3 レベル M 系列による線形離散値系の一同定法[†]

米 澤 洋*・古 谷 忠 義**・林 田 美智子**

Identification of Linear Discrete System by 3-Level M -Sequence

Yoh YONEZAWA*, Tadayoshi FURUYA** and Michiko HAYASHIDA**

Identification of systems realized with minimal order models is considered to be important. In this paper, a new identification method for linear discrete systems is presented.

Here the linear system is first divided into a subsystem and a noise process in order to identify the process dynamics and the noise characteristics separately. By applying a 3-level M -sequence to the subsystem and by observing its output, the Markov parameters of the subsystem are estimated, and a minimal order realization is accomplished. Consequently, the pulse transfer function of the subsystem can be estimated. The minimal order is found in the pulse transfer function of the noise process using Akaike's and Furuta's methods, where the autocorrelation functions of the noise process are introduced by the resultant pulse transfer function of the system.

Numerical examples confirm the adequacy of the proposed identification algorithm, and suggest that it is effective to use input signals having different SN ratios to achieve an accurate identification.

1. は し が き

近年、デジタル計算機が普及し、さまざまな産業部門で、計算機利用が進められている。特に、鉄鋼、化学などの生産工程では、デジタル計算機をオンラインに用いる、いわゆる計算制御が著しい発展をとげている。

この計算制御を実施するとき、制御の目的、操業条件に応じて、対象プロセスの動特性を把握すること（同定）が重要な問題であることはもちろんであるが、

プロセスに重畳する雑音特性を推定することは、Kalman フィルタの適用や統計的制御に先立って、解決しておかねばならない問題の一つである。

線形離散値系の同定法として、自己回帰モデルを用いる赤池の FPE 法¹⁾、自己回帰移動平均混合モデルを用いる Chow の方法²⁾、仮説検定を併合して Chow の方法を拡張した Lindberger の方法³⁾がよく知られている。制御を目的とすると、同定して得られたモデルは最小次元であることが望ましいが、上記の方法では、いずれも最小次元モデルの保証は与えられていない。線形離散値系の最小次元数とパラメータを、固有値に基づいて推定する古田の方法⁴⁾は、雑音が十分小でなければ推定値が真値に一致しないという欠点がある。雑元らのしきい値に基づく方法⁵⁾では、システム構造決定とパラメータ推定が可能であるが、計算量の多い繰返し演算を必要とする。

本論文では、先験的情報が皆無な 1 入力 1 出力線形離散値系の同定用入力として、3 レベル M 系列信号を用い、最小次元次数でその離散値系を同定することを考える。この場合、系自体に作用する雑音および観測雑音は定常と仮定し、白色雑音がある安定な線形フィルタを経由して、線形離散値系本来の出力に重畳するのと等価であるとして取扱う。すなわち、1 入力 1 出力線形離散値系の同定問題を、(a) 3 レベル M 系列信号の作用するサブシステムの最小次元モデルを見出す同定問題と、(b) 雑音を産み出している線形フィルタ(雑音プロセス)の同定問題とに分離する。サブシステム同定については、逆行列の演算を回避して、擬似マルコフパラメータを推定し、そのハンケル行列の固有値に基づいて、最小次元パルス伝達関数を推定する。雑音プロセスについては、赤池の FPE 法を併用し、古田の固有値に基づく同定法を拡張利用する。

2. 線形離散値系のモデル

Fig. 1 は、先験的情報が皆無な 1 入力 1 出力プロセスの概念図である。雑音 v は白色雑音 ξ が安定な線

[†] 第 19 回自動制御連合講演会で発表 (昭 51・11)

* 広島大学工学部 広島市千田町 3-8-2

** 九州工業大学工学部 北九州市戸畑区仙水町 1-1

* Faculty of Engineering, Hiroshima University, Hiroshima

** Kyushu Institute of Technology, Kitakyushu

(Received August 22, 1977)

Fig. 1 Process under consideration

Fig. 2 Linear discrete-time model of process

形フィルタを通過して得られた信号であり、プロセス入力 u による正規の出力信号 x に加算的に作用すると考える。その結果、Fig. 1 のプロセスはサブシステムと雑音プロセスとで構成されていることになり、離散値的に表現すると、Fig. 2 のようになる。

一般に線形システムの離散の数学モデルとして

自己回帰モデル (AR モデル)

移動平均モデル (MA モデル)

自己回帰移動平均混合モデル (ARMA モデル)

が考えられる。1 入力 1 出力線形系は容易に ARMA モデルで記述でき、また、AR モデルならびに MA モデルはともに ARMA モデルの特別表現であることから、ここでは ARMA モデルを用いることにする。すなわち、サブシステムの数学モデルとして

$$G(z, p) = \frac{b_1 z^{-1} + \dots + b_p z^{-p}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_p z^{-p}} \quad (1)$$

を、雑音プロセスの数学モデルとして

$$D(z, q) = \frac{\beta_1 z^{-1} + \dots + \beta_q z^{-q}}{1 + \alpha_1 z^{-1} + \dots + \alpha_q z^{-q}} \quad (2)$$

を用いる。ここで、 z は z 変換演算子、 p および q はそれぞれの ARMA モデルの最小次元次数である。

3. サブシステムの同定法

3.1 問題記述

前述の 1 入力 1 出力のサブシステムは、 p 次元の適当な離散状態ベクトル x_t を導入することにより、つぎのような可観測標準形で表現できる。

$$\left. \begin{aligned} x_{t+1} &= Ax_t + bu_t \\ y_t &= Cx_t + v_t \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

ここで u_t は入力の、 y_t は出力の、そして v_t は雑音

の離散値的表現で、いずれもスカラーであり

$$\left. \begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0 & I_{p-1} \\ a_1 & a_2 \dots a_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I_{p-1} \\ a^T \end{bmatrix} \\ b &= [b_1 \ b_2 \dots b_p]^T \\ C &= [1 \ 0 \dots 0] \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

また、 I_{p-1} は $(p-1) \times (p-1)$ の単位行列、 T は転置を表す。この (3) 式で表現されるサブシステムについて、つぎの三つの仮定をおく。

(A.1) 行列 A は正則かつ安定。すなわち、行列 A のすべての固有値は零でなく、その絶対値はいずれも 1 より小さい。

(A.2) $\{A, b\}$ は可制御対

$$\text{rank} [b, Ab, \dots, A^{p-1}b] = p$$

(A.3) 入力系列 $\{u_t\}$ は大きさが r 、最大周期が L の 3 レベル M 系列⁹⁾で、雑音 $\{v_t\}$ とは統計的に独立。すなわち、入力の自己相関関数は

$$\frac{1}{L} \sum_{t=1}^L u_t u_{t-j} = \begin{cases} \sigma^2 & j=kL \text{ のとき} \\ -\sigma^2 & j=\left(k+\frac{1}{2}\right)L \text{ のとき} \\ 0 & \text{その他のとき} \end{cases} \quad (5)$$

である。ただし

$$\sigma^2 = \frac{2 \cdot 3^{n-1}}{3^n - 1} |r|^2, \quad L = 3^{n-1}, \quad k=0, 1, 2, \dots$$

n : M 系列信号発生多項式の次数

また、雑音と入力の積の期待値はすべての j について

$$E[u_t v_{t-j}] = 0$$

である。

問題は、上述のような入力系列 $\{u_t\}$ および雑音で汚された出力系列 $\{y_t\}$ とを知って、サブシステムの最小次元パルス伝達関数 $G(z, p)$ を推定することである。

3.2 相関法

(3) 式をまとめると、出力信号は

$$y_t = \sum_{i=1}^{\infty} CA^{i-1}bu_{t-i} + v_t = \sum_{i=1}^{\infty} g_i u_{t-i} + v_t \quad (6)$$

となる。ただし

$$g_i \equiv CA^{i-1}b \quad (7)$$

である。(6) 式の両辺に u_{t-k} を乗じて期待値をとると、 y_t は u_t と v_t の和で、 u_t と v_t は独立であるから

$$\begin{aligned} E[y_t u_{t-k}] &= \sum_{i=1}^{\infty} g_i E[u_{t-i} u_{t-k}] + E[v_t u_{t-k}] \\ &= \sigma^2 \sum_{i=0}^{\infty} \left(g_{k+iL} - g_{k+\frac{2i+1}{2}L} \right) \end{aligned}$$

いま

$$\phi_{yu}^*(k) = \frac{1}{\sigma^2} E[y_i u_{i-k}]$$

とおくと

$$\phi_{yu}^*(k) = \sum_{i=0}^{\infty} \left(g_{k+iL} - g_{k+\frac{2i+1}{2}L} \right) \quad (8)$$

となる。また、(6)式の両辺に y_{i-k} を乗じて期待値をとることにより、入、出力の自己相関関数 $\phi_{yy}(k)$ 、 $\phi_{yy}(k)$ 相互の関係は次式で与えられる。

$$\phi_{yy}(k) = \phi_{yy}(k) - \sigma^2 \sum_{i=1}^{\infty} g_i \phi_{yu}^*(k+i) \quad (9)$$

ところで(8)式の $\phi_{yu}^*(k)$ は(7)式から

$$\begin{aligned} \phi_{yu}^*(i) &= (g_i + g_{i+L} + \dots) - \left(g_{i+\frac{L}{2}} + g_{i+\frac{3}{2}L} + \dots \right) \\ &= (CA^{i-1}b + CA^{i+L-1}b + \dots) \\ &\quad - \left(CA^{i+\frac{L}{2}-1}b + CA^{i+\frac{3}{2}L-1}b + \dots \right) \\ &= CA^{i-1} [I - A^{L/2}] [I - A^L]^{-1} b \\ &= C [I - A^{L/2}] [I - A^L]^{-1} A^{i-1} b \end{aligned} \quad (10)$$

となり、 $CA^{i-1}b$ と類似のマルコフパラメータとなる。

3.3 サブシステム次数の決定

上述のマルコフパラメータ $(2k-1)$ 個で作られる $k \times k$ の行列 H_k (ハンケル行列) をつぎのように定義する。

$$H_k = \begin{bmatrix} \phi_{yu}^*(1) & \phi_{yu}^*(2) & \dots & \phi_{yu}^*(k) \\ \phi_{yu}^*(2) & \phi_{yu}^*(3) & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \phi_{yu}^*(k) & \dots & \phi_{yu}^*(2k-1) \end{bmatrix} \quad (11)$$

この行列は、(10)式の二つの表現を用いることにより

$$H_k = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{k-1} \end{bmatrix} \cdot [I - A^{L/2}] [I - A^L]^{-1} [b \quad Ab \quad \dots \quad A^{k-1}b]$$

となる。ここで(4)式と(A.2)より

$$\text{rank} [C^T \quad A^T C^T \quad \dots \quad (A^{k-1})^T C^T] = \begin{cases} k & k < p \\ p & k \geq p \end{cases}$$

$$\text{rank} [b \quad Ab \quad \dots \quad A^{k-1}b] = \begin{cases} k & k < p \\ p & k \geq p \end{cases}$$

であるから、Sylvester の不等式から

$$\text{rank} H_k = \begin{cases} k & k < p \\ p & k \geq p \end{cases}$$

となる。したがって、サブシステム次数 p は

$$\text{rank} H_k = \text{rank} H_{k+1} \quad (12)$$

が成立する最小の整数 k で与えられる。

しかし、マルコフパラメータは誤差を含んでいるから、正確に(12)式を満足する整数 k を見出すことはできない。固有値の定理によれば、 H_k の階数は $H_k^T H_k$

の零でない固有値の数に等しい。この定理を ε -最小実現の概念⁹⁾を用いてつぎのように書きかえる。

《定理》 ε -最小実現の見地から、 H_k の階数は $H_k^T H_k$ の ε (微小数) より大きい固有値の数に等しい。

すなわち、サブシステムの次数は、 $k=1, 2, \dots, p, \dots$ について、 $H_k^T H_k$ の固有値を計算して、 ε よりも大きい固有値の数が等しくなる最小数の k である。

3.4 パラメータ推定

(4)、(7)両式から

$$g_{p+k} = a_1 g_k + a_2 g_{k+1} + \dots + a_p g_{k+p-1} \quad (13)$$

であるから、この関係を使用すると、(8)式は

$$\begin{aligned} \phi_{yu}^*(p+k) &= \sum_{j=0}^{\infty} \left(g_{p+k+jL} - g_{p+k+\frac{2j+1}{2}L} \right) \\ &= a_1 \phi_{yu}^*(k) + a_2 \phi_{yu}^*(k+1) + \dots \\ &\quad + a_p \phi_{yu}^*(k+p-1) \end{aligned} \quad (14)$$

となるので、 $k=1, 2, \dots, p$ として行列表現すると

$$\begin{bmatrix} \phi_{yu}^*(p+1) \\ \phi_{yu}^*(p+2) \\ \vdots \\ \phi_{yu}^*(2p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{yu}^*(1) & \dots & \phi_{yu}^*(p) \\ \phi_{yu}^*(2) & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ \phi_{yu}^*(p) & \dots & \phi_{yu}^*(2p-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{bmatrix}$$

とまとめられるから、パラメータ a の推定式は

$$a = \begin{bmatrix} \phi_{yu}^*(1) & \dots & \phi_{yu}^*(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{yu}^*(p) & \dots & \phi_{yu}^*(2p) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \phi_{yu}^*(p+1) \\ \vdots \\ \phi_{yu}^*(2p) \end{bmatrix} \quad (15)$$

で与えられる。一方、(10)上側の式で、 $i=1, 2, \dots, p$ とすることにより、

$$\begin{bmatrix} \phi_{yu}^*(1) \\ \phi_{yu}^*(2) \\ \vdots \\ \phi_{yu}^*(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{p-1} \end{bmatrix} [I - A^{L/2}] [I - A^L]^{-1} b$$

$$= [I - A^{L/2}] [I - A^L]^{-1} b$$

とまとめられるので、パラメータ b は

$$b = [I - A^L] [I - A^{L/2}]^{-1} \begin{bmatrix} \phi_{yu}^*(1) \\ \vdots \\ \phi_{yu}^*(p) \end{bmatrix} \quad (16)$$

となり、(15)式から A が推定されているので、上式から b が推定できる。この推定パラメータ A, b を用いて、サブシステムのパルス伝達関数 $G(z, p)$ は

$$G(z, p) = C(zI - A)^{-1} b \quad (17)$$

として与えられる。

3.5 同定例

サブシステムの例として、つぎのような逆応答プロ

Fig. 3
Auto-correlation
function of a
noise on output
of subsystem

セスのパルス伝達関数を取上げる。

$$G(z, 2) = \frac{-0.50z^{-1} + 0.85z^{-2}}{1 - 1.40z^{-1} + 0.50z^{-2}} \quad (18)$$

同定のための3レベル M 系列の最大周期を26とし、**Fig. 3** のような自己相関関数の有色雑音が、サブシステム出力に付加したときの同定経過を示す。ただし、SN比 $\sigma^2/\sigma_v^2 = 8.3^2$ 、データ個数150である。

$H_k^T H_k$ の固有値を k の各値について求めると、

$$\begin{aligned} k=2 \text{ のとき } & 0.3197, 0.2005 \\ k=3 \text{ のとき } & 1.3094, 0.5027, 4.1202 \times 10^{-7} \\ k=4 \text{ のとき } & 2.9670, 0.7456, \\ & 1.4776 \times 10^{-6}, 1.7446 \times 10^{-7} \end{aligned}$$

したがって、最小次元数 $p=2$ であり、その結果

$$\begin{aligned} \hat{a}_1^* &= -1.3968 & \hat{a}_2^* &= 0.5014 \\ \hat{b}_1^* &= -0.5090 & \hat{b}_2^* &= 0.8521 \end{aligned}$$

と、パラメータが推定された。この推定値が入力の分散 σ^2 にどのように依存するかを調べた結果が、

Table 1 である。表中、正規化誤差とは

$$\left[\frac{1}{2p} \left\{ \sum_{i=1}^p \left(\frac{\hat{a}_i^* - a_i^*}{a_i^*} \right)^2 + \sum_{i=1}^p \left(\frac{\hat{b}_i^* - b_i^*}{b_i^*} \right)^2 \right\} \right]^{1/2}$$

を表す。

また、同一のサブシステム ((18)式) に、直流成分を含んだ白色雑音が作用するときの同定例を示す。同定用入力信号として、2レベル M 系列 (最大周期7, データ個数300) を使用した場合と、前例と同じ3レベル M 系列 (データ個数100) を用いた場合の、パ

Table 1 Relation between estimated parameters of subsystem and input-variance

σ^2	a_1^*	a_2^*	b_1^*	b_2^*	normalized error
1.5 ²	-1.394	0.503	-0.517	0.854	1.8×10^{-2}
2 ²	-1.395	0.502	-0.513	0.853	1.4×10^{-2}
2.5 ²	-1.396	0.502	-0.510	0.852	1.1×10^{-2}
3 ²	-1.397	0.501	-0.509	0.851	9.3×10^{-3}

Table 2 Comparison of parameters estimated by 2- and 3-level M -sequences

M -sequence	a_1^*	a_2^*	b_1^*	b_2^*
2 level	-1.389	0.504	-0.487	0.837
3 level	-1.403	0.501	-0.496	0.847

ラメータ推定結果が **Table 2** である。ただし、2レベル M 系列を用いたときは最小次元数 p は既知とした。ここで、入力の分散はいずれも $\sigma^2 = 1.5^2$ 、白色雑音の分散 $\sigma_v^2 = 0.25^2$ 、直流成分0.25である。

この表から、3レベル M 系列信号を用いたときは、 p が未知であるにもかかわらず、 p 既知とした2レベル M 系列の場合よりも少ないデータ数で、より良好なパラメータ推定結果が得られたことがわかる。

4. 雑音プロセスの同定法

4.1 問題の記述

2.で述べたように、定常雑音プロセスの数学モデルとして

$$D(z, q) = \frac{\beta_1 z^{-1} + \beta_2 z^{-2} + \dots + \beta_q z^{-q}}{1 + \alpha_1 z^{-1} + \dots + \alpha_q z^{-q}} \quad (19)$$

を採用する。これを定差方程式で表現すると

$$v_t + \sum_{i=1}^q \alpha_i v_{t-i} = \sum_{j=1}^q \beta_j \xi_{t-j} \quad (20)$$

となる。ここで、入力雑音系列 $\{\xi_i\}$ は

$$\left. \begin{aligned} E[\xi_i] &= 0 \\ E[\xi_i \xi_k] &= \delta_{ik} \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

という白色雑音系列であるが、観測することはできない。

問題は、雑音プロセスの出力系列 $\{v_t\}$ のみを知らず、最小次元パルス伝達関数 $D(z, q)$ を推定することである。

4.2 同定法

$$\left. \begin{aligned} \beta_1 \xi_{t-1} &= e_t \\ \beta_j \xi_{t-j} &= d_{j-1} e_{t-j+1} \quad (j \geq 2) \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

という変換を(20)式に施すと

$$v_t + \sum_{i=1}^q \alpha_i v_{t-i} = \sum_{j=1}^q d_j e_{t-j} + e_t \quad (20)'$$

となるので、改めて e_t を入力と考えると

$$\begin{aligned} D^*(z) &= \frac{1 + d_1 z^{-1} + \dots + d_{q-1} z^{-q+1}}{1 + \alpha_1 z^{-1} + \dots + \alpha_q z^{-q}} \\ &= \frac{1}{1 + c_1 z^{-1} + \dots + c_n z^{-n}} + (\text{高次微小項}) \end{aligned}$$

と変形でき、この高次微小項を無視することにより、雑音プロセスは n 次のARモデルで近似表現できる。その定差方程式は、

$$v_i + \sum_{i=1}^n c_i v_{i-i} = e_i \quad (23)$$

で表すことができる。この両辺に v_{i-k} を乗じて期待値をとると、つぎの相関関数関係式が得られる。

$$\phi_{vv}(k) + \sum_{i=1}^n c_i \phi_{vv}(k-i) = \phi_{ev}(k) \quad (24)$$

v_{i-k} は $e_j (j < i-k)$ の線形1次結合であること、および(21)、(22)両式を考慮すると、上式は

$$\phi_{vv}(k) + \sum_{i=1}^n c_i \phi_{vv}(k-i) = 0 \quad (k \geq 1) \quad (25)$$

となる。したがって、FPE法を適用することにより、雑音プロセスのARモデルならびに入力と考えた $\{e_i\}$ の分散 σ_e^2 を推定することができる。

(22)上の式の両辺に v_{i-k} を乗じて期待値をとることにより、次式が得られる。

$$\beta_1 \phi_{ev}(k-1) = \phi_{ev}(k) \quad (26)$$

また、同じく(22)上の式で、辺々相乗じて期待値をとると、 $\phi_{ev}(0)=1$ を考慮すると

$$\beta_1 = \sqrt{\sigma_e^2} \quad (27)$$

が得られる。したがって、(24)式以降の記述から

$$\phi_{ev}(k-1) = \begin{cases} 0 & k \geq 1 \text{ のとき} \\ \frac{1}{\sqrt{\sigma_e^2}} \left\{ \phi_{vv}(k) + \sum_{i=1}^n c_i \phi_{vv}(k-i) \right\} & k < 1 \text{ のとき} \end{cases} \quad (28)$$

とまとめられ、この式によって入出力の相関関数が推定可能となる。

さて、行列 Q^n をつぎのように定義する。

$$Q^n = \begin{bmatrix} V & F^T \\ F & I_n \end{bmatrix} \quad (29)$$

$$V = \begin{bmatrix} \phi_{vv}(0) & \phi_{vv}(1) & \cdots & \phi_{vv}(n) \\ \phi_{vv}(1) & \phi_{vv}(0) & \cdots & \phi_{vv}(n-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{vv}(n) & \phi_{vv}(n-1) & \cdots & \phi_{vv}(0) \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} -\phi_{ev}(-1) & -\phi_{ev}(0) & \cdots & -\phi_{ev}(n-1) \\ -\phi_{ev}(-2) & -\phi_{ev}(-1) & \cdots & -\phi_{ev}(n-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\phi_{ev}(-n) & -\phi_{ev}(1-n) & \cdots & -\phi_{ev}(0) \end{bmatrix}$$

F^T は F の転置、 I_n は $n \times n$ の単位行列

この $(2n+1) \times (2n+1)$ の行列 Q^n に対し、古田の固有値に基づく方法を適用することにより、最小次元パルス伝達関数 $D(z, q)$ が推定できる。

4.3 同定例

次式のようなパルス伝達関数の雑音プロセスを例として取上げる。

$$D(z, 2) = \frac{0.75z^{-1} - 0.25z^{-2}}{1 - 0.85z^{-1} + 0.50z^{-2}} \quad (30)$$

Table 3 Relation between estimated parameters of noise process and variance of superposed white noise

σ_w^2	α_1 -0.850	α_2 0.500	β_1 0.750	β_2 -0.250	normalized error
1×10^{-4}	-0.850	0.500	0.750	-0.250	2.5×10^{-4}
1×10^{-3}	-0.851	0.500	0.751	-0.252	4.7×10^{-3}
1×10^{-2}	-0.865	0.499	0.759	-0.273	4.7×10^{-2}
1×10^{-1}	-0.932	0.468	0.830	-0.474	3.6×10^{-1}

この雑音プロセスの入力系列が $N(0, 1)$ の白色雑音であるとき、その理論的出力系列 $\{v_i\}$ の自己相関関数を使用して同定した経過を述べる。

FPE値を求めると、 $n=4$ で最小値となる。このとき仮想入力分散 $\sigma_e^2=0.5626$ 、ARモデルのパラメータは $\hat{c}_1=0.5173$ 、 $\hat{c}_2=-0.3261$ 、 $\hat{c}_3=-0.1041$ 、 $\hat{c}_4=-0.0419$ となった。これから、4次のARMAモデルのパラメータは、それぞれ

$$\gamma_1 = -2.1035, \quad \gamma_2 = 2.5655, \quad \gamma_3 = -1.4764$$

$$\gamma_4 = 0.4998, \quad \gamma_5 = 0.7501, \quad \gamma_6 = -1.1902$$

$$\gamma_7 = 1.0634, \quad \gamma_8 = -0.2497$$

と推定された。これらのデータを用いて、ARMAモデルの最小次元数を求めると、 $\varepsilon=1 \times 10^{-4}$ で、 $q=2$ と求まり、パラメータはつぎのように推定された。

$$\hat{\alpha}_1 = -0.8499, \quad \hat{\alpha}_2 = 0.4999$$

$$\hat{\beta}_1 = 0.7501, \quad \hat{\beta}_2 = -0.2499$$

つぎに、上記の出力系列に白色雑音 $\{w_i\}$ が重畳したものが観測されると考え、その自己相関関数からARMAモデルのパラメータを推定した結果がTable 3である。

5. 線形離散値系の同定

5.1 同定法

線形離散値系は、一般にサブシステムと雑音プロセスとで構成されたと考え、前述した方法を用いて、まず、3レベルM系列信号によるサブシステムの同定を行い、その結果を用いて雑音プロセスの同定を行う。

ここで、サブシステムと雑音プロセスの同定誤差について考察する。

サブシステムの同定誤差は、実際に計算される $\hat{\phi}_{yu}^*(k)$ とその期待値 $\phi_{yu}^*(k)$ の差 e_s に依存すると考える。雑音を含まない出力を y_i^* とし、 $\hat{\phi}_{yu}^*(k)$ を求めると

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_{yu}^*(k) &= \frac{1}{\sigma^2 L} \sum_{i=1}^L y_i u_{i-k} \\ &= \frac{1}{\sigma^2 L} \sum_{i=1}^L y_i^* u_{i-k} + \frac{1}{\sigma^2 L} \sum_{i=1}^L v_i u_{i-k} \\ &\approx \phi_{yu}^*(k) + e_s \end{aligned}$$

となる。これから、 $\hat{\phi}_{yu}^*(k)$ の誤差は u_i, v_i を白色とすると

$$\begin{aligned} \sqrt{E[e_s^2]} &= \frac{1}{\sigma^2 L} \sqrt{\sum_{t=1}^L E[v_i^2 u_{i-k}^2]} = \frac{1}{\sigma^2 L} \sqrt{L \sigma_v^2 \sigma^2} \\ &= \left(\frac{\sigma_v^2}{L \sigma^2} \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (31)$$

となる。他方、雑音プロセスの同定誤差は $\hat{\phi}_{vv}(k)$ と $\phi_{vv}(k)$ の差 e_N に依存すると考え、

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_{vv}(k) &= \frac{1}{L} \sum_{t=1}^L y_t y_{t-k} - \sigma^2 \sum_{i=1}^{\infty} \hat{q}_i \hat{\phi}_{yu}^*(k+i) \\ &= \frac{1}{L} \sum_{t=1}^L y_t^* y_{t-k} - \sigma^2 \sum_{i=1}^{\infty} \hat{q}_i \hat{\phi}_{yu}^*(k+i) \\ &\quad + \frac{1}{L} \sum_{t=1}^L v_t y_{t-k}^* + \frac{1}{L} \sum_{t=1}^L v_t v_{t-k} \end{aligned}$$

の最後の表現で最初の 2 項の和はほぼ 0 になるので

$$e_N = \frac{1}{L} \sum_{t=1}^L v_t y_{t-k}^*$$

としてよい。したがって v_i を白色とすると

$$\sqrt{E[e_N^2]} = \left(\frac{\sigma_v^2 \sigma_y^{*2}}{L} \right)^{1/2} \quad (32)$$

となる。結局、サブシステムの同定には、入力レベルの大きいほうが望ましく、雑音プロセスの同定には、入力レベルの小さいほうが望ましいという矛盾した条件となる。このため、同定誤差を考慮して線形離散値系を同定するには、つぎの手順を踏めばよい。ただし、雑音はサブシステムの入力レベルに無関係と仮定する。

- (i) SN 比の大きい入出力データを観測し、サブシステム同定法をまず適用する。
- (ii) SN 比の小さな入出力データを観測し、(i) で推定された次数を用いて、サブシステムのパルス伝達関数を推定し、雑音の自己相関関数を推定する。
- (iii) 得られた雑音の自己相関関数を用いて、雑音プロセス同定法を適用する。

3, 4 および本章で述べた線形離散値系の同定手順を示すフローチャートが Fig. 4 である。

5.2 同定例

(18) 式のサブシステムおよび (30) 式の雑音プロセスからなる線形離散値系を同定の対象とする。ここでサブシステム同定時の入力系列 $\{u_i\}$ の分散は $\sigma^2 = 7.5^2$ 、雑音プロセス同定時には $\sigma^2 = 0.055^2$ とした。なお、用いた入力データ数は 3,900 である。

サブシステムの同定

$$p=2, \hat{a}_1^* = -1.3968, \hat{a}_2^* = 0.5014$$

$$\hat{b}_1^* = -0.5090, \hat{b}_2^* = 0.8521$$

Fig. 4 Flow chart of identification algorithm for linear discrete system

雑音プロセスの同定

$$\begin{aligned} q=2, \hat{a}_1 &= -0.8537, \hat{a}_2 = 0.5010 \\ \hat{\beta}_1 &= 0.7501, \hat{\beta}_2 = -0.2550 \end{aligned}$$

6. あとがき

線形離散値系を、サブシステムと雑音プロセスとに分離し、3レベル M 系列信号を用いて同定する方法を提案した。すなわち、

- (i) 一般の線形プロセスは、サブシステムと雑音プロセスに分離でき、線形離散値プロセスの同定問題は、モデルの次数決定とパラメータ推定の問題であることを示した。

- (ii) 3レベル M 系列入力信号によるサブシステムの同定法を提案した。この3レベル M 系列信号を用いることにより、加わる雑音の白色性、有色性のいかにかわからず、また、雑音に直流成分が含まれていても、提案された同定法がきわめて有効であることを適用例により明らかにした。

- (iii) 雑音プロセスの同定に、赤池の方法および古田の方法を拡張・適用する方法を提案し、その有効性を例によって示した。

- (iv) サブシステムと雑音プロセスからなる線形離散値系の同定において、3レベル M 系列の分散を

変えれば、より良好な結果が得られることを明らかにし、そのアルゴリズムを適用例と共に示した。

本研究に使用した計算機は、九州大学大形計算機 FACOM 230-75 である。

参 考 文 献

- 1) 赤池弘次, 中川東一郎: ダイナミックシステムの統計的解析と制御, サイエンス社, p. 53 (1962)
- 2) J. C. Chow: On Estimating the Orders of an Autoregressive Moving-Average Process with Uncertain Observations, IEEE Trans., **AC-17**, 707/709 (1972)
- 3) N. A. Lindberger: Comments on "On Estimating the Orders of an Autoregressive Moving-Average Process with Uncertain Observations," IEEE Trans., **AC-18**, 689/691 (1973)
- 4) K. Furuta: An Application of Realization Theory to Identification of Multivariable Process, 3rd IFAC Symposium (1973)
- 5) 雛元, 佐野, 前川: 観測された入出力データに基づくシステムの構造決定とパラメータ推定について, 第 20 回 JACCE 学術講演会予稿集, 199/202 (1976)
- 6) 坂西, 堀井: 擬似ランダム信号を用いた一同定法, 計測自動制御学会論文集, **6-6**, 26/34 (1970)
- 7) 古田勝久: 線形システムの観測と同定, コロナ社, p. 219 (1976)