ 型

このように逆ベクトル軌跡が跳躍現象発生領域を横切るときは、**Fig. 6**に示すようにゲイン線図の主特性の上と下に島形跳躍現象が現れる。

2) 第 II 型

このタイプに属する非線形要素としては、不感帯のあるリレー、不感帯のある飽和、あるいはバックラッシュと飽和の結合した非線形要素などがある。第 II 型の非線形要素をもつ系では、跳躍現象はゲインの低い

(a) $G^{-1}(j\omega)$ locus (b) Frequency-amplitude characteristic ($R=1$)

Fig. 7 Frequency characteristic of the system with type II nonlinearity ($[-\rightarrow-(+\rightarrow-)\rightarrow+]$ type)

(a) $G^{-1}(j\omega)$ locus (b) Frequency-amplitude characteristic ($R=1$)

Fig. 8 Frequency characteristic of the system with type II nonlinearity ($[+\rightarrow-(+\rightarrow-)\rightarrow+]$ type)

所とゲインの高い所の2ヵ所で発生する。この二つに対応する跳躍現象発生領域と逆ベクトル軌跡のパターンによって、第I型の場合と異なったゲイン線図が得られる。不感帯のあるリレー要素を例にとって説明する。

i) $[- \rightarrow (+ \rightarrow -) \rightarrow +]$ 型

この場合は、線形部逆ベクトル軌跡がまずゲインの低いほうの跳躍現象発生領域内へ側から入り、さらにゲインの高いほうの跳躍現象発生領域へ側から入っていく。この逆ベクトル軌跡の横切り方とゲイン線図を Fig. 7 に示す。

ii) $[+ \rightarrow (+ \rightarrow -) \rightarrow +]$ 型

この場合の逆ベクトル軌跡およびゲイン線図を示すと Fig. 8 のようになる。

以上説明したように、第I型の非線形要素をもつシステムのゲイン特性においては、ひとつの周波数に対して3値のゲインを取り、第II型のシステムでは、5値のゲインを取る場合があることが特徴である。さらに7値以上のゲインを取るようなシステムも考えられるが省略した（たとえば、非線形特性としてポテンショメータのグラニュアリティではひとつの R, ω に対して無数のゲインが存在する場合がある）。

4. 入力振幅に対するゲイン曲線の変化

一般に線形システムの周波数応答においては、入力振幅を大きくすると、ひとつの周波数に対して出力振幅も大きくなり、ゲイン特性は変化しない。それに対して、非線形システムでは、入力振幅が変化するとゲイン特性が変化する。たとえば、ある入力振幅ではゲイン特性に跳躍現象が見られない場合でも、入力振幅を大きくすると波頭形や島形の跳躍現象が現れる場合がある。そのほか、島形から波頭形の跳躍現象に変化する場合もある。本節では、跳躍現象発生領域が入力振幅によってどのように変化するかを調べ、逆ベクトル軌跡との関係を調べてみる。ここでは、Fig. 9 に示す不感帯のあるリレー要素を例にとって検討する。

Fig. 9 Nonlinear characteristic of relay with dead zone

Fig. 10 (a) The region where jump resonance occurs for the system with the nonlinearity of Fig. 9 ($D=0.3, K=0.5$) and $G(j\omega)$ locus for various input amplitudes
(b) Frequency-amplitude characteristics

今、系への入力振幅 R を 0.1 と 0.2 としたときの跳躍現象発生領域と非線形部の逆ベクトル軌跡が、Fig. 10(a) のような関係にあるとする。前節までの考察から容易にわかるように、 $R=0.1$ では島形跳躍現象が現われるが、 $R=0.2$ とすると波頭形に変化する。この場合のゲイン線図を Fig. 10(b) に示した。

5. 線形部パラメータ変化に対するゲイン曲線の変化

Fig. 1 の線形部のパラメータ変化について検討する。たとえば、非線形要素として Fig. 9 のような不感帯のあるリレー要素を考え、線形部の伝達関数を、

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{(s+c)(s^2+2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} \quad (8)$$

とする。パラメータをさまざまに変化させた場合のゲイン特性の変化をパラメータ平面に示すと Fig. 11

Fig. 11 Parameter domain for various jump resonance phenomena for eq. (8)

(a) Wave crest type jump resonance (b) Island type jump resonance
Fig. 12 Results of analog simulation

Table 1 Jump resonance frequencies for Fig. 12.

		Jump resonance point (lower freq.)	Jump resonance point (higher freq.)
Wave crest type jump resonance $R=0.3$	theoretical value	0.639	0.845
	simulation value	0.625	0.840
Island type jump resonance $R=0.1$	theoretical value	0.634	0.736
	simulation value	0.605	0.740

のようになる。これからわかるように、線形要素のパラメータによってシステムの周波数特性はいろいろなモードをとることがわかる。

6. 実験結果

非線形要素を Fig. 9 ($D=0.3$, $K=0.5$), 線形要素を

$$G(s) = \frac{1}{(s+0.5)(s+0.6)(s+1)^2} \quad (9)$$

としたときのアナログ計算機による出力の時間的変化、およびデジタル計算機による理論結果を Fig. 12 に示す。Table 1 にそのときのデータを示す。これよりわかるように、実験誤差の範囲内で理論結果とよく一致していることがわかる。また、跳躍点におけるゲイン変化は、Fig. 12 で用いたシステムの場合、波頭形の跳躍現象では高ゲインから低ゲインへの変化

と、低ゲインから高ゲインへの変化の二つのゲイン変化が観測されるが、島形の跳躍現象では高ゲインから低ゲインへの変化しか観測できない。

7. おわりに

非線形システムの周波数応答に関して、従来知られていた跳躍現象の発生条件を統一的に論じ、島形跳躍現象の発生条件を明らかにした。すなわち、システムの入出力振幅特性を表す $R-E$ 曲線の周波数に対する変化を検討することにより、波頭形跳躍現象、島形跳躍現象の発生条件を得、さらにこれを線形部の逆ベクトル軌跡より図式的に判定する方法を求めた。この方法により、従来知られていなかった、島形跳躍現象が主特性より下側に発生する現象が明らかになった。

さらに、システムの入力振幅や、線形部のパラメータ変化に対するゲイン特性の変化を検討し、入力振幅やパラメータの大きさによって波頭形や島形の跳躍現象が発生することを示し、パラメータ平面上での領域を示した。

参考文献

- 1) A. Fukuma and M. Matsubara: Jump Resonance Criteria of Nonlinear Systems, IEEE Trans. on Automatic Control, **AC-11**, 699/706 (1966)
- 2) H. Hatanaka: The Frequency Response and Jump-Resonance Phenomena of Nonlinear Feedback Control Systems, Trans. ASME (J. Basic Eng.), **D-85**, 236/242 (1963)
- 3) W.D. Koenigsberg and J.C. Dunn: Jump Resonant Frequency Islands in Nonlinear Feedback Control Systems, IEEE Trans. on Automatic Control, **AC-20**, 208/217 (1975)
- 4) C. Hayashi: The Influence of Hysteresis on Nonlinear Resonance, J. Franklin Inst., **281**, 379/386 (1966)
- 5) R. Bouc: Influence du cycle d'hystérésis sur la résonance non linéaire d'un circuit série, Colloq. Inter. du CNRS, No. 148, Marseilles, 483/489 (1964)
- 6) 小柳: 非線形ばね (双曲ばね) 系の強制振動, 日本機械学会講演論文集, 760-8, 37/44 (1976)
- 7) 福岡, 松原: 非線形フィードバック制御系における跳躍共振 (記述関数法解析), 電気学会システム制御研究会資料, SC-77-24 (1977)
- 8) A. Gelb and W.E. Vander Velde: Multiple-Input Describing Functions and Nonlinear Systems Design, McGraw-Hill (1968)
- 9) 平井, 沢井: 非線形フィードバックシステムにおける跳躍現象と周波数島, 電子通信学会非線形専門委員会資料, NLP 77-16, 39/48 (1977)