不規則観測データに基づく線形確率 システムのモデリング[†]

砂 原 善 文*・大 住 晃*・福 田 得 夫**

On Modelling of Linear Stochastic Systems from Noisy Data

Yoshifumi SUNAHARA*, Akira OHSUMI* and Tokuo FUKUDA**

In this paper, a method is presented for the system modelling from noisy data, where the unknown system model is specified by an n -th order linear stochastic differential equation with time-varying coefficients. The goal of the system modelling is to estimate the system order n and to identify the unknown time-varying coefficients.

A decision rule is first established on the notion of the multi-hypothesis testing. Secondly, a procedure to estimate simultaneously the unknown system order and the unknown coefficients is given within the framework of estimation theory. An algorithm is described for determining the system model from noisy data where the likelihood-ratio function plays a key role. Salient features of the proposed method are emphasized by two examples. One is a simulation experiment which illustrates the extent of the theoretical results obtained. The other is an application of the present method to geophysical data by which a dynamical model is established. This simulation experiment has shown a possibility of an extensive use of this method to identify earthquake waves.

1. 緒 言

システム・モデリングの方法論の中で、最近特に、(i)そのモデルを何階の微分方程式によって記述すればよいか、(ii)またその微分方程式の係数をどのようにして決定すればよいか、というシステムの次元とパラメータの同時同定という問題が重要視されている。これらの問題に対応する実例は非常に多いが、特に本

研究では、種々の地震波形に対する構造物の動特性解析を究極の目的として、地震波形を同定する数学モデルを確立することを目的としている。すなわち地震波を確率過程とみなし、そのうちのただ一本の見本過程である地震波形をより所として、これから種々の地震観測波形を同定できるような数学モデルを確立しようというのである。

観測された不規則データから、システムの次元の同定を含めたシステム同定問題に関しては、すでに数多くの研究が報告されている。その中で特に、確率過程としての取扱いを行った研究のみを眺めてみると、以下のように述べられる。たとえば、Box & Jenkins¹⁾、Chow²⁾ はシステム・モデルとして ARMA モデルを採用し、その次数決定には、それぞれ推定残差の自己相関関数、および観測過程の共分散マトリクスを利用する方法を、また Mehra³⁾ は、最適フィルタのイノベーション系列の白色性の検定によって次数を決定する方法を提案している。また Woodside⁴⁾ は、結合積率マトリクスを用いた 3 種類の次数決定法を考察している。さらに、赤池^{5), 6)} は情報量規準に基づいた次数決定法を、また古田⁷⁾、Tse & Weinert⁸⁾ は Kalman の最小実現理論⁹⁾ の立場からシステムの次数決定の方法を提案している。これらの方法は、いずれも時間不変な係数をもつ離散時間システムに対してのみ有効なのである。以上、歴史的な展望からもわかるように、前述の問題(i)および(ii)を解決するための根本的な態度を確立しておくことは非常に重要である。本論文においては、非定常確率過程を同定するという立場に立ち、そのモデルとして、時変係数をもつ確率微分方程式を採用することにする。このようなモデルは、地震波のような見本過程に対するモデルを確立するような場合に特に有効である。

以下本論文では、原則として、マトリクスは大文字で、ベクトルおよびスカラー量は小文字で表現し、

[†] 第 16 回計測自動制御学会学術講演会で発表 (昭 52・8)

* 京都工芸繊維大学工学部 京都市左京区松ヶ崎御所海道町

** 大阪大学工学部 吹田市大字山田上

* Faculty of Polytechnic Sciences, Kyoto Institute of Technology, Kyoto

** Faculty of Engineering, Osaka University, Osaka
(Received August 2, 1977)

“ $'$ ” は転置を表す。ノルム $\|z\|_A$ は $(z'Az)^{1/2}$ を表し、 $\|\cdot\|$ は通常のユークリッド・ノルムを表す。 $\mathcal{E}\{\cdot\}$ は期待値演算子を表し、 $p\{\cdot\}$ は確率密度関数を表す。また同様に、 $\mathcal{E}\{\cdot|\cdot\}$ 、 $p\{\cdot|\cdot\}$ は、それぞれ $*$ によって条件付けられた条件付期待値および条件付確率密度関数を表す。

2. 数学モデルおよび問題の記述

まず、非常に一般的な理論展開を行うために、システムの数学モデルを

$$dx(t) = A(t)x(t)dt + G(t)dw(t) \quad (0 \leq t \leq T) \quad (1)$$

によって記述し、また

$$dy(t) = H(t)x(t)dt + R(t)dv(t), \quad y(0) = 0 \quad (2)$$

によって決定される m 次元過程 $\{y(t), 0 \leq t \leq T\}$ を観測データとして取得しているものとする。(1)式および(2)式において、 $x(t)$ は n 次元状態ベクトル、 A, G, H および R は、それぞれ、 $n \times n$, $n \times d_1$, $m \times n$, $m \times d_2$ 次元マトリクスであり、 $w(t)$, $v(t)$ は、互いに独立な d_1 および d_2 次元の標準 Brown 運動過程である。以後(1)式および(2)式をまとめて、システム Σ_0 と呼ぶことにする。

本論文では、システム Σ_0 の次元 n は未知であり、また

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 0 & 1 \\ -a_n(t) & -a_{n-1}(t) & \cdots & -a_1(t) \end{bmatrix} \quad (3)$$

であるが、ここで $\{a_i(t); i=1, 2, \dots, n\}$ は未知で、

$$a_i(t) = \sum_{k=1}^N \frac{1}{(k-1)!} a_{ik} t^{k-1} \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (4)$$

のように表されるものと仮定する。ただし、 $\{a_{ik}; i=1, 2, \dots, n, k=1, 2, \dots, N\}$ は未知の定数であり、 N はある定められた正の整数とする。また $R(t)$ は既知のマトリクスであり、 $H(t)$ および $G(t)$ はつぎのようなマトリクスであるとする。すなわち、

$$H(t) = \begin{bmatrix} h_1(t) & & 0 & 0 \cdots 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & & h_m(t) & 0 \cdots 0 \end{bmatrix} \quad (n \geq m) \quad (5.a)$$

$$H(t) = \begin{bmatrix} h_1(t) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & h_n(t) \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (n < m) \quad (5.b)$$

$$G(t) = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \\ g_{d_1}(t) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & g_1(t) \end{bmatrix} \quad (n \geq d_1) \quad (6.a)$$

$$G(t) = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & g_n(t) & & 0 \\ & \ddots & & & \ddots & \\ 0 & & 0 & & & g_1(t) \end{bmatrix} \quad (n < d_1) \quad (6.b)$$

ただし、 $\{h_i(t); i=1, 2, \dots, n\}$ および $\{g_j(t); j=1, \dots, d_1\}$ は先験的に既知と仮定する。したがって、問題は取得された観測データの集積 $Y_0^T \triangleq \{y(t), 0 \leq t \leq T\}$ に基づいて、(i) システムの次数の決定、および (ii) 未知パラメータ $\{a_{ik}\}$ の同定、という 2 点に要約することができる。

3. システム・モデルの構造決定

3.1 構造決定のための準備

(1)式の次数が ν であるという仮説を H_ν ($\nu=1, \dots, K$) とすれば、仮説 H_ν が受容されたという仮定のもとでは、観測過程は

$$dy(t) = H^{(\nu)}(t)x^{(\nu)}(t)dt + R(t)dv(t), \quad y(0) = 0 \quad (7)$$

によって与えられる。ここで $x^{(\nu)}(t)$ は ν 次元状態ベクトルであり、

$$dx^{(\nu)}(t) = A^{(\nu)}(t)x^{(\nu)}(t)dt + G^{(\nu)}(t)dw(t) \quad (0 \leq t \leq T) \quad (8)$$

の解過程である。ただし、 $A^{(\nu)}(t)$, $H^{(\nu)}(t)$ および $G^{(\nu)}(t)$ は、それぞれ、 $A(t)$, $H(t)$, $G(t)$ と同じ形をもつ $\nu \times \nu$, $m \times \nu$ および $\nu \times d_1$ 次元のマトリクスである。以後(7), (8)式を合せて、システム $\Sigma^{(\nu)}$ と呼ぶことにする。

ここで、 $A^{(\nu)}(t)$ に含まれている未知パラメータ $a_{ik}^{(\nu)}(t) = \sum_{k=1}^N a_{ik}^{(\nu)} t^{k-1} / (k-1)! \quad (i=1, 2, \dots, \nu)$ をも状態変数に組み込み、つぎのように定義される $(\nu + \nu N)$ 次元ベクトル $z^{(\nu)}(t)$ を新しく導入する。すなわち、

$$\left. \begin{aligned} z_i^{(\nu)}(t) &= x_i^{(\nu)}(t) \quad (i=1, 2, \dots, \nu) \\ z_i^{(\nu)}(t) &= \sum_{k=i-\nu}^N \frac{1}{(k+\nu-i)!} a_{ik}^{(\nu)} t^{k+\nu-i} \quad (i=\nu+1, \dots, \nu+N) \\ &\vdots \\ z_i^{(\nu)}(t) &= \sum_{k=i-\{\nu+(\nu-1)N\}}^N \frac{1}{\{k+\nu+(\nu-1)N-i\}!} \\ &\quad \times a_{ik}^{(\nu)} t^{k+\nu+(\nu-1)N+i} \quad (i=\nu+(\nu-1)N+1, \dots, \nu+\nu N) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

したがって、システム $\Sigma^{(\nu)}$ はつぎのような非線形シ

システム $\tilde{\Sigma}^{(\nu)}$ として書き直すことができる。すなわち、

$$\tilde{\Sigma}^{(\nu)} \begin{cases} dz^{(\nu)}(t) = F^{(\nu)}[z^{(\nu)}(t)]z^{(\nu)}(t)dt \\ \quad + C^{(\nu)}(t)dw(t) \\ dy(t) = M^{(\nu)}(t)z^{(\nu)}(t)dt + R(t)dv(t) \end{cases} \quad (10)$$

ただし、マトリクス $F^{(\nu)}[z^{(\nu)}(t)]$, $C^{(\nu)}(t)$ および $M^{(\nu)}(t)$ の具体的な構造は付録 1 に示す。

3.2 尤度比関数

システム $\tilde{\Sigma}^{(\nu)}$ に対しては、仮説 H_ν を受容したものと仮定しているため、観測過程は、

$$H_\nu: dy(t) = M^{(\nu)}(t)z^{(\nu)}(t)dt + R(t)dv(t), \\ y(0) = 0 \quad (12)$$

と表すことができる。ここで、

$$H_0: d\tilde{y}(t) = R(t)d\tilde{v}(t), \quad \tilde{y}(0) = 0 \quad (13)$$

によって定義される $\tilde{y}(t)$ -過程を導入し、さらに H_ν および H_0 のもとでの観測過程(12)および(13)によって生起される測度を $\mathcal{P}_\nu$ および $\mathcal{P}_0$ とすれば、これらの間につきの補題が成り立つ。

〔補題〕 $\mathcal{P}_\nu$ および $\mathcal{P}_0$ をそれぞれ、(12)および(13)によって生起される測度とする。このとき、 $\mathcal{P}_\nu$ は $\mathcal{P}_0$ に対して絶対連続であり、 $\mathcal{P}_\nu$ の $\mathcal{P}_0$ に関する Radon-Nikodym の微係数は次式で与えられる。

$$\frac{d\mathcal{P}_\nu}{d\mathcal{P}_0} = \exp \left\{ \int_0^T [\hat{z}^{(\nu)}(t|t)]' [M^{(\nu)}(t)]' \{R(t)R'(t)\}^{-1} \right. \\ \times dy(t) \\ \left. - \frac{1}{2} \int_0^T \|M^{(\nu)}(t)\hat{z}^{(\nu)}(t|t)\|^2_{\{R(t)R'(t)\}^{-1}} dt \right\} \quad (14)$$

ここで、 $\hat{z}^{(\nu)}(t|t) \triangleq \mathcal{E}\{z^{(\nu)}(t) | Y_0^t, H_\nu\}$ である。

この補題の証明は、文献 10), 11), 12) の結果より明らかであるので省略する。

ここで新しくベクトル $\hat{\xi}^{(\nu)}(t|t)$ およびマトリクス $H_m(t)$ を

$$\hat{\xi}^{(\nu)}(t|t) \triangleq [\hat{z}_1^{(\nu)}(t|t), \dots, \hat{z}_m^{(\nu)}(t|t)]' \\ = [\hat{x}_1^{(\nu)}(t|t), \dots, \hat{x}_m^{(\nu)}(t|t)]' \\ H_m(t) \triangleq \text{diag}[h_1(t), \dots, h_m(t)] \quad (15)$$

のように定義すると、(14)式は(9)および(A.3)式を考慮することにより、つぎようになる。

$$\frac{d\mathcal{P}_\nu}{d\mathcal{P}_0} = \exp \left\{ \int_0^T [\hat{\xi}^{(\nu)}(t|t)]' H_m(t) \{R(t)R'(t)\}^{-1} dy(t) \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \int_0^T \|H_m(t)\hat{\xi}^{(\nu)}(t|t)\|^2_{\{R(t)R'(t)\}^{-1}} dt \right\} \quad (16)$$

ただし、(15)式において、 $\nu < m$ のときは $i = \nu + 1, \dots, m$ に対して $\hat{z}_i^{(\nu)}(t|t) = 0, \hat{x}_i^{(\nu)}(t|t) = 0, h_i(t) = 0$ とする。

さて、ここで尤度比関数 $\Lambda^{(\nu)}(t)$ を

$$\Lambda^{(\nu)}(t) \triangleq \frac{p\{Y_0^t | H_\nu\}}{p\{Y_0^t | H_0\}} \quad (\nu = 1, 2, \dots, K) \quad (17)$$

(ただし $\tilde{Y}_0^t \triangleq \{\tilde{y}(s), 0 \leq s \leq t\}$) と定義すれば、この尤度比関数 $\Lambda^{(\nu)}(t)$ と、(16)式の Radon-Nikodym 微係数 $d\mathcal{P}_\nu/d\mathcal{P}_0$ との間には、

$$\frac{d\mathcal{P}_\nu}{d\mathcal{P}_0} = \frac{p\{Y_0^T | H_\nu\}}{p\{Y_0^T | H_0\}} = \Lambda^{(\nu)}(T) \quad (18)$$

という関係があるから¹¹⁾、

$$\Lambda^{(\nu)}(t) = \exp \left\{ \int_0^t [\hat{\xi}^{(\nu)}(s|s)]' H_m(s) \{R(s)R'(s)\}^{-1} \right. \\ \times dy(s) \\ \left. - \frac{1}{2} \int_0^t \|H_m(s)\hat{\xi}^{(\nu)}(s|s)\|^2_{\{R(s)R'(s)\}^{-1}} ds \right\} \quad (19)$$

を得る。伊藤の連鎖則を適用すれば、(19)式によって与えられる尤度比関数 $\Lambda^{(\nu)}(t)$ は、つぎの微分方程式の解であることが証明されている¹¹⁾。すなわち

$$\begin{cases} d\Lambda^{(\nu)}(t) = \Lambda^{(\nu)}(t) [\hat{\xi}^{(\nu)}(t|t)]' \\ \quad \times H_m(t) \{R(t)R'(t)\}^{-1} dy(t) \\ \Lambda^{(\nu)}(0) = 1 \quad (\nu = 1, 2, \dots, K) \end{cases} \quad (20)$$

3.3 システム次数の決定

総平均損失 $\bar{C}$ を、つぎのように定義する。

$$\bar{C} = \sum_{i=1}^K \sum_{\nu=1}^K c_{i\nu} P[H_\nu] \int_{S_i} p\{Y_0^T | H_\nu\} dY_0^T \quad (21)$$

ただし、 $c_{i\nu}$ は仮説 H_ν が真であるのに、 H_i を受容したときのコストであり、 $P[H_\nu]$ は仮説 H_ν に対する先験的確率、また S_i は仮説 H_i を受容すべきところの観測データ Y_0^T の部分空間である。ここで簡単のために、 $c_{i\nu} = 1 (i \neq \nu)$, $c_{i\nu} = 0 (i = \nu)$ とすれば、(21)式は、

$$\bar{C} = \sum_{\nu=1}^K P[H_\nu] \int_{S-S_\nu} p\{Y_0^T | H_\nu\} dY_0^T \quad (22)$$

となる。ただし S は観測データ Y_0^T の全空間であり、 $S_\nu (\nu = 1, 2, \dots, K)$ の直和、 $S = S_1 \oplus \dots \oplus S_K$ とする。したがって(22)式より、あるひとつの ν に対して、総平均損失 $\bar{C}$ が最小になるように、観測空間 S_ν を選ぶには $i \neq \nu$ なるすべての i に対して、

$$P[H_i] p\{Y_0^T | H_i\} < P[H_\nu] p\{Y_0^T | H_\nu\} \quad (23)$$

が成立するようにすればよいことがわかる(付録 2 参照)。また、先験的確率はすべて等しい。すなわち、 $P[H_1] = P[H_2] = \dots = P[H_K]$ においても一般性は失われないのでこのように仮定することにより、(17), (23)式からシステムの次元推定に関するつぎのような決定則を得る。

〈決定則〉 時間区間 $[0, T]$ において取得された観測値の集積 $Y_0^T = \{y(t), 0 \leq t \leq T\}$ に対して、(19)または(20)式によって得られる尤度比関数 $\Lambda^{(\nu)}(T)$

($\nu=1, 2, \dots, K$) が最大となるような仮説 H_ν を受容し、システム(1)の次数を $n=\nu$ として決定する。

さて、(19)または(20)式を計算すれば尤度比関数 $A^{(\nu)}(t)$ が求まるのであるが、この計算には(15)式で定義された $\hat{\xi}^{(\nu)}(t|t)$ を求める必要がある。次章では、状態推定と未知パラメータ $\{a_{ik}; i=1, 2, \dots, n, k=1, 2, \dots, N\}$ の同定に関して述べる。

4. パラメータ同定

3章において定義したシステム $\tilde{\Sigma}^{(\nu)}$ において、状態量ベクトル $z^{(\nu)}(t)$ に対する推定問題は、明らかに非線形推定問題となる。非線形推定問題に対する近似解法は種々提案されているが、ここでは3次以上の統計学的モーメントを無視する、いわゆる truncated second-order filter¹³⁾を採用することにする。システム $\tilde{\Sigma}^{(\nu)}$ に対してその結果は、

$$\begin{aligned} d\hat{z}^{(\nu)}(t|t) = & \left[F^{(\nu)}[\hat{z}^{(\nu)}(t|t)]\hat{z}^{(\nu)}(t|t) \right. \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\nu+\nu N} \sum_{j=1}^{\nu+\nu N} e_{ij}^{(\nu)} p_{ij}^{(\nu)}(t|t) \left. \right] dt \\ & + P^{(\nu)}(t|t)[M^{(\nu)}(t)]' \{R(t)R'(t)\}^{-1} \\ & \times \{dy(t) - M^{(\nu)}(t)\hat{z}^{(\nu)}(t|t)dt\} \quad (24) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dP^{(\nu)}(t|t)}{dt} = & B^{(\nu)}[\hat{z}^{(\nu)}(t|t)]P^{(\nu)}(t|t) \\ & + P^{(\nu)}(t|t)[B^{(\nu)}[\hat{z}^{(\nu)}(t|t)]]' \\ & + C^{(\nu)}(t)[C^{(\nu)}(t)]' \\ & - P^{(\nu)}(t|t)[M^{(\nu)}(t)]' \{R(t)R'(t)\}^{-1} \\ & \times M^{(\nu)}(t)P^{(\nu)}(t|t) \quad (25) \end{aligned}$$

となる。ただし $P^{(\nu)}(t|t) \triangleq \text{cov.}[z^{(\nu)}(t)|Y_0^T, H_\nu]$ であり、 $e_{ij}^{(\nu)}$ は $j=\nu+(i-1)N+1$ のとき、

$$e_{ji}^{(\nu)} = \underbrace{[0, \dots, 0, -1]}_{\nu} \underbrace{, 0, \dots, 0]}_{\nu N} \text{ で、 } j \neq \nu+(i-1)N$$

+1 のとき、零である ($\nu+\nu N$) 次元のベクトルである。 $B^{(\nu)}[\hat{z}^{(\nu)}(t|t)]$ は付録1に示してある。

5. デジタル・シミュレーション

観測データ $\{y(t), 0 \leq t \leq T\}$ は

$$dy(t) = x_1(t)dt + r dv(t), \quad y(0) = 0 \quad (26)$$

というスカラー観測過程によって得られるとする。このとき、真のシステム出力 $x_1(t)$ は、つぎの2次元システムの解過程として得られるとする。

$$d \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} 0 \\ g \end{bmatrix} dw(t) \quad (27)$$

ここで、 r, g は定数であり、 $r=0.5, g=0.1$ とし、さらに(27)式中の未知パラメータは、シミュレーション

においては、その真値を $a_1=0.5, a_2=0.06$ と設定し、 $x_1(0)=3, x_2(0)=-0.6$ とした。ここでは、システム次数の決定法の有効性の確認に主眼をおくことにし、システム・パラメータはすべて簡単のために定数とした。本論文で提案したシステムの構造決定法の手順を、本例題について述べると、つぎのようになる。

(i) 観測データの取得

まず、実際のシステムを観測することによりデータ $Y_0^T = \{y(t), 0 \leq t \leq T\}$ を得る。シミュレーションにおいては、(26), (27)式に対する離散表現を行い、 $dt \equiv \delta t = 10^{-4}$ とした。また計算機により創成した正規乱数によって正規性白色雑音 $\eta(t)$ を模倣し、さらに、この $\eta(t)$ と Brown 運動過程 $v(t)$ との間の関係 $v(t) = \int_0^t \eta(s)ds$ によって $v(t)$ を得た。さらに別の母集団から同様に $w(t)$ を得、これらを(26), (27)式に用いることにより観測データ Y_0^T を生成した。

(ii) 仮説 H_ν の設定

シミュレーションでは、仮説の個数 K は $K=5$ とし、仮説 H_ν のもとでの未知パラメータ $\{a_i^{(\nu)}; i=1, 2, \dots, \nu\}$ は定数であるものとした。

(iii) 尤度比関数の計算

仮説 H_ν のもとで、ベクトル $z^{(\nu)}$ を

$$\begin{aligned} z_i^{(\nu)} & \triangleq x_i^{(\nu)} \quad (i=1, 2, \dots, \nu) \\ & \triangleq a_{i-\nu}^{(\nu)} \quad (i=\nu+1, \dots, 2\nu) \end{aligned} \quad (28)$$

と定義すると、システム $\tilde{\Sigma}^{(\nu)}$ は

$$\tilde{\Sigma}^{(\nu)} \begin{cases} dz^{(\nu)} = F^{(\nu)}[z^{(\nu)}]z^{(\nu)}dt + c^{(\nu)}dw \\ dy = z_1^{(\nu)}dt + r dv \end{cases} \quad (29)$$

$$dy = z_1^{(\nu)}dt + r dv \quad (30)$$

と記述できる。ただしここで、

$$F^{(\nu)}[z^{(\nu)}] = \left\{ \begin{array}{c|c} \begin{matrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} -z_{2\nu}^{(\nu)} & \dots & -z_{\nu+1}^{(\nu)} \\ & & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \end{array} \right\},$$

$$c^{(\nu)} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right\} \begin{matrix} \nu-1 \\ \\ \nu \end{matrix} \quad (31)$$

である。この非線形システム $\tilde{\Sigma}^{(\nu)}$ に対して、近似非線形フィルタを(24), (25)式のように求め、それらを

Fig. 1 System order test for two different observation intervals
 $T=1.5$ and $T=2.0$

解いて得られた推定値 $\hat{z}^{(v)}(t|t)$ を用いて、尤度比関数 $A^{(v)}(t)$ を、

$$dA^{(v)}(t) = \frac{1}{r^2} A^{(v)}(t) \hat{z}_1^{(v)}(t|t) dy(t), \quad A^{(v)}(0) = 1 \quad (32)$$

によって求める。シミュレーションでは、 $\hat{z}_i^{(v)}(0|0) = -0.2$ ($i=1, 2, \dots, 2v$), $p_{11}^{(v)}(0|0)=3$, $p_{ii}^{(v)}(0|0)=1$ ($i=2, \dots, 2v$), $p_{ij}^{(v)}(0|0)=0$ ($i \neq j$) と設定した。

(iv) システムの構造決定

尤度比関数 $A^{(v)}(T)$ を最大にする v をシステムの次元として決定する。また、その v に対する $\hat{z}^{(v)}(t|t) = [\hat{z}_1^{(v)}(t|t), \dots, \hat{z}_{2v}^{(v)}(t|t)]'$ をシステムの状態変数および未知パラメータの推定値と決定する。

尤度比関数 $A^{(v)}(T)|_{T=1.5}$ および $A^{(v)}(T)|_{T=2.0}$ を示したのが Fig. 1 である。これより、 $v=2$ において尤度比関数 $A^{(v)}(T)$ が最大となっているので、仮説 H_2 が受容できる。すなわち、システムの次元は 2 次元であると決定できる。このとき、ステップ(iv)において計算した $\hat{z}^{(2)}(t|t) = [\hat{z}_1^{(2)}(t|t), \hat{z}_2^{(2)}(t|t), \hat{a}_1^{(2)}(t|t), \hat{a}_2^{(2)}(t|t)]'$ より、未知パラメータ $a_1^{(2)}, a_2^{(2)}$ およびシステム状態変数 $x_1^{(2)}, x_2^{(2)}$ の推定の見本過程の時間的進化の様子を示したのが、Fig. 2 および Fig. 3 である。

6. 地震波のモデリングへの応用

Fig. 4 は、1971 年米国 California 州 San Fernando 市近郊において発生した地震の、Pacoima ダムにおける加速度成分の記録データで文献 14) に発表されたものである。この記録データをモデル化するために、本論文では、

$$\zeta(t) = x(t) + r\eta(t) \quad (33)$$

とした。すなわち、Fig. 4 に示されたデータ $\zeta(t)$ は、

Fig. 2 Sample runs of estimated $a_1^{(2)}$ and $a_2^{(2)}$

Fig. 3 Running estimates of $x_1^{(2)}$ and $x_2^{(2)}$

地震波の加速度に、 $\eta(t)$ という正規性白色雑音を加わったものとする。また加速度 $x(t)$ は、

$$x^{(n)}(t) + a_1 x^{(n-1)}(t) + \dots + a_n x(t) = g(t)\eta(t), \quad x(0) = x_0 \quad (34)$$

によってモデル化されるものとする。ただし (34) 式において、 $\eta(t)$ は正規性白色雑音であり、階数 n および係数 $\{a_i; i=1, 2, \dots, n\}$ は未知である。係数 $\{a_i\}$ は、一般には (4) 式のような時変係数と考えるのであるが、ここでは、実測地震波データを対象としているので、(4) 式の展開項 N をいくらにすればよいかという情報は何ら先験的に存在しないので、まず最初の試みとして $N=1$ 、すなわち $\{a_i\}$ はすべて定数であるものとして以下モデリングを試みることにする。係数 $g(t)$ は、記録データ $\zeta(t)$ の包絡線の形状を表すものと考え、

$$g(t) = \kappa \{ \exp(-\alpha_1 t) - \exp(-\alpha_2 t) \} \quad (35)$$

とし、パラメータ $\kappa, \alpha_1, \alpha_2$ は最小 2 乗法¹⁵⁾ によって記録データ $\zeta(t)$ から決定した値であり、 $\kappa=14$, $\alpha_1=0.07$, $\alpha_2=0.2$ とした。また、観測雑音の係数 r は通常比較的小さいものとみなせるから、シミュレーションでは、 $r=0.1$ とした。ここで、 $\hat{y}(t) \triangleq \hat{\zeta}(t)$ とし、 $z^{(v)} \triangleq [x, \hat{x}, \dots, x^{(v-1)}, a_1^{(v)}, \dots, a_v^{(v)}]'$ と定義すれば、(33), (34) 式は前章における (29), (30) 式と同じ式になる。ただし、 $c^{(v)}(t) = [0, \dots, 0, \underbrace{g(t)}_{v-1}, 0, \dots, 0]'$ で

ある。

Fig. 4 Typical earthquake data-accelerogram of the San Fernando earthquake recorded at Pacoima Dam, California, U.S.A. on Feb. 9, 1971 (given in Ref. 14)

Fig. 5 System order test for the accelerogram of the San Fernando earthquake depicted in Fig. 4

Fig. 5 は $T=17$ (sec) としての尤度比関数 $A^{(\nu)}(T)$ の値を $\nu=1, 2, 3, 4$ に対して比較したもので、これより $n=\nu=1$ と決定できる。 $\nu=1$ および $\nu=2$ の場合に対して得られた未知パラメータ $\{a_i\}$ に対する推定値を用いて $\ddot{x}(t)$ をシミュレートした結果が Fig. 6 である。Fig. 6 より、 $\nu=1$ に対するシミュレーションのほうが $\nu=2$ の場合より、適切に Fig. 4 の実測データを模擬していることがわかる。

7. 結 言

不規則雑音によって乱された観測データに基づいて、時変係数をもつ連続時間システムのモデリングに対するひとつの新しい手法を提案した。本論文では、(i)システムをモデリングする際に問題となる未知パラメータを、時間 t に関する多項式によって記述したこと、また(ii)システムの次元を決定する方法として、仮説検定法を導入し、さらにこの仮説検定法と、非線形フィルタ理論とを尤度比関数を媒介として結び合せたことによって、従来問題の重要性にもかかわらず、その解決が困難視されていた連続時変システムの構造決定を可能にした。次元を決定するのに必要なデータ集収時間 T を、どのような基準で決定すればよいかという問題は、係数 $a_i(t)$ のモデリングとも関連し

Fig. 6 Accelerogram simulations of the San Fernando earthquake from estimated parameters.

て、今後理論的検討を加えなければならないが、現段階では数多くのシミュレーション結果から決定するのが最良の方法であろう。

6章では、提案したシステム構造決定の手法を実測地震波データに適用して、その波形を決定する数学モデルを確立することを試みた。このようにして得られた地震波の数学モデルを用いれば、容易に模擬地震波を計算機により創成することが可能となるので、建築構造物などの耐震性の問題を解析する際に有力な手段となり、本論文の工学的貢献度は非常に大きいものと思われる。

なお、本研究の一部は日本学術振興会日米科学協力研究 FJ-7023: 7R031 の補助のもとに行われたものである。

参 考 文 献

- 1) E.E.P. Box and G.M. Jenkins: Statistical Models for Forecasting and Control, Holden-Day, San Francisco (1970)
- 2) J.C. Chow: On Estimating the Orders of an Autoregressive Moving-Average Process with Uncertain Observations, IEEE Trans. on Automatic Control, **AC-17-5**, 707/709 (1972)
- 3) R.K. Mehra: On-Line Identification of Linear Dynamic Systems with Applications to Kalman Filtering, IEEE Trans. on Automatic Control, **AC-16-1** 12/21 (1971)
- 4) C.M. Woodside: Estimation of the Order of Linear Systems, Automatica, **7-6**, 727/733 (1971)
- 5) H. Akaike: Information Theory and an Extension of the Maximum Likelihood Principle, Proc. 2nd International Symp. on Information Theory, Tsahkador, Armenian SSR, 267/280 (1971)
- 6) H. Akaike: A New Look at the Statistical Model Identification, IEEE Trans. on Automatic Control, **AC-19-6**, 716/723 (1974)
- 7) K. Furuta: An Application of Realization Theory to Identification of Multivariable Process, Proc. 3-rd IFAC Symp. on Identification and System Parameter Estimation, Hague/Delft, The Netherlands,

- 939/942 (1973)
- 8) E. Tse and H.L. Weinert: Structure Determination and Parameter Identification for Multivariable Stochastic Linear Systems, IEEE Trans. on Automatic Control, **AC-20-5**, 603/613 (1975)
 - 9) R.E. Kalman, P.L. Falb and M.A. Arbib: Topics in Mathematical System Theory, McGraw-Hill (1969)
 - 10) Y. Sunahara: On a Method of Signal Detection by Using the Nonlinear Estimation Theory, Proc. 3rd Symp. on Nonlinear Estimation Theory and Its Applications, San Diego, Calif., 216/223 (1972)
 - 11) T. Kailath: A General Likelihood-Ratio Formula for Random Signals in Gaussian Noise, IEEE Trans. on Information Theory, **IT-15-3**, 350/361 (1969)
 - 12) Y. Sunahara, A. Ohsumi and M. Imamura: A Method of Parameter Identification for Linear Distributed Parameter Systems, Automatica, **12-3** 245/256 (1976)
 - 13) A.H. Jazwinski: Stochastic Processes and Filtering Theory, Academic Press (1970)
 - 14) M.D. Trifunac, A.C. Brady and D.E. Hudson: Strong Motion Earthquake Accelerograms—Digitized and Plotted Data, **II**, Part C, A Report of Earthquake Engineering Research Laboratory, California Institute of Technology, Pasadena, Calif. (1973)
 - 15) F.B. Hildebrand: Introduction to Numerical Analysis, Second Edition, McGraw-Hill (1974)
 - 16) H.L. Van Trees: Detection, Estimation and Modulation Theory, Part I, John Wiley & Sons (1968)

《付 録》

〈付録 1〉 マトリクス $F^{(v)}[z^{(v)}(t)]$, $C^{(v)}(t)$, $M^{(v)}(t)$ および $B^{(v)}[z^{(v)}(t|t)]$ の形はつぎのようである。

$$F^{(v)}(z^{(v)}(t)) = \begin{bmatrix} \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 0 & & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & & 0 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} & \begin{array}{ccc} \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 0 & & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & & 0 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \\ \vdots & \begin{array}{ccc} \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 0 & & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & & 0 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \end{array} \end{bmatrix} \quad (A.1)$$

$$C^{(v)}(t) = \begin{bmatrix} \begin{array}{ccc} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & & 0 \end{array} & \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \\ \hline \begin{array}{ccc} g_{d_1}(t) & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & & g_1(t) \end{array} & \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \end{bmatrix} \quad (\nu \geq d_1); \quad C^{(v)}(t) = \begin{bmatrix} \begin{array}{ccc} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & & 0 \end{array} & \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \\ \hline \begin{array}{ccc} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & & 0 \end{array} & \begin{array}{ccc} g_{\nu}(t) & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & & g_1(t) \end{array} \end{bmatrix} \quad (\nu < d_1) \quad (A.2)$$

$$M^{(v)}(t) = \begin{bmatrix} \begin{array}{ccc} h_1(t) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & & & 0 \end{array} & \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \\ \hline \begin{array}{ccc} 0 & & & 0 \end{array} & \begin{array}{ccc} h_m(t) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & & & 0 \end{array} \end{bmatrix} \quad (\nu \geq m); \quad M^{(v)}(t) = \begin{bmatrix} \begin{array}{ccc} h_1(t) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & & & 0 \end{array} & \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \\ \hline \begin{array}{ccc} 0 & & & 0 \end{array} & \begin{array}{ccc} h_{\nu}(t) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & & & 0 \end{array} \end{bmatrix} \quad (\nu < m) \quad (A.3)$$

さらに, $B^{(v)}[z^{(v)}(t|t)]$ はつぎのように与えられる。

$$B^{(\nu)}[\dot{z}^{(\nu)}(t|t)] = \left\{ \begin{array}{c} \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{array} \right\}_{\nu} \\ \left\{ \begin{array}{ccc} b_1^{(\nu)} & \dots & b_{\nu}^{(\nu)} \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{array} \right\}_{\nu} \\ \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{array} \right\}_{\nu} \\ \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{array} \right\}_{\nu} \end{array} \right\} \quad (A.4)$$

$b_i^{(\nu)} = -\dot{z}_{\nu+(i-1)N+1}^{(\nu)}, \quad b_{\nu+i}^{(\nu)} = -\dot{z}_i^{(\nu)} \quad (i=1, 2, \dots, \nu)$

〈付録2〉 ((23)式の導出)¹⁶⁾

(22)式の総平均損失 $\bar{C}$ を

$$\bar{C} = P[H_i] \int_{S-S_i} p\{Y_0^T | H_i\} dY_0^T + P[H_\nu] \int_{S-S_\nu} p\{Y_0^T | H_\nu\} dY_0^T + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i, \nu}}^K P[H_j] \int_{S-S_j} p\{Y_0^T | H_j\} dY_0^T \quad (A.5)$$

と書き直し, さらに $\int_S p\{Y_0^T | H_i\} dY_0^T = 1$ であることに留意すると, 総平均損失 $\bar{C}$ は

$$\begin{aligned} \bar{C} = & \int_{S_\nu} [P[H_i] p\{Y_0^T | H_i\} - P[H_\nu] p\{Y_0^T | H_\nu\}] dY_0^T + P[H_\nu] + P[H_i] \int_{S-(S_i \oplus S_\nu)} p\{Y_0^T | H_i\} dY_0^T \\ & + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i, \nu}}^K P[H_j] \int_{S-S_j} p\{Y_0^T | H_j\} dY_0^T \end{aligned} \quad (A.6)$$

となる. (A.6)式において, $S-(S_i \oplus S_\nu)$ を固定すると, 右辺第1項は一定となるから, 総平均損失 $\bar{C}$ を最小にするには, S_ν を (A.6)式の被積分関数が負になるように選べばよいことがわかる.