量子化状態値帰還制御則を用いた場合の レギュレータの制御評価の劣化[†]

橋 本 修 輔*

Degradation of Performance Index Value Caused to Quantized State Feedback Control Law in a Regulator Problem

Shusuke HASHIMOTO*

In a linear quadratic optimal control problem, the optimal control is synthesized by a multiplying current states or optimal state estimates by an optimal feed-back matrix which is obtained by means of off-line computation.

If we take account of information costs (information transmitting cost, information storage cost and information processing cost) necessary to generate the control in addition to the quadratic performance index, these information costs will increase considerably as the size of the state dimension increases.

This paper treats a suboptimal control approach to the optimization problem of a linear discrete time system by use of deterministic patterns instead of true states from a viewpoint of decreasing information costs and presents the degradation of performance index value caused in the suboptimal control. It is shown that this degradation is formulated as the sum of errors in a quadratic form. Each error vector arises from patternization at each stage of computation.

1. 序 言

多くの制御系では、各段の状態値を知れば、その状態値の既知関数値として最適操作量を合成することができる。その場合、状態値を操作量決定側に帰還させる費用（情報伝送費用）や、状態値を知って操作量を合成する費用（情報記憶・処理費用）を考慮するならば、これら諸費用は状態値次元が大きくなればなるほど、制御段数が長くなればなるほど、増大すると考えられる。津川¹⁾は、制御に必要な情報処理量を減少さ

せることを目的として、フィードバック制御系での準最適状態量子化器の設計問題を、佐野²⁾は、制御機構の簡略化を目的として、量子化操作量を用いた準最適制御問題を考察している。また、大規模系制御問題に対して、状態値次元を少なくすることにより情報処理量を減少させる Decomposition や Aggregation が考えられている³⁾。

本論では、上述の情報費用の低廉化の観点から、状態値次元は減らさずに、原系を大局的にとらえる準最適操作量合成法を提案し、この方法による制御評価値の劣化を考察する。すなわち、線形2次形式評価制御系において、各段で観測された状態値を既知のパターンのいずれかに属するとみなし、このパターン化状態値を操作量決定側に帰還し、これに最適帰還行列を直結させて準最適操作量を合成する方法である。この方法によれば、状態値観測側は単に現段の状態値がどのパターンに属するかを操作量決定側に伝送すればよく、また、操作量決定側ではオフライン計算されている操作量候補群の中から、伝送されたパターンに対応した操作量を選出すればよいので、情報伝送あるいは情報処理に要する費用は低廉化される。一方、真の状態値の代りにパターン化状態値を帰還するため、各段でパターン化誤差が生じ、制御評価値の劣化はまぬがれない。したがって、与えられた制御系に対して、制御評価と制御合成費用を考えた、いわば総合評価を最小化しようとするとき、この準最適操作量合成法が有効になってくると考えられる。具体的には、制御合成のための情報費用が大きな重みをもつ制御系で、情報費用低廉化によるメリットが制御評価値の劣化をうわまわる場合に、総合評価最小の意味で準最適操作量を用いたほうが良いという結果になる。この総合評価に対する最適制御方策を見出すためのステップとして、パターン化状態値帰還制御合成による制御評価

[†] 第18回自動制御連合講演会で一部発表（昭50・11）

* 九州大学工学部 福岡市東区箱崎 6-10-1

* Faculty of Engineering, Kyushu University, Fukuoka

（Received June 20, 1977）

値の劣化について考察するのが、本論文の目的である。

2. 問題の設定

つぎのような線形離散時間制御系を考える。

$$\text{遷移系} \quad x_{j+1} = A_j x_j + G_j u_j \quad (1)$$

$$\text{評価} \quad f_{N-k} = \sum_{j=k}^{N-1} \{ \|x_{j+1}\|^2 V_{j+1} + \|u_j\|^2 W_j \} \quad (2)$$

ここで、 j はサンプル時刻、 x_j は n 次元状態値ベクトル、 u_j は r 次元操作量ベクトルとし、係数行列 A_j, G_j および評価重み行列 V_{j+1}, W_j は適当な次元をもつ既知行列とする。なお、 $\|x\|^2_A$ はベクトル x と対称非負値行列 A との2次形式 $x^T A x$ を表すとする。また、右肩添字 T はベクトルあるいは行列の転置を表す。

(1), (2) 式で表される確定的制御問題は、D.P 法で解くことができ、最適制御則は、

$$\text{最適操作量} \quad u_j^* = B_{N-j} x_j^* \quad (3)$$

$$\text{最適評価値} \quad f_{N-k}^* = \|x_k^*\|^2 P_{N-k} \quad (4)$$

となる(注1)。(4) 最適帰還行列 B_{N-j} と最適評価値行列 P_{N-j} は、つぎの漸化式よりオフライン計算される。

$$B_{N-j} = -\{G_j^T(V_{j+1} + P_{N-(j+1)})\} G_j + W_j\}^{-1} G_j^T \times (V_{j+1} + P_{N-(j+1)}) A_j \quad (5)$$

$$P_{N-j} = A_j^T (V_{j+1} + P_{N-(j+1)}) (A_j + G_j B_{N-j}), \\ P_0 = 0 \quad (6)$$

いま、(3) 式で示される最適操作量を用いず、真の状態値の代りに、あらかじめ状態値空間に定められたパターンのいずれかを操作量決定側に帰還し、このパターン化状態値と最適帰還行列を直結させて、操作量合成を行う準最適制御を考える。すなわち、

$$\text{準最適操作量} \quad u_j^s = B_{N-j} X_j^p \quad (7)$$

ここで、 X_j^p は j 段の状態値 x_j^s の代りに、帰還されるパターン化状態値である(注2)。

問題は、各段で(7)式の準最適操作量を用いて制御を行ったとき、(4)式の最適評価値に対する準最適評価値の劣化(増分)を定式化することである。

3. 制御評価値の劣化

劣化の解析にさきだち、後に必要となる残り $N-k$ 段最適評価値行列 P_{N-k} を、(6)式とは違った形で表しておく。(1), (3)式より、最適状態値 x_{j+1}^* は、

$$x_{j+1}^* = (A_j + G_j B_{N-j}) x_j^* \\ = \phi_j x_j^* \quad (8)$$

となる。ここで、

$$\phi_j = A_j + G_j B_{N-j} \quad (9)$$

$$\Phi(j+1, k) = \phi_j \cdot \phi_{j-1} \cdots \phi_k, \quad \Phi(j, j) = I_n \quad (\text{注3}) \quad (10)$$

また、(3), (8)式より、最適操作量 u_j^* は、

$$u_j^* = B_{N-j} \Phi(j, k) x_k \quad (11)$$

となる。(8), (11)式を(2)式に代入することにより、残り $N-k$ 段最適評価値 f_{N-k}^* が得られる。

$$f_{N-k}^* = \sum_{j=k}^{N-1} \{ \|x_{j+1}^*\|^2 V_{j+1} + \|u_j^*\|^2 W_j \} \\ = \sum_{j=k}^{N-1} \|x_k^*\|^2 \{ \Phi^T(j+1, k) V_{j+1} \Phi(j+1, k) \\ + \Phi^T(j, k) B_{N-j}^T W_j B_{N-j} \Phi(j, k) \} \quad (12)$$

(6)式と(12)式との比較より

$$P_{N-j} = \sum_{j=k}^{N-1} \{ \Phi^T(j+1, k) V_{j+1} \Phi(j+1, k) \\ + \Phi^T(j, k) B_{N-j}^T W_j B_{N-j} \Phi(j, k) \} \quad (13)$$

(13)式から(6)式の漸化式は容易に導かれる。

さて、各段で(7)式の準最適操作量を用いたときの残り $N-k$ 段準最適評価値 f_{N-k}^s を求める。 j 段で操作量合成のために帰還されるのは、 j 段の状態値 x_j^s でなく、パターン化状態値 X_j^p であるから、 j 段でのパターン化誤差 e_j は

$$e_j = X_j^p - x_j^s \quad (14)$$

となる。このパターン化誤差を用いて、準最適状態値 x_{j+1}^s と準最適操作量 u_j^s を表すと、 $j \geq k$ に対して

$$x_{j+1}^s = \phi_j x_j^s + \phi_j e_j \\ = x_{j+1}^* + \phi_j \sum_{i=k}^{j-1} \Phi(j, i+1) \phi_i e_i + \phi_j e_j \quad (15)$$

$$u_j^s = B_{N-j} x_j^s + B_{N-j} e_j \\ = u_j^* + B_{N-j} \left(\sum_{i=k}^{j-1} \Phi(j, i+1) \phi_i e_i + e_j \right) \quad (16)$$

となる。ここで、

$$\phi_j = G_j B_{N-j} = \phi_j - A_j \quad (17)$$

(15), (16)式は、それぞれ最適状態値、最適操作量からのずれを陽に表しており、そのずれは j 段までのパターン化誤差 $e_k, e_{k+1}, \dots, e_j$ の関数となっている。

(15), (16)式を(2)式に代入し、(8), (11), (12)式を用いることにより、残り $N-k$ 段準最適評価値 f_{N-k}^s が得られる。

$$f_{N-k}^s = \sum_{j=k}^{N-1} \{ \|x_{j+1}^s\|^2 V_{j+1} + \|u_j^s\|^2 W_j \} \\ = f_{N-k}^* + 2x_k^{*T} \sum_{j=k}^{N-1} \left\{ \Phi^T(j+1, k) V_{j+1} \right.$$

(注1) *は最適を意味する。

(注2) sは準最適を、pはパターン化を意味する。

(注3) I_n は $n \times n$ 単位行列とする。

$$\begin{aligned}
& \times \left(\phi_j \sum_{i=k}^{j-1} \Phi(j, i+1) \phi_i e_i + \phi_j e_j \right) \\
& + \Phi^T(j, k) B_{N-j}^T W_j B_{N-j} \\
& \times \left(\sum_{i=k}^{j-1} \Phi(j, i+1) \phi_i e_i + e_j \right) \Big\} \\
& + \sum_{j=k}^{N-1} \left\{ \left\| \sum_{i=k}^{j-1} \Phi(j, i+1) \phi_i e_i + \phi_j e_j \right\|_{V_{j+1}}^2 \right. \\
& \left. + \left\| \sum_{i=k}^{j-1} \Phi(j, i+1) \phi_i e_i + e_j \right\|_{B_{N-j}^T W_j B_{N-j}}^2 \right\} \quad (18)
\end{aligned}$$

(18)式右辺第2項および第3項が、準最適操作量を
用いたことになる制御評価値の劣化であり、これを
 δ_{N-k} で表すと、付録1で示されるように次式となる。

$$\delta_{N-k} = \sum_{j=k}^{N-1} \|e_j\|^2 Q_{j,j} \quad (19)$$

$$\begin{aligned}
Q_{j,j} = & B_{N-j}^T \{ G_j^T (V_{j+1} + P_{N-(j+1)}) G_j \\
& + W_j \} B_{N-j} \quad (20)
\end{aligned}$$

4. 量子化状態値を用いたときの劣化特性

パターン化状態値を帰還して準最適制御を行ったとき
の制御評価値の劣化は、各段のパターン化誤差の2
次形式和として定式化された。この劣化値は、パター
ンの種類や構造によって異なり、その値はオフライン
で求まらないが、パターン化誤差の確率分布がわかる
パターン化状態値が用いられるときには、劣化の平均
値や最大値がオフラインで求められ、制御の実際面から
都合が良い。ここでは、パターン化状態値として、
状態値空間を量子化したときの格子点を考え、状態値
が10進法および2進法で表示されたときの劣化特性
を解析する。量子化法としては、 j 段の状態値 x_j^s
の i 番目成分 $(x_j^s)^i$ を小数点以下第 $q(j, i)$ 位で四
捨五入し、その結果得られる小数点以下第 $q(j, i)-1$
位の実数を、 j 段でのパターン化状態値 X_j^p の i 番
目成分 $(X_j^p)^i$ とする。このとき、パターン化誤差 e_j
の i 番目成分 $(e_j)^i$ の確率分布はつぎのようになる
(以下、添字(10)、(2)は、それぞれ、10進法、2進
法の場合を意味する)。

$$\begin{aligned}
P\{(e_j^i)^{(10)}\} &= \frac{1}{2\alpha(j, i)} \\
& \quad |(e_j^i)^{(10)}| \leq \alpha(j, i) = 5 \times 10^{-q(j, i)} \\
P\{(e_j^i)^{(2)}\} &= \begin{cases} \frac{1}{2} & (e_j^i)^{(2)} = 0 \\ \frac{1}{2} & (e_j^i)^{(2)} = \beta(j, i) = 2^{-q(j, i)} \end{cases} \quad (21)
\end{aligned}$$

いま、 j 段の状態値 x_j^s の n 個の成分が、それぞ
れ独立に量子化されると、パターン化誤差 e_i の平均

値と分散は

$$\begin{aligned}
E\{e_j^{(10)}\} &= 0 \\
E\{e_j^{(2)}\} &= [\beta(j, 1) \cdots \beta(j, i) \cdots \beta(j, n)]^T / 2 \quad (22) \\
\text{Cov}\{e_j^{(10)}\} &= \text{diag.} [\alpha^2(j, 1) \cdots \alpha^2(j, i) \cdots \alpha^2(j, n)] / 3 \\
\text{Cov}\{e_j^{(2)}\} &= \text{diag.} [\beta^2(j, 1) \cdots \beta^2(j, i) \cdots \beta^2(j, n)] / 4 \quad (23)
\end{aligned}$$

となる、(19)、(22)、(23)式より、劣化の平均値、最大
値は

$$\begin{aligned}
E\{\delta_{N-k(10)}\} &= \sum_{j=k}^{N-1} \left(\sum_{i=1}^n (Q_{j,j})^{i,i} \cdot \alpha^2(j, i) \right) / 3 \\
E\{\delta_{N-k(2)}\} &= \sum_{j=k}^{N-1} \left(\sum_{i=1}^n \sum_{m=1}^n (Q_{j,j})^{i,m} \right. \\
& \quad \left. \times \beta(j, i) \beta(j, m) \right) / 2 \quad (24)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\max \{\delta_{N-k(10)}\} &= \sum_{j=k}^{N-1} \left(\sum_{i=1}^n \sum_{m=1}^n |(Q_{j,j})^{i,m}| \alpha(j, i) \alpha(j, m) \right) \\
\max \{\delta_{N-k(2)}\} &= \sum_{j=k}^{N-1} \left(\sum_{i=1}^n \sum_{m=1}^n |(Q_{j,j})^{i,m}| \beta(j, i) \beta(j, m) \right) \quad (25)
\end{aligned}$$

となる。(24)、(25)式からわかるように、量子化桁数
 $q(j, i)$ が与えられれば、劣化の平均値あるいは最大
値はオフライン計算で求められる。実際的には、情報
費用とのかねあいから、量子化による制御評価値の劣
化の許容値が先に与えられ、この許容値をうまわら
ないように量子化桁数 $q(j, i)$ を決定すべきである。
この場合、 δ_{N-k} に対する許容値だけからでは $q(j, i)$
の一意解は得られない。そこで、制御段数 j および状
態値成分番号 i によって $q(j, i)$ をいかに変化させる
かを、あらかじめ設定しておく必要がある。ここでは、
簡単な場合として、量子化桁数が各制御段、各状態値
成分で一定のとき、制御評価値の劣化の許容値を与え
たとき、劣化の平均値がそれ以下になるための量子化
桁数の満たすべき条件を求める。すなわち、劣化の許
容値を ε 、量子化桁数を q とすると、

$$\begin{aligned}
E\{\delta_{N-k(10)}\} &= 10^{-2q} \cdot R_{N-k(10)} \leq \varepsilon \\
E\{\delta_{N-k(2)}\} &= 2^{-2q} \cdot R_{N-k(2)} \leq \varepsilon \quad (26)
\end{aligned}$$

となる。ここで、 $R_{N-k(10)}$ 、 $R_{N-k(2)}$ は、

$$\begin{aligned}
R_{N-k(10)} &= 25 \sum_{j=k}^{N-1} \text{tr} (Q_{j,j}) / 3 \\
R_{N-k(2)} &= \sum_{j=k}^{N-1} \left(\sum_{i=1}^n \sum_{m=1}^n (Q_{j,j})^{i,m} \right) / 2 \quad (27)
\end{aligned}$$

である。(26)式より、 q の満たすべき条件は

$$\begin{aligned}
q(10) &\geq \log(R_{N-k(10)}/\varepsilon) / 2 \\
q(2) &\geq \log_2(R_{N-k(2)}/\varepsilon) / 2 \quad (28)
\end{aligned}$$

となる。情報費用低廉化の面からすれば、 q はできるだけ小さいことが望ましいので、(28)式を満たす最小の整数として q を選べば良いことになる。

つぎに、 ε の与え方であるが、残り $N-k$ 段最適評価値 f_{N-k}^* が $\|x_k^*\|^2 P_{N-k}$ として求められるので、 ε を f_{N-k}^* の $\varepsilon' [\%]$ として与えておけば良い。このとき、量子化桁数 q は初期状態値 x_k^* の関数として求められる。

数値計算例 2次元5段過程

$$\text{制御系} \quad x_{j+1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x_j + \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix} u_j$$

Table 1 Number of optimal quantized figure

system parameter			
$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$G = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix}$	$V = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$W=1 \quad N=5$
optimal feed back matrix			
$B_1 = [-0.2222 \quad -0.6667]$	$B_2 = [-0.3893 \quad -0.9530]$		
$B_3 = [-0.4261 \quad -1.015]$	$B_4 = [-0.4327 \quad -1.026]$		
$B_5 = [-0.4341 \quad -1.028]$			
optimal performance matrix			
$P_1 = \begin{bmatrix} 0.8889 & 0.6667 \\ 0.6667 & 1.0 \end{bmatrix}$	$P_2 = \begin{bmatrix} 1.262 & 1.020 \\ 1.020 & 1.463 \end{bmatrix}$		
$P_3 = \begin{bmatrix} 1.345 & 1.099 \\ 1.099 & 1.564 \end{bmatrix}$	$P_4 = \begin{bmatrix} 1.363 & 1.114 \\ 1.114 & 1.583 \end{bmatrix}$		
$P_5 = \begin{bmatrix} 1.366 & 1.117 \\ 1.117 & 1.587 \end{bmatrix}$			
degradation matrix			
$Q_0 = \begin{bmatrix} 0.9963 & 2.359 \\ 2.359 & 5.587 \end{bmatrix}$	$Q_1 = \begin{bmatrix} 0.9828 & 2.330 \\ 2.330 & 5.524 \end{bmatrix}$		
$Q_2 = \begin{bmatrix} 0.9164 & 2.183 \\ 2.183 & 5.201 \end{bmatrix}$	$Q_3 = \begin{bmatrix} 0.6272 & 1.535 \\ 1.535 & 3.759 \end{bmatrix}$		
$Q_4 = \begin{bmatrix} 0.1111 & 0.3333 \\ 0.3333 & 0.9999 \end{bmatrix}$	$R_{s(10)} = 206.2467$		
	$R_{s(2)} = 16.74495$		
initial state $x_0^T = [10/3 \quad 0]$			
optimal performance value $f_s^* = 15.177$			

$\varepsilon' [\%]$	ε	$q_{(10)}^*$	$q_{(2)}^*$
0.1	0.015177	3	6
0.3	0.045531	2	5
0.5	0.075885	2	4
1.0	0.15177	2	4
3.0	0.45531	2	3
5.0	0.75885	2	3
10	1.5177	2	2
20	3.0354	1	2
30	4.5531	1	1

Table 2 Degradation value

$\varepsilon' [\%]$	$q_{(10)}^*$	f_s^*	δ_s	$\delta_s/f_s^* [\%]$
10	2	15.188	0.011	0.08
20	1	17.991	2.814	18.55

$$\text{制御評価} \quad f_s = \sum_{j=0}^4 \{\|x_{j+1}\|^2 + u_j^2\}$$

Table 1 に、初期状態値 x_0 を $x_0^T = [10/3 \quad 0]$ としたとき、 ε' を 0.1 [%] から 30 [%] まで変化させたときの最小量子化桁数の変化を示す。(26)式からわかるように、量子化桁数を 1 桁変化させると劣化の平均値は 10 進法では 10^2 倍、2 進法では 2^2 倍変化するから、逆に、 $q_{(10)}^*$ は ε' の広い範囲にわたって変わらないが、 $q_{(2)}^*$ は ε' のわずかな変化に対して変わることがわかる。Table 2 に、10 進法表示された状態値を、 ε' が 10 [%]、20 [%] のときの最適桁数で量子化し、本手法の準最適制御を行ったとき、最適評価値に対する劣化の割合を示す。 ε' が 10 [%] の場合、実際の劣化度は 1 [%] にも満たないが、 ε' が 20 [%] の場合には実際の劣化度も同じ程度になっている。

5. 確率的制御問題の場合

遷移系および観測系に正規分布形雑音が付加した確率系において、状態推定機構より得られた最適状態推定値の代りに、確定量であるパターン化状態値を帰還して操作量合成を行ったときの制御評価値の劣化について考察する。

$$\text{遷移系} \quad x_{j+1} = A_j x_j + G_j u_j + \xi_j \quad (29)$$

$$\text{観測系} \quad y_j = H_j x_j + \eta_j \quad (30)$$

制御評価

$$f_{N-k} = E \left\{ \sum_{j=k}^{N-1} (\|x_{j+1}\|^2 v_{j+1} + \|u_j\|^2 w_j) / y^k \right\} \quad (31)$$

ここで、 y_j は m 次元観測値ベクトル、 H_j は $m \times n$ 観測行列であり、 ξ_j 、 η_j はそれぞれ n 次元、 m 次元の白色正規分布形付加雑音とする。なお、 $E\{\cdot/y^k\}$ は、 k 段までの観測値集合 y^k に基づく条件付期待値演算を表す。 ξ_j 、 η_j の統計量をつぎのように仮定する。

$$E\{\xi_j\} = 0, \quad E\{\eta_j\} = 0 \quad (32)$$

$$\text{Cov}\{\xi_j\} = Q_j, \quad \text{Cov}\{\eta_j\} = R_j, \quad \text{Cov}\{\xi_j, \eta_j\} = S_j \quad (33)$$

遷移・観測系雑音間に相関があるときの最適制御則は、次式となる(注4, 5)~7)。

$$\text{最適操作量} \quad u_j^* = \beta_{N-j} \hat{\mu}_{j/j}^* \quad (34)$$

$$\text{最適評価値} \quad f_{N-k}^* = \|\hat{\mu}_{k/k}^*\|^2 \Delta_{N-k} + \theta_{N-k} \quad (35)$$

ここで、 $\hat{\mu}_{j/j}^*$ は j 段までの観測値集合 y^j に基づく μ_j の最適推定値である。すなわち、

$$\hat{\mu}_{j/j}^* = E\{\mu_j/y^j\} = E\{A_j x_j + \xi_j/y^j\}$$

(注4) 確定系の最適制御則における B_{N-j} 、 P_{N-j} との関係は、

$$B_{N-j} = \beta_{N-j} A_j, \quad P_{N-j} = A_j^T \Delta_{N-j} A_j$$

$$= A_j \hat{x}_{j/j} + \hat{\xi}_{j/j} \quad (36)$$

付録 2 に、この確率系に対する最適状態推定アルゴリズムを示す。(34)、(35)式における最適帰還行列 β_{N-j} 、最適評価値行列 A_{N-j} 、最適評価値定数 θ_{N-j} はつぎの漸化式よりオフライン計算される⁶⁾。

$$\begin{aligned} \beta_{N-j} = & -\{G_j^T(V_{j+1} + A_{j+1}^T A_{N-(j+1)} A_{j+1})G_j \\ & + W_j\}^{-1} G_j^T \cdot (V_{j+1} + A_{j+1}^T A_{N-(j+1)} A_{j+1}) \end{aligned} \quad (37)$$

$$A_{N-j} = (V_{j+1} + A_{j+1}^T A_{N-(j+1)} A_{j+1})(I_n + G_j \beta_{N-j}) \quad (38)$$

$$\begin{aligned} \theta_{N-j} = & \theta_{N-(j+1)} + \text{tr} \{V_{j+1} C_{j+1/j}\} \\ & + \text{tr} \{A_{N-(j+1)} L_{j+1}\} \end{aligned} \quad (39)$$

(39)式における $C_{j+1/j}$ は、最適状態推定アルゴリズムで得られる最適予測値誤差分散行列であり、 L_{j+1} は、

$$L_{j+1} = (A_{j+1} C_{j+1/j} H_{j+1}^T + S_{j+1})(H_{j+1} C_{j+1/j} H_{j+1}^T + R_{j+1})^{-1} (A_{j+1} C_{j+1/j} H_{j+1}^T + S_{j+1})^T \quad (40)$$

である。

さて、 j 段で最適に推定された $\hat{\mu}_{j/j}$ の代りに、確定量であるパターン化状態値 X_j^P を操作量決定側に帰還し、これに最適帰還行列 β_{N-j} を直結させて準最適操作量を合成する準最適制御を、各段で行ったときの制御評価値の劣化を求める。まず、最適評価値行列 A_{N-j} を(38)式とは違った形で表しておく。

(29)、(30)、(34)式と付録 2 の各式より、

$$x_{j+1}^* = \mu_j^* + G_j u_j^* = \phi_j^* \hat{\mu}_{j/j}^* + \hat{\mu}_{j/j}^* \quad (41)$$

$$\hat{x}_{j+1/j}^* = \hat{\mu}_{j+1/j}^* + G_j u_j^* = \phi_j^* \hat{\mu}_{j/j}^* \quad (42)$$

$$y_{j+1}^* = H_{j+1} \phi_j^* \hat{\mu}_{j/j}^* + H_{j+1} \hat{\mu}_{j/j}^* + \eta_{j+1} \quad (43)$$

$$\mu_{j+1}^* = A_{j+1} \phi_j^* \hat{\mu}_{j/j}^* + A_{j+1} \hat{\mu}_{j/j}^* + \xi_{j+1} \quad (44)$$

$$\hat{\mu}_{j+1/j+1}^* = \phi_j^* \hat{\mu}_{j/j}^* + w_j \quad (45)$$

$$\hat{\mu}_{j+1/j+1}^* = \mu_{j+1}^* - \hat{\mu}_{j+1/j+1}^* = \tilde{\phi}_j^* \hat{\mu}_{j/j}^* + v_j \quad (46)$$

が得られる。ここで、

$$\phi_j^* = I_n + G_j \beta_{N-j} \quad (47)$$

$$\tilde{\phi}_j^* = A_{j+1} \phi_j^* \quad (48)$$

$$\tilde{\phi}_j^* = A_{j+1} - K_{j+1} H_{j+1} \quad (49)$$

$$w_j = K_{j+1} H_{j+1} \hat{\mu}_{j/j}^* + K_{j+1} \eta_{j+1} \quad (50)$$

$$v_j = \xi_{j+1} - K_{j+1} \eta_{j+1} \quad (51)$$

(45)、(46)式より、 $j \geq k$ に対して

$$\hat{\mu}_{j+1/j+1}^* = \hat{\phi}_1(j+1, k) \hat{\mu}_{k/k}^* + \sum_{i=k}^j \hat{\phi}_1(j+1, i+1) w_i \quad (52)$$

$$\hat{\mu}_{j+1/j+1}^* = \tilde{\phi}_1(j+1, k) \hat{\mu}_{k/k}^* + \sum_{i=k}^j \tilde{\phi}_1(j+1, i+1) v_i \quad (53)$$

となる。ここで、

$$\hat{\phi}_1(j+1, k) = \hat{\phi}_j^* \hat{\phi}_{j-1}^* \cdots \hat{\phi}_k^*, \quad \hat{\phi}_1(k, k) = I_n \quad (54)$$

$$\tilde{\phi}_1(j+1, k) = \tilde{\phi}_j^* \tilde{\phi}_{j-1}^* \cdots \tilde{\phi}_k^*, \quad \tilde{\phi}_1(k, k) = I_n \quad (55)$$

以上の考察より、最適状態値 x_{j+1}^* と最適操作量 u_j^* は

$$x_{j+1}^* = \phi_j^* \hat{\phi}_1(j, k) \hat{\mu}_{k/k}^* + \Phi_2(j+1, k) \quad (56)$$

$$u_j^* = \beta_{N-j} \hat{\phi}_1(j, k) \hat{\mu}_{k/k}^* + \Phi_3(j, k) \quad (57)$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned} \Phi_2(j+1, k) = & \phi_j^* \sum_{i=k}^{j-1} \hat{\phi}_1(j, i+1) w_i + \tilde{\phi}_1(j, k) \hat{\mu}_{k/k}^* \\ & + \sum_{i=k}^{j-1} \tilde{\phi}_1(j, i+1) v_i \end{aligned} \quad (58)$$

$$\Phi_3(j, k) = \beta_{N-j} \sum_{i=k}^{j-1} \hat{\phi}_1(j, i+1) w_i \quad (59)$$

さて、 $E\{v_i/y^k\} = 0$ 、 $E\{w_i/y^k\} = 0$ であるから、

$$E\{\Phi_2(j+1, k)/y^k\} = 0 \quad (60)$$

$$E\{\Phi_3(j, k)/y^k\} = 0 \quad (61)$$

となる。(56)、(57)式を(31)式に代入し、(60)、(61)式を用いると、残り $N-k$ 段最適評価値 f_{N-k}^* は、

$$\begin{aligned} f_{N-k}^* = & \sum_{j=k}^{N-1} [E\{\|x_{j+1}^*\|^2 v_{j+1} + \|u_j^*\|^2 w_j/y^k\}] \\ = & \sum_{j=k}^{N-1} \{\hat{\mu}_{k/k}^* \hat{\phi}_1^T(j, k) (\phi_j^*{}^T V_{j+1} \phi_j^* \\ & + \beta_{N-j}^T W_j \beta_{N-j}) \hat{\phi}_1(j, k) \\ & + \sum_{j=k}^{N-1} E\{\|\Phi_2(j+1, k)\|^2 v_{j+1} \\ & + \|\Phi_3(j, k)\|^2 w_j/y^k\} \} \end{aligned} \quad (62)$$

(35)式と(62)式との比較より、

$$A_{N-k} = \sum_{j=k}^{N-1} \hat{\phi}_1^T(j, k) (\phi_j^*{}^T V_{j+1} \phi_j^* + \beta_{N-j}^T W_j \beta_{N-j}) \hat{\phi}_1(j, k) \quad (63)$$

$$\begin{aligned} \theta_{N-k} = & \sum_{j=k}^{N-1} E\{\|\Phi_2(j+1, k)\|^2 v_{j+1} \\ & + \|\Phi_3(j, k)\|^2 w_j/y^k\} \end{aligned} \quad (64)$$

(63)式から(38)式の、また、(64)式から(39)式の導出を付録 3 に示す。

つぎに、各段で準最適操作量 u_j^S を用いたときの、残り $N-k$ 段準最適評価値 f_{N-k}^S を求める。

$$\text{準最適操作量} \quad u_j^S = \beta_{N-j} X_j^P \quad (65)$$

$$\text{パターン化誤差} \quad e_j = X_j^P - \hat{\mu}_{j/j}^S \quad (66)$$

ここで、 $\hat{\mu}_{j/j}^S$ は各段で準最適操作量を用いた制御過程における $\mu_j^S = A_j x_j^S + \xi_j$ の j 段までの観測値集合に基づく最適推定値であり、 X_j^P は j 段で帰還されるパターン化状態値である。(41)式～(46)式に対応して、

$$x_{j+1}^S = \phi_j^S \hat{\mu}_{j/j}^S + \hat{\mu}_{j/j}^S + \phi_j^S e_j \quad (67)$$

$$\hat{x}_{j+1/j}^S = \phi_j^S \hat{\mu}_{j/j}^S + \phi_j^S e_j \quad (68)$$

$$y_{j+1}^S = H_{j+1} \phi_j^S \hat{\mu}_{j/j}^S + H_{j+1} \hat{\mu}_{j/j}^S$$

$$+H_{j+1}\phi_j^*e_j+\eta_{j+1} \quad (69)$$

$$\begin{aligned} \mu_{j+1}^S &= A_{j+1}\phi_j^*\mu_{j/j}^S + A_{j+1}\bar{\mu}_{j/j}^S \\ &+ A_{j+1}\phi_j^*e_j + \xi_{j+1} \end{aligned} \quad (70)$$

$$\bar{\mu}_{j+1/j+1}^S = \phi_j\bar{\mu}_{j/j}^S + w_j' \quad (71)$$

$$\bar{\mu}_{j+1/j+1}^S = \mu_{j+1}^S - \bar{\mu}_{j+1/j+1}^S = \tilde{\phi}_j\bar{\mu}_{j/j}^S + v_j \quad (72)$$

が得られる。ここで、

$$\phi_j^* = G_j\beta_{N-j} = \phi_j^* - I_n \quad (73)$$

$$w_j' = w_j + A_{j+1}\phi_j^*e_j \quad (74)$$

$j=k$ では $\bar{\mu}_{k/k}^S = \bar{\mu}_{k/k}^*$ であるから、(71)式より、

$$\bar{\mu}_{j+1/j+1}^S = \hat{\phi}_1(j+1, k)\bar{\mu}_{k/k}^* + \sum_{i=k}^j \hat{\phi}_1(j+1, i+1)w_i' \quad (75)$$

となる。したがって、準最適状態値 x_{j+1}^S と準最適操作量 u_j^S は、

$$\begin{aligned} x_{j+1}^S &= x_{j+1}^* + \phi_j^* \sum_{i=k}^{j-1} \hat{\phi}_1(j, i+1)A_{i+1}\phi_i^*e_i \\ &+ \phi_j^*e_j \end{aligned} \quad (76)$$

$$u_j^S = u_j^* + \beta_{N-j} \left(\sum_{i=k}^{j-1} \hat{\phi}_1(j, i+1)A_{i+1}\phi_i^*e_i + e_j \right) \quad (77)$$

となる。(76), (77)式を(31)式に代入し、(62)式を用いると、残り $N-k$ 段準最適評価値 f_{N-k}^S は、

$$\begin{aligned} f_{N-k}^S &= \sum_{j=k}^{N-1} [E\{\|x_{j+1}^S\|^2 V_{j+1} + \|u_j^S\|^2 W_j / y^k\}] \\ &= f_{N-k}^* + 2 \sum_{j=k}^{N-1} E \left\{ x_{j+1}^{*T} V_{j+1} \left(\phi_j^* \sum_{i=k}^{j-1} \hat{\phi}_1(j, i+1)A_{i+1}\phi_i^*e_i + \phi_j^*e_j \right) / y^k \right\} \\ &+ 2 \sum_{j=k}^{N-1} E \left\{ u_j^{*T} W_j \beta_{N-j} \left(\sum_{i=k}^{j-1} \hat{\phi}_1(j, i+1) \times A_{i+1}\phi_i^*e_i + e_j \right) / y^k \right\} \\ &+ \sum_{j=k}^{N-1} E \left\{ \left\| \phi_j^* \sum_{i=k}^{j-1} \hat{\phi}_1(j, i+1)A_{i+1}\phi_i^*e_i + \phi_j^*e_j \right\|^2 V_{j+1} + \left\| \sum_{i=k}^{j-1} \hat{\phi}_1(j, i+1)A_{i+1}\phi_i^*e_i + e_j \right\|^2 W_j \beta_{N-j} \right\} / y^k \end{aligned} \quad (78)$$

(78)式右辺第2項以下が、準最適操作量を用いたことによる制御評価値の劣化であり、これを ρ_{N-k} で表すと付録4で示されるように次式となる。

$$\rho_{N-k} = \sum_{j=k}^{N-1} E\{\|e_j\|^2 R_{j,j} / y^k\} \quad (79)$$

$$\begin{aligned} R_{j,j} &= \beta_{N-j}^T \{ G_j(V_{j+1} + A_{j+1}^T A_{N-(j+1)} A_{j+1}) G_j \\ &+ W_j \} \beta_{N-j} \end{aligned} \quad (80)$$

6. 結 言

線形離散時間形2次形式評価制御系において、真の状態値あるいは最適状態推定値の代りに、確定量のパターン化状態値を操作量決定側に帰還し、これに最適操作量を生みだす最適帰還行列を直結して、準最適操作量を合成したときの制御評価値の劣化を定式化した。

すなわち、この劣化は、確定系の場合には、各段でのパターン化誤差の2次形式和で、また、確率系の場合には、各段でのパターン化誤差の2次形式和の確率平均で表された。

今後の課題として、与えられた制御系に対する最適パターンの選定(代表点、量子化、射影化など)や、情報費用に対する数学モデルの設定、さらに、情報費用の低廉化と制御評価の劣化を考慮した、総合評価に対する最適制御問題が残されている。これらを解決すれば、本論で取扱った準最適制御法は、大規模制御系や遠隔制御系に対する一手法となりうる。

終りに、日頃、ご指導いただいている福岡大学辻節三教授に感謝します。

参 考 文 献

- 1) 津川：フィードバック制御系での準最適量子化、計測自動制御学会論文集、9-3, 320/327 (1973)
- 2) 佐野：量子化操作量を利用した準最適レギュレータ問題、計測自動制御学会論文集、11-5, 521/527 (1975)
- 3) D. A. Wismer: Optimization Methods for Large-Scale Systems, McGraw-Hill (1971)
- 4) J. T. Tou: Optimum Design of Digital Control Systems, Academic Press (1963)
- 5) 明石、能勢：環境変化を伴う線形系の最適制御、制御理論シンポジウム資料、133/138 (1974)
- 6) 橋本：遷移・観測系雑音間に相関があるときの最適制御問題、第17回自動制御連合講演会前刷、91/92 (1974)
- 7) 橋本：遷移・観測系雑音間に相関があるときの状態推定問題、昭和47年度電気四学会九州支部連合大会論文集、p. 153 (1972)

《付 録》

〈付録1〉(19)式の導出

(18)式右辺第2項と第3項を2次形式で表すと、

$$\delta_{N-k} = z_k^T Q_{N-k} z_k \quad (\text{付 1.1})$$

ここで、 $z_k^T = [x_k^* \quad e_k^T \cdots e_{N-1}^T]$ は $(N-k+1)n$ 次元ベクトルとし、 Q_{N-k} は $n \times n$ 対称行列 $Q_{i,j}$ を要素とする $(N-k+1)n \times (N-k+1)n$ 対称行列である。すなわち、

$$Q_{N-k} = \begin{bmatrix} Q_{-1,-1} & Q_{-1,k} \cdots Q_{-1,j} \cdots Q_{-1,N-1} \\ Q_{k,-1} & Q_{k,k} \cdots Q_{k,j} \cdots Q_{k,N-1} \\ \vdots & \vdots \cdots \vdots \cdots \vdots \\ Q_{i,-1} & Q_{i,k} \cdots Q_{i,j} \cdots Q_{i,N-1} \\ \vdots & \vdots \cdots \vdots \cdots \vdots \\ Q_{N-1,-1} & Q_{N-1,k} \cdots Q_{N-1,j} \cdots Q_{N-1,N-1} \end{bmatrix} \quad (\text{付 1.2})$$

以下に、 Q_{N-k} の成分行列 $Q_{i,j}$ について考察するが、その際必要となる公式をまず導出しておく。

$$\text{公式： } \phi_i^T(V_{i+1} + P_{N-(i+1)})\phi_i + B_{N-i}^T W_i B_{N-i} = 0 \quad (\text{付 1.3})$$

$$\begin{aligned} (\text{証明}) \quad \text{左辺} &= \phi_i^T(V_{i+1} + P_{N-(i+1)})(\phi_i - A_i) \\ &\quad + B_{N-i}^T W_i B_{N-i} \\ &= \{\phi_i^T(V_{i+1} + P_{N-(i+1)})\phi_i \\ &\quad + B_{N-i}^T W_i B_{N-i}\} \\ &\quad - \phi_i^T(V_{i+1} + P_{N-(i+1)})A_i \\ &= P_{N-i} - P_{N-i}^T \\ &= 0 \end{aligned}$$

さて、(18)式右辺と(付 1.2)式の成分行列を対応させ、(付 1.3)式を用いるとつぎの各式が得られる。

$$Q_{-1,-1} = 0 \quad (\text{付 1.4})$$

$$\begin{aligned} Q_{-1,i} &= \sum_{j=k}^{N-1} \Phi^T(j, k)(\phi_j^T V_{j+1} \phi_j \\ &\quad + B_{N-j}^T W_j B_{N-j})\Phi(j, i+1)\phi_i \\ &\quad + \Phi^T(i, k)(\phi_i^T V_{i+1} \phi_i + B_{N-i}^T W_i B_{N-i}) \\ &= \Phi^T(i, k)\{\phi_i^T(V_{i+1} + P_{N-(i+1)})\phi_i \\ &\quad + B_{N-i}^T W_i B_{N-i}\} = 0, \quad k \leq i \leq N-2 \end{aligned} \quad (\text{付 1.5})$$

$$\begin{aligned} Q_{-1,N-1} &= \Phi^T(N-1, k)(\phi_{N-1}^T V_N \phi_{N-1} \\ &\quad + B_1^T W_{N-1} B_1) = 0 \end{aligned} \quad (\text{付 1.6})$$

$$\begin{aligned} Q_{i,i} &= \sum_{j=k}^{N-1} \phi_i^T \Phi^T(j, i+1)(\phi_j^T V_{j+1} \phi_j \\ &\quad + B_{N-j}^T W_j B_{N-j})\Phi(j, i+1)\phi_i \\ &\quad + (\phi_i^T V_{i+1} \phi_i + B_{N-i}^T W_i B_{N-i}) \\ &= \phi_i^T(V_{i+1} + P_{N-(i+1)})\phi_i + B_{N-i}^T W_i B_{N-i} \\ &= B_{N-i}^T \{G_i^T(V_{i+1} + P_{N-(i+1)})G_i \\ &\quad + W_i\} B_{N-i}, \quad k \leq i \leq N-1 \end{aligned} \quad (\text{付 1.7})$$

$$\begin{aligned} Q_{i,l} &= \sum_{j=k}^{N-1} \phi_i^T \Phi^T(j, i+1)(\phi_j^T V_{j+1} \phi_j \\ &\quad + B_{N-j}^T W_j B_{N-j})\Phi(j, l+1)\phi_l \\ &\quad + \phi_i^T \Phi^T(l, i+1)(\phi_l^T V_{l+1} \phi_l + B_{N-l}^T W_l B_{N-l}) \\ &= \phi_i^T \Phi^T(l, i+1)\{\phi_l^T(V_{l+1} + P_{N-(l+1)})\phi_l \\ &\quad + B_{N-l}^T W_l B_{N-l}\} = 0, \quad k \leq i \leq l \leq N-2 \end{aligned} \quad (\text{付 1.8})$$

$$\begin{aligned} Q_{i,N-1} &= \phi_i^T \Phi^T(N-1, i+1)(\phi_{N-1}^T V_N \phi_{N-1} \\ &\quad + B_1^T W_{N-1} B_1) = 0 \end{aligned} \quad (\text{付 1.9})$$

したがって、(付 1.1)式は

$$\delta_{N-k} = \sum_{j=k}^{N-1} e_j^T Q_{j,j} e_j = \sum_{j=k}^{N-1} \|e_j\|^2 Q_{j,j} \quad (\text{付 1.10})$$

となる。

<付録 2> 最適状態推定アルゴリズム⁷⁾

オフライン計算：

推定誤差分散行列 $C_{j/j}$

$$C_{j/j} = \text{Cov} \{x_j/y^j\} = (I_n - F_j H_j) C_{j/j-1} \quad (\text{付 2.1})$$

予測誤差分散行列 $C_{j+1/j}$

$$\begin{aligned} C_{j+1/j} &= \text{Cov} \{x_{j+1}/y^j\} \\ &= (A_j - S_j R_j^{-1} H_j) C_{j/j} (A_j - S_j R_j^{-1} H_j)^T \\ &\quad + Q_j - S_j R_j^{-1} S_j^T \\ &= A_j C_{j/j-1} A_j^T + Q_j - L_j \end{aligned} \quad (\text{付 2.2})$$

ここで、

$$\begin{aligned} L_j &= (A_j C_{j/j-1} H_j^T + S_j)(H_j C_{j/j-1} H_j^T \\ &\quad + R_j)^{-1} (A_j C_{j/j-1} H_j^T + S_j)^T \end{aligned} \quad (\text{付 2.3})$$

推定ゲイン F_j

$$F_j = C_{j/j-1} H_j^T (H_j C_{j/j-1} H_j^T + R_j)^{-1} \quad (\text{付 2.4})$$

予測ゲイン K_j

$$K_j = (A_j C_{j/j-1} H_j^T + S_j)(H_j C_{j/j-1} H_j^T + R_j)^{-1} \quad (\text{付 2.5})$$

オンライン計算：

推定値

$$\hat{x}_{j/j} = E\{x_j/y^j\} = \hat{x}_{j/j-1} + F_j(y_j - H_j \hat{x}_{j/j-1}) \quad (\text{付 2.6})$$

$$\hat{\xi}_{j/j} = E\{\xi_j/y^j\} = S_j R_j^{-1}(y_j - H_j \hat{x}_{j/j-1}) \quad (\text{付 2.7})$$

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_{j/j} &= E\{\mu_j/y^j\} = E\{A_j x_j + \xi_j/y^j\} \\ &= A_j \hat{x}_{j/j} + \hat{\xi}_{j/j} \end{aligned} \quad (\text{付 2.8})$$

<付録 3> (63)式から(38)式、(64)式から(39)式の導出

$$\begin{aligned} A_{N-k} &= \sum_{j=k}^{N-1} \hat{\phi}_1^T(j, k)(\phi_j^*{}^T V_{j+1} \phi_j^* \\ &\quad + \beta_{N-j}^T W_j \beta_{N-j})\hat{\phi}_1(j, k) \\ &= \phi_k^*{}^T (V_{k+1} + A_{k+1}^T A_{N-(k+1)} A_{k+1})\phi_k^* \\ &\quad + \beta_{N-k}^T W_k \beta_{N-k} \\ &= (V_{k+1} + A_{k+1}^T A_{N-(k+1)} A_{k+1})(I_n + G_k \beta_{N-k}) \end{aligned} \quad (\text{付 3.1})$$

$$\begin{aligned} \theta_{N-k} &= \sum_{j=k}^{N-1} E\{\|\Phi_2(j+1, k)\|^2 V_{j+1} \\ &\quad + \|\Phi_3(j, k)\|^2 W_j/y^k\} \\ &= E\{\|\Phi_2(k+1, k)\|^2 V_{k+1} + \|\Phi_3(k, k)\|^2 W_k/y^k\} \\ &\quad + \sum_{j=k+1}^{N-1} E\{\|\Phi_2(k+1, k)\|^2 V_{j+1} \\ &\quad + \|\Phi_3(j, k)\|^2 W_j/y^k\} \end{aligned} \quad (\text{付 3.2})$$

ところで、

$$\begin{aligned} E\{\|\Phi_2(k+1, k)\|^2 V_{k+1}/y^k\} &= E\{\|\hat{\mu}_{k/k}^*{}^T V_{k+1}/y^k\} \\ &= \text{tr} \{V_{k+1} C_{k+1/k}\} \end{aligned} \quad (\text{付 3.3})$$

$$E\{\|\Phi_3(k, k)\|^2 w_k / y^k\} = 0 \quad (\text{付 3.4})$$

であり, $\Phi_2(j+1, k)$, $\Phi_3(j, k)$ の定義より,

$$\Phi_2(j+1, k) = \Phi_2(j+1, k+1) + \phi_j^* \hat{\Phi}_1(j, k+1) w_k \quad (\text{付 3.5})$$

$$\Phi_3(j, k) = \Phi_3(j, k+1) + \beta_{N-j} \hat{\Phi}_1(j, k+1) w_k \quad (\text{付 3.6})$$

ここで,

$$\begin{aligned} \Phi_2(j+1, k+1) &= \phi_j^* \sum_{i=k+1}^{j-1} \hat{\Phi}_1(j, i+1) w_i \\ &\quad + \hat{\Phi}_1(j, k+1) (\hat{\phi}_k \hat{\mu}_{k/k}^* + v_k) \\ &\quad + \sum_{i=k+1}^{j-1} \hat{\Phi}_1(j, i+1) v_i \quad (\text{付 3.7}) \end{aligned}$$

$$\Phi_3(j, k+1) = \beta_{N-j} \sum_{i=k+1}^{j-1} \hat{\Phi}_1(j, i+1) w_i \quad (\text{付 3.8})$$

w_k , v_k の定義と, 付録2の結果を用いることにより,

$$\begin{aligned} E\{w_k w_k^T / y^k\} &= K_{k+1} (H_{k+1} C_{k+1/k} H_{k+1}^T + R_{k+1}) K_{k+1}^T \\ &= L_{k+1} \quad (\text{付 3.9}) \end{aligned}$$

$$E\{w_k (\hat{\phi}_k \hat{\mu}_{k/k}^* + v_k)^T / y^k\} = 0 \quad (\text{付 3.10})$$

(付 3.3) ~ (付 3.10) 式を (付 3.2) 式に代入すると, 次式となる.

$$\begin{aligned} \theta_{N-k} &= \text{tr} \{V_{k+1} C_{k+1/k}\} + \text{tr} \{A_{N-(k+1)} L_{k+1}\} \\ &\quad + \sum_{j=k+1}^{N-1} E\{\|\Phi_2(j+1, k+1)\|^2 v_{j+1} \\ &\quad + \|\Phi_3(j, k+1)\|^2 w_j / y^k\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= E\{\theta_{N-(k+1)} / y^k\} + \text{tr} \{V_{k+1} C_{k+1/k}\} \\ &\quad + \text{tr} \{A_{N-(k+1)} L_{k+1}\} = \theta_{N-(k+1)} \\ &\quad + \text{tr} \{V_{k+1} C_{k+1/k}\} + \text{tr} \{A_{N-(k+1)} L_{k+1}\} \quad (\text{付 3.11}) \end{aligned}$$

〈付録4〉 (79) 式の導出

(78) 式右辺第2項の期待値演算において, x_{j+1}^* , $e_k, \dots, e_j$ の同時確率密度関数 $P(x_{j+1}^*, e_k, \dots, e_j / y^k)$ は,

$$\begin{aligned} P(x_{j+1}^*, e_k, \dots, e_j / y^k) &= P(x_{j+1}^* / y^k) P(e_k, \dots, e_j / x_{j+1}^*, y^k) \quad (\text{付 4.1}) \end{aligned}$$

と変形できるので,

$$\begin{aligned} E\{f(x_{j+1}^*, e_k, \dots, e_j) / y^k\} &= E\{E\{f(x_{j+1}^*, e_k, \dots, e_j) / y^k\} / x_{j+1}^*, y^k\} \quad (\text{付 4.2}) \end{aligned}$$

となる. 同様に, 第3項の期待値演算も

$$\begin{aligned} E\{g(u_j^*, e_k, \dots, e_j) / y^k\} &= E\{E\{g(u_j^*, e_k, \dots, e_j) / y^k\} / u_j^*, y^k\} \quad (\text{付 4.3}) \end{aligned}$$

(56), (57), (60), (61) 式より,

$$E\{x_{j+1}^* / y^k\} = \phi_j^* \hat{\Phi}_1(j, k) \hat{\mu}_{k/k}^* \quad (\text{付 4.4})$$

$$E\{u_j^* / y^k\} = \beta_{N-j} \hat{\Phi}_1(j, k) \hat{\mu}_{k/k}^* \quad (\text{付 4.5})$$

となる. (付 4.4), (付 4.5) 式を考慮すると, 確定系での δ_{N-k} の導出と同じように, (79) 式が導出される.