終了時刻が可変なパラメータ同定実験の準最適計画[†]

小 亀 英 己*

Suboptimal Design of Parameter Identification Experiment with Variable End-Time

Hideki KOKAME*

The design problem of a control input for system parameter identification has so far been studied extensively. On the other hand, the importance of end-time selection should be emphasized in a case where the identification experiment is desired to complete quickly.

In the present paper, at each stage of the experiment, allowed is the decision as to whether it is to be stopped, or continued for further measurement by taking some control. This is formulated as a combined optimal problem of control and stopping by adopting a performance index that has a cost term representing the time required for the experiment. Since the optimal design of the experiment needs the optimum cost function of a number of variables, an attempt is made on simplification of the function into such a form that contains a table-type function of fewer variables and a large amount of information about the optimality equation. Utilizing this form, a learning procedure is proposed to obtain a well-trained stopping rule of interest.

By a numerical example, the suboptimal design thus obtained is examined to see its applicability. The results of computer simulation show that it reduces an appreciable amount of cost and improves the rate of correct estimate of uncertain parameter, as compared with the design having a fixed end-time of the experiment.

1. ま え が き

システム・パラメータの同定実験における制御の設計に関しては、Fisherの情報行列に関連した評価規範をとり、制御エネルギーへの制約のもとで最適化するなど^{1),2)}、種々の最適制御問題として定式化され、す

で多くの研究が報告されている³⁾。

従来の研究ではほとんどの場合、同定実験の期間については、事前に固定されると仮定して扱われている。しかし、同定実験がシステムの運転を一時休止して行われる場合には、この仮定は再検討の余地がある。実際、このとき実験所要時間はできるだけ短いことが望ましい。また一方、一般に不確定パラメータの推定精度は、実験時間の長さに大きく依存する点をも当然考慮する必要がある。

このような観点から、本論文では、実験の打ち切りが任意の時点で可能であり、その決定は雑音に汚された観測データに基づいて行うものと考えた。さらに、同定結果および実験所要時間を含むベイズ規範を設定し、総合的な最適実験計画を求める問題として定式化している。

この問題は、あるマルコフ過程に対する制御と停止の結合最適問題⁴⁾に変換される。しかし、最適計画を数値的に得ることは困難であるため、ここでは特に興味のもたれる実験終了条件を、一種の学習過程を通じて訓練し、準最適な実験計画を得る方法が提案される。数値例により、固定終了時刻を有する実験計画と比較しつつ、本方法の有効性を検討する。

2. 問題の定式化

ここでは、システムの定常状態からのゆらぎが、つぎの線形確率系で表されることを既知とする。

$$\begin{aligned} x(i) &= Ax(i-1) + Bu(i-1) + w(i) \\ y(i) &= Hx(i) + v(i) \quad i=1, 2, \dots \end{aligned} \quad (1)$$

ただし、 x, u はそれぞれ d_x, d_u 次元の状態、制御ベクトルであり、観測量 y はスカラーとする。また、系の初期状態 $x(0)$ 、入力雑音 $w(i)$ 、観測雑音 $v(i)$ は、互いに独立な正規確率ベクトルであるとし、その期待値、分散は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} Ex(0) &= \bar{x}(0), & E[x(0) - \bar{x}(0)][x(0) - \bar{x}(0)]^T \\ &= P(0) \end{aligned}$$

[†] 第19回自動制御連合講演会で一部発表(昭51・11)

* 京都大学原子エネルギー研究所 宇治市五ヶ庄

* Institute of Atomic Energy, Kyoto University, Uji
(Received September 26, 1977)

$$\begin{aligned} Ew(i) &= 0, & Ew(i)w(j)^T &= W\delta_{ij} \\ Ev(i) &= 0, & Ev(i)v(j) &= V\delta_{ij} \end{aligned} \quad (2)$$

さらに、(1)、(2)式中のパラメータの不確定性を、一般につぎの有限個のパラメータ集合で表現する。

$$(A_j, B_j, H_j, W_j, V_j, P_j(0), \hat{x}_j(0)) \quad j=1, 2, \dots, J \quad (3)$$

すなわち系の有するパラメータは、上記集合のいずれかであり、これを添字 j で表しておく。ここでは j を確率変数と考え、その事前確率を $\eta_j(0)$ ($j=1, 2, \dots, J$) とする。

さて、ここでいう同定実験とは、ある時点 τ まで制御と観測を続けた後、この間のデータに基づいて j の推定 $\hat{j}$ を出力する過程を指す。この実験に対する評価規範としては、推定結果の正誤、実験所要時間および系の状態に加えられた擾乱を考慮し、

$$z_\tau = \sum_{i=0}^{\tau-1} Q^T(i) S x(i) + \alpha \tau + r j \quad (4)$$

のコスト関数をとることにする。ただし、 S は非負定値対称行列、

$$\begin{aligned} r_{ij} &= r(1 - \delta_{ij}) \quad i, j=1, 2, \dots, J \\ \alpha, r &> 0 \end{aligned} \quad (5)$$

本稿での問題設定の特徴は、実験過程の各時点 m において、実験の継続・終了に関する判断が可能な点である。すなわち、(1) 実験を終了し ($\tau=m$)、推定値 $\hat{j}$ を出力する、あるいは (2) さらに観測を行うため、制御 $u(m)$ を許容領域 U (有界閉集合とする) よりとり、実験を継続する ($\tau>m$)、の2通りの場合が許される。この判断ならびに $\hat{j}$, $u(m)$ の選択には、過去のデータ $\mathfrak{F}_m \triangleq \{u(0), y(1), \dots, u(m-1), y(m)\}$ が利用される。また、この実験が無限に継続する場合を排除するため、

$$P(\tau < \infty) = 1 \quad (6)$$

が要請される。そこで、上述の条件を満たす制御則、実験終了基準、および j の推定規則の組合せから、 z_τ の期待値を最小にするものを求めることが問題となる。

この問題は、 j の事後確率と系の最適状態推定とを、新たな状態量とする制御マルコフ過程の問題に変換される。まず平均コストは、次式のように変形されることに注意する。

$$\begin{aligned} Ez_\tau &= E \left[\sum_{i=0}^{\tau-1} (\alpha + x(i)^T S x(i)) + r j \right] \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} E [I_{\tau > i} (\alpha + x(i)^T S x(i)) + I_{\tau = i} r j] \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} E [I_{\tau > i} (\alpha + E[x(i)^T S x(i) | \mathfrak{F}_i])] \end{aligned}$$

$$+ \sum_{i=0}^{\infty} E [I_{\tau = i} E[r j | \mathfrak{F}_i]] \quad (7)$$

ここで、記号 I_A は集合 A の特性関数を表す。上式右辺の第2項に注目すれば、 $\tau=i$ のとき、最適推定 $\hat{j}^0$ は制御則や実験終了基準にかかわらず、

$$R(\eta(i)) = \min_{j=1, \dots, J} r [1 - \eta_j(i)] \quad (8)$$

の最小を与えるベイズ推定であることがわかる。ここで、 $\eta_j(i)$ は j の事後確率

$$\begin{aligned} \eta_j(i) &= P[j = j | \mathfrak{F}_i] \\ \eta(i) &= [\eta_1(i), \dots, \eta_J(i)]^T \end{aligned} \quad (9)$$

を表す。また

$$\begin{aligned} \hat{x}_j(i) &= E[x(i) | j = j, \mathfrak{F}_i] \\ P_j(i) &= E[(x(i) - \hat{x}_j(i))(x(i) - \hat{x}_j(i))^T | j = j, \mathfrak{F}_i] \end{aligned} \quad (10)$$

とおけば、(7)式右辺第1項に対して、

$$\begin{aligned} Q(\hat{x}(i), \eta(i)) &\triangleq E[x(i)^T S x(i) | \mathfrak{F}_i] \\ &= E[E[x(i)^T S x(i) | j = j, \mathfrak{F}_i] | \mathfrak{F}_i] \\ &= \sum_{j=1}^J \eta_j(i) \{ \hat{x}_j(i)^T S \hat{x}_j(i) + \text{tr}[P_j(i) S] \} \end{aligned} \quad (11)$$

を得る。ただし、 $\hat{x}(i) = [\hat{x}_1(i)^T, \dots, \hat{x}_J(i)^T]^T$ 。結局、(7)式は(8)、(11)式を代入して

$$Ez_\tau = E \left[\sum_{i=0}^{\tau-1} \{ \alpha + Q(\hat{x}(i), \eta(i)) \} + R(\eta(\tau)) \right]$$

と表される。すなわち、未知の量 j , $x(i)$ に依存するコスト z_τ に対し、観測データから計算可能なコスト関数

$$z_\tau = \sum_{i=0}^{\tau-1} Q(\hat{x}(i), \eta(i)) + \alpha \tau + R(\eta(\tau)) \quad (12)$$

を導入すれば、次式が成立している。

$$Ez_\tau = E z_\tau \quad (13)$$

つぎに、 $(\hat{x}(i), \eta(i))$ が制御マルコフ過程となることを示す。(10)式から、 $\hat{x}_j(i)$ は明らかにカルマン・フィルタ

$$\hat{x}_j(i) = A_j \hat{x}_j(i-1) + B_j u(i-1) + K_j v_j(i) \quad (14)$$

$$v_j(i) = y(i) - H_j [A_j \hat{x}_j(i-1) + B_j u(i-1)] \quad (15)$$

で与えられる。ここでは簡単のため、フィルタの収束性が良いなどの理由で、 $P_j(i) = P_j$ を仮定してよい場合を考える。このとき、ゲイン K_j は

$$\begin{aligned} K_j &= P_j H_j^T V_j^{-1} \\ P_j^{-1} &= (A_j P_j A_j^T + W_j)^{-1} + H_j^T V_j^{-1} H_j \end{aligned} \quad (16)$$

を満たしている。また j の事後確率はベイズの定理を用いて、

$$\eta_j(i) = \frac{P(y(i) | j = j, u(i-1), \mathfrak{F}_{i-1})}{P(y(i))} *$$

$$* \frac{P[j=j|u(i-1), \xi_{i-1}]}{u(i-1), \xi_{i-1}} \quad (17)$$

と表現される。(15)式第2項は $u(i-1), \xi_{i-1}$ により定まること、 ν_j は $j=j$ のとき、期待値 0、分散

$$\Gamma_j = H_j(A_j P_j A_j^T + W_j) H_j^T + V_j \quad (18)$$

の白色ガウス過程となることに注意すれば、

$$P[y(i)|j=j, u(i-1), \xi_{i-1}] = \pi(\nu_j(i); 0, \Gamma_j) \quad (19)$$

となることがわかる。ただし $\pi(\cdot|\alpha, A)$ は期待値 α 、分散 A の正規確率密度関数を表す。(17)、(19)式より

$$\eta_j(i) = \pi(\nu_j(i); 0, \Gamma_j) \eta_j(i-1) / \sum_{j=1}^J \quad (20)$$

が導かれる。分母は分子の j に関する総和を表す。ところで、(14)、(20)式の逐次表現をみると、状態 $(\hat{x}(i), \eta(i))$ の遷移は $\nu_j(i)$ を通じて、観測値 $y(i)$ により決定されている。また $y(i)$ の条件付分布は、(17)、(20)式の分母を見較べれば、制御 $u(i-1)$ と $(\hat{x}(i-1), \eta(i-1))$ のみに依存することがわかる。以上の議論から問題は、コスト z_c を有する状態空間 $(\hat{x}, \eta)$ 上の制御マルコフ過程の問題に変換されることが確かめられる。

3. 最適方程式と最適実験計画

真のパラメータ j の推定は、前節でベイズ推定に固定したので、ここでは制御則と実験終了基準の対を実験計画と呼ぶことにし、また

$$g(\hat{x}, \eta) \triangleq \inf E[z_c | \hat{x}(0) = \hat{x}, \eta(0) = \eta] \quad (21)$$

を最適コスト関数と呼ぶ。ここで、下限の範囲は(6)式を満たす実験計画の全体である。前節で得られた制御マルコフ過程の問題に、動的計画法を形式的に適用すれば、つぎの最適方程式

$$g(\hat{x}, \eta) = \min[R(\eta), Q(\hat{x}, \eta) + \alpha + \min_{u \in U} [T^* g](\hat{x}, \eta)] \quad (22)$$

が導出される。ここで T^* は、関数 $\phi(\hat{x}, \eta)$ に対し、1時点先の ϕ の値の条件付期待値

$$E[\phi(\hat{x}(i+1), \eta(i+1)) | u(i) = u, \xi_i] = [T^* \phi](\hat{x}(i), \eta(i)) \quad (23)$$

を与える積分作用素で、一般に

$$[T^* \phi](\hat{x}, \eta) = \sum_{i=1}^J \eta_i \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\hat{x}^+, \eta^+) \times \pi(\nu_i; 0, \Gamma_i) d\nu_i \quad (24)$$

と書ける。ただし、 $\hat{x}^+, \eta^+$ は(14)、(20)式で $\hat{x}(i-1) = \hat{x}, \eta(i-1) = \eta$ とし、 ν_j に

$$\nu_j = \nu_i + H_i[A_i \hat{x}_i + B_i u] - H_j[A_j \hat{x}_j + B_j u] \quad j=1, 2, \dots, J \quad (25)$$

を代入して得られるものである。なお、この種の結合最適化問題に関する理論的取扱いについては、文献4)を参照されたい。そこでの結果を適用すれば、以下の性質が確かめられる。

i) 終端コスト R の有界性から、初期関数として R をとれば、(22)式への逐次代入により、最適コスト関数 g に単調減少収束する関数列が得られる(同文献定理3)。

ii) 条件 $\alpha > 0$ から、 g は(22)式の一意解である。さらに、(22)式右辺で最小を与える制御 $u^0(\hat{x}, \eta)$ を用い、状態 $(\hat{x}(i), \eta(i))$ が領域

$$\Omega = \{(\hat{x}, \eta) | R(\eta) \leq g(\hat{x}, \eta)\} \quad (26)$$

に初めて到達した時刻 τ^0 に、実験を終了するのが最適な実験計画である(同文献定理4)。

4. 準最適実験計画

一般に最適実験計画を得るには、関数 g を求める必要がある。しかし、この関数は $J(d_s+1)$ 個の変数を有しており、前節の性質 i) で述べたような計算法は、通常実行不可能である。この“次元の呪い”を回避するため、終端時刻固定の場合の最適制御問題においては、閉ループ・フィードバック最適⁶⁾、 m -観測フィードバック最適⁷⁾などの準最適概念が導入され、さらに Tse らにより、適応概念と共に種々の適用例が研究されている⁷⁾。また、終端時刻が自由な場合も扱われた例はあるが、本稿での設定とは本質的に異なっている⁸⁾。

ここで提案する手法は、基本的に、最適コスト関数を近似する関数 γ を構成し、前節の性質 ii) で説明されたと同様の手順を γ に適用して、準最適実験計画を得ようとするものである。そのとき、 γ の値は簡単な代数演算と、小次元の表形関数 f の引用から定まる必要がある。そこで、方程式(22)の形を利用して

$$\gamma(\hat{x}, \eta) = \min[R(\eta), Q(\hat{x}, \eta) + \alpha + f] \quad (27)$$

としてみる。(22)式の積分項に相当している関数 f は、問題の特徴を考えれば、主として η に依存すると考えられる。実際、性質 i) を考慮して、 $T^* R$ についてみれば、 R が区分的線形関数であること、および自明の等式

$$E[\eta(i+k) | \xi_i] = \eta(i) \quad k=1, 2, \dots \quad (28)$$

から、ある j に対して $\eta_j \neq 1$ であれば、 $\hat{x}$ や u に関係せず

$$[T^* R](\hat{x}, \eta) \simeq R(\eta) \quad (29)$$

となる。一般に、上の仮定が満たされるときに、実験終了に関する判断が重要となる点を併せ考慮すれば、 $\hat{x}$ への依存性を無視して $f(\eta)$ としても、第1近似の

意味では十分であろう。ここで(28)式と(20), (15)式から理解されるように、事後確率に与える制御の効果は、その期待値ではなく分散に現れることに注意する。次時点における真の添字に対する事後確率 $\eta_j(i+1)$ を大きくする意味では、この分散は大であるほど望ましい。いま、事後確率 $\eta_j(i)$ が $\eta_L(i) > \eta_M(i) \geq \dots$ の関係にあるとき、 $j=L$ と $j=M$ の比較を重視すれば、次式の最小を与える制御 $u_s(i)$ は上述の意味で有効である。

$$\begin{aligned} \max_{u \in U} & [H_L A_L \hat{x}_L(i) - H_M A_M \hat{x}_M(i)] \\ & + [H_L B_L - H_M B_M] u \end{aligned} \quad (30)$$

この制御は、 j を L または M と想定した場合に、予想される観測値の差を最大にするものである。以後の議論および計算では、この準最適制御 u_s を用いることにする。

残る問題は、関数 f を合理的に与えることであるが、ここでは実験終了基準の学習過程を通じて、 f の改善をはかることにする。すなわち実験前段階に $f=R$ を設定し、実験過程の各時点 i では

$$R(\eta(i)) > Q(\hat{x}(i), \eta(i)) + \alpha + [T u_s \gamma](\hat{x}(i), \eta(i)) \quad (31)$$

のとき実験を継続すると同時に、 $f(\eta(i))$ をその際計算される $T u_s \gamma$ の値に更新しておく。したがって、同定実験の先行経験は表形関数 f に反映されるので、初期の段階に経験したのと類似の観測系列が出現した場合には、より優れた意思決定が行われると考えられる。

ただし、 f は関数形が制限されているため、この学習過程を通じて、ある関数に収束するというものではないことに注意しておく。

5. 数 値 例

前節で述べた準最適実験計画を、原子炉反応度の推定問題に適用してみる。なお、ここでは比較的ゆるやかに変化する反応度成分を推定の対象としている。原子炉モデルの詳しい説明は省略して、系は

$$\dot{n} = \frac{\rho - \beta}{\Lambda} n + \lambda c + \frac{u(t)}{\Lambda} + w_1(t) \quad (32)$$

$$\dot{c} = \frac{\beta}{\Lambda} n - \lambda c + w_2(t)$$

で記述されるものとし、

$$y(t) = n(t) + v(t) \quad (33)$$

を観測するものとする。反応度 ρ 以外のパラメータなどは、つぎのように仮定する。

$$\begin{aligned} \beta &= 0.007, & \Lambda &= 0.001 \text{ (sec}^{-1}\text{)} \\ \lambda &= 0.08 \text{ (sec}^{-1}\text{)} \end{aligned}$$

Fig. 1 Learning process of stopping condition of identification experiment

$$E w_1^2(t) = 0.025, \quad E w_2^2(t) = 0.0025$$

$$E w_1(t) w_2(t) = 0, \quad E v^2(t) = 0.0001$$

$$r = 300$$

$$\alpha = 1$$

$$S = \begin{bmatrix} 500 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$U = \{u \mid |u| \leq 0.001\}$$

簡単のため、不確定な ρ に対してはつぎの3種の値

$$\rho_1 = -0.005, \quad \rho_2 = -0.001, \quad \rho_3 = 0.003$$

を考える。このとき、系(32)は ρ_1, ρ_2 に対して安定、 ρ_3 に対しては不安定となっている。また、観測器出力(33)は時間幅 $\Delta = 0.1 \text{ sec}$ でサンプルされ、この間制御入力是一定値をとるものと仮定して、連続時間系(32)から $x(i) = [n(i\Delta), c(i\Delta)]^T$ を状態変数とする離散系(1)を得た。

なお、計算機シミュレーションに当っては、便宜的に初期状態を $x(0) = 0, \hat{x}(0) = 0$ とし、また実験前には ρ_i は等しく確からしいものと考えて、 $\eta(0) = [1/3, 1/3, 1/3]^T$ と仮定した。この事前確率を学習過程においても考慮するために、真のパラメータ j が 1, 2, 3 である場合を順に設定することにし、これを1単位として500回繰返した。

Fig. 1 中の1点は、10単位の実験におけるコストの平均値などを表す。この図から、繰返しの進行と共に実験時間が増大し、ある段階以降では実験時間とコスト z_e とは密接に関連していることがわかる。これは、最終的に終端コスト R が、非常に小さくなるまで実験が続けられたためである。なお図中 z_e の大きい値は、推定 $\hat{j}^0$ の誤答が多いことを示している。参考のため、全過程を通じての $z_e, \bar{z}_e$ の平均は、それぞれ 27.37, 27.49 であった。

この学習過程で、最終的に得られる関数 γ を固定すれば、実用上十分であると考えられる。この γ を用い、(31)式による意思決定を行う準最適実験計画 (subo-

Fig. 2 Effect of the learning for each case of j
(○: learning process, ●: suboptimal design 1)

ptimal design 1) をシミュレートした。このとき、学習の効果を明確にするため、前述の学習過程と同一の観測値が再現されるものとした。Fig. 2 には、この結果を j の値に従って示してある。図から約 70 回の繰返しで、ほぼ学習の効果が飽和していたことがわかる。

関数 $\bar{\tau}$ が、 g のよい近似を与えるものと判断されれば、実験終了に関する意思決定の際、積分演算を含む (31) 式によるのは非効率的である。すなわち、前節の性質 ii) で述べたような $\bar{\tau}$ と R の大小比較のみによる意思決定で十分と考えられる。この準最適計画 (suboptimal design 2) および前出の方法に対する主要な結果を、Table 1 に示す。表中 R_{ce} は推定 $\hat{j}^0$ の正答率、すなわち $j = \hat{j}^0$ となる割合である。この表から、積分演算を行わないことによるコストの増加は、1% 弱にすぎないことがわかる。

実験終了時刻を可変とする問題設定の有用性を検討するため、固定した終了時刻 N をもつ場合もシミュレートしてみた。Fig. 3 には、(a) 準最適制御 u_s をとる場合と、(b) $u=0$ の場合が示される。両者の間では明らかに (a) が優れている。ただ N が増大したとき、(a) ではコスト $\bar{z}_N$ が急速に増加しているが、これは制御のため系への擾乱を評価するコスト成分が増大した結果である。同図 (a) から、終了時刻固定の場合、コストの最小値は 50.69 ($N=14$) であり、Table 1 をみると、準最適計画によりコストはほぼ半減するこ

Table 1 Main results of computer simulation

	j	Learning process	Suboptimal design 1	Suboptimal design 2
$\bar{z}_\tau$	1	32.41	31.55	32.21
	2	33.35	32.45	32.33
	3	16.70	16.46	16.51
	Ave.	27.49	26.82	27.02
τ	1	14.89	15.29	15.19
	2	13.87	14.44	14.58
	3	7.17	7.28	7.32
	Ave.	11.98	12.34	12.36
R_{ce}^*	1	0.988	0.988	0.990
	2	0.954	0.958	0.956
	3	0.984	0.992	0.994
	Ave.	0.975	0.979	0.980

* rate of correct estimate of j^0

Fig. 3 Experiment with fixed end-time N , where η_j denotes the average of $\eta_j(N)$ in the case $j=j$

とがわかる。

また推定の正答率 R_{ce} については、Table 1 から準最適計画では約 0.98 であるが、これに要した平均実験時間 $E\tau=12\sim13$ の値に終了時刻を固定した場合、 R_{ce} は約 0.92 にすぎない (Fig. 3(a) 参照)。これらの結果は、本稿の問題設定および準最適実験計画が有力であることを示している。

6. むすび

パラメータ同定実験の新たな最適設計問題として、

制御に加え、実験終了基準をも任意に与えうとした定式化を示し、この問題に有効な準最適実験計画を提案した。

本論文では数値例により、終了時刻を固定する従来の実験計画に比較して、本実験計画は所要コストを大幅に低減させること、および実験所要時間に比しパラメータ同定の正答率を改善するものであることなどを確かめた。

終りに、日頃ご援助・激励をいただいている京都大学 服部嘉雄教授に深く感謝いたします。

参考文献

- 1) M. Aoki and R. M. Staley: On Input Signal Synthesis in Parameter Identification, *Automatica*, **6**, 431/440 (1970)
- 2) A. A. Lopez-Toledo and M. Athans: Optimal Policies for Identification of Stochastic Linear Systems, *IEEE Trans. on Automatic Control*, **AC-20-6**, 754/765 (1975)
- 3) R. K. Mehra: Optimal Input Signals for Parameter Estimation in Dynamic Systems-Survey and New Results, *IEEE Trans. on Automatic Control*, **AC-19-6**, 753/768 (1974)
- 4) 小亀: 離散形確率系における制御と停止の結合最適問題, 計測自動制御学会論文集, **12-6**, 674/680 (1976)
- 5) S. E. Dreyfus: Some Types of Optimal Control of Stochastic Systems, *SIAM J. Control*, **2**, 120/134 (1964)
- 6) R. E. Curry: A New Algorithm for Suboptimal Stochastic Control, *IEEE Trans. on Automatic Control*, **AC-14-5**, 533/536 (1969)
- 7) E. Tse, Y. Bar-Shalom and L. Meier, III: Wide-Sense Adaptive Dual Control for Nonlinear Stochastic Systems, *IEEE Trans. on Automatic Control*, **AC-18-2**, 98/108 (1973)
- 8) E. Tse and Y. Bar-Shalom: Adaptive Dual Control for Stochastic Nonlinear Systems with Free End-Time, *IEEE Trans. on Automatic Control*, **AC-20-5**, 670/675 (1975)