滑らかな主観的凸計画法†

中山 弘 隆*

Subjective Programming with Smooth and Convex Preferences

Hirotaka NAKAYAMA*

“Subjective programming” means programming based on the subjective judgment of a decision maker. This paper treats the cases under the assumption that the decision maker's preference is smooth and convex. First, several necessary and/or sufficient conditions of the optimal solutions are presented with the proof of their necessity and sufficiency. Next, the interactive coordinatewise optimization method, called briefly ICOM, for finding the optimal solution is suggested. The most prominent feature of the method is that it does not require any complete information about the preference attitude of the decision maker but only the preference judgment based on the pairwise comparison among criteria which can be made most easily by the decision maker.

1. はじめに

意思決定とは、意思決定者の価値基準に照らし、何らかの意味で「妥当」な代替案を選ぶことと考えられる。このような意思決定者の持つ心理的価値観を、以後「選好」という言葉で表現することにする。通常、この選好は代替案の集合のなかに2項関係を定義する。もし、この選好関係がある順序関係となるなら、このとき、前述の妥当性はこの順序関係のある極値性によって表しても、多くの場合意味を失わない。特に、他のいかなる代替案よりも、より選好される解を最適解（選好解）と定義し、この解のもつ諸性質の吟味、および解の求め方を Aumann¹⁾に従って「主観的計画法」と呼ぶことにする。特に、解を求めるにあたっては、効用理論のように、前もって意思決定者の選好を数量表現する必要がなく、システム分析者が意思決定者との対話によってその選好情報を部分的に引き出しながら代替案の探索を重ね、最終的には最適解に

達するという対話形最適化法が興味深い。しかし、評価規範（複数）が非線形の場合に適用できる既存の手法は、Geoffrion らの方法²⁾や Haimes らの SWT 法³⁾など未だ少なく、その理論的裏付け、整備も不十分と思われ、また方法自体の問題も少なくない。本研究は彼らの成果を踏まえたうえで、選好の滑らかさ、凸性を仮定した「滑らかな主観的凸計画法」について、解の必要あるいは十分条件を吟味し、その成果をもとに一つの対話形最適化法を提案するものである。

2. 滑らかな凸選好と解の性質

代替案の集合 X を s 次元 Euclid 空間 E^s のある部分集合とし、各代替案 $x \in X$ は評価規範（属性） $f = (f_1, \dots, f_r)$ によって、 r 次元 Euclid 空間 E^r の 1 点 $f(x)$ として数量評価される。このとき、意思決定者は評価空間 E^r において、自己の価値観を選好関係として表現するものとする。以後、特に断らない限り、 X を凸集合、 $f_i(\cdot)$ ($i=1, \dots, r$) を凹関数と仮定し、さらに意思決定者の選好関係 $\succsim$ に対し、つぎの仮定を設ける。任意の $y^k \in E^r$ ($k=1, 2, 3$) に対し

$$(A.1) \text{ (推移律)} \quad y^1 \succsim y^2, y^2 \succsim y^3 \Rightarrow y^1 \succsim y^3 \quad (1)$$

$$(A.2) \text{ (結合律)} \quad y^1 \succsim y^2 \text{ or } y^2 \succsim y^1 \quad (2)$$

(注意 1) A.1, A.2 を満たす選好 $\succsim$ を以下、簡単化のために弱順序選好と呼ぶことがある。このとき、

$$y^1 \sim y^2 \Leftrightarrow y^1 \succsim y^2 \text{ and } y^2 \succsim y^1 \quad (3)$$

によって定義される関係 $\sim$ は、容易に示されるように同値関係となる。また、

$$y^1 \succ y^2 \Leftrightarrow y^1 \succsim y^2 \text{ and not } y^1 \sim y^2 \quad (4)$$

で定義される $\succ$ に対しては

$$(非反射性) \quad y^1 \succ y^2 \Rightarrow \text{not } y^2 \succ y^1 \quad (5)$$

が成り立つ。このような定義のもとに、関係 $\sim$ は E^r の分割を与えることが容易に示され、特に、同値類の集合 $Y/\sim$ のグラフは通常、無差別曲面と呼ばれる。

以下、簡単化のために $y^1 \succsim y^2 \Leftrightarrow y^2 \precsim y^1$ とし、さ

† 第19回自動制御連合講演会の一部発表（昭51・11）

* 甲南大学理学部 神戸市東灘区岡本 8-9-1

* Faculty of Science, Konan University, Kobe

(Received July 4, 1977)

らにつぎのような記号を用いることにしよう。

$$S^+(y) = \{y | y \succeq y, y \in E^r\},$$

$$S^+(y) = \{y | y \succ y, y \in E^r\}$$

$$S^-(y) = \{y | y \preceq y, y \in E^r\},$$

$$S^-(y) = \{y | y \prec y, y \in E^r\}$$

$$I(y) = \{y | y \sim y, y \in E^r\}$$

$$\bar{H}_m^+(y) = \{y | \langle y - y, m \rangle \geq 0, y \in E^r\}$$

$$H_m^+(y) = \{y | \langle y - y, m \rangle > 0, y \in E^r\}$$

$$H_m(y) = \{y | \langle y - y, m \rangle = 0, y \in E^r\}$$

ただし、 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は E^r における内積で

$$\langle y^1, y^2 \rangle = \sum_{j=1}^r y_j^1 y_j^2, \quad y^1 = (y_1^1, \dots, y_r^1) \quad (6)$$

$$y^2 = (y_1^2, \dots, y_r^2)$$

を意味する。 $\bar{H}_m^-(y)$, $H_m^-(y)$ もそれぞれ $\bar{H}_m^+(y)$, $H_m^+(y)$ の定義における不等号の向きを逆にするだけで同様に定義される。

(A.3) (滑らかさ) 選好 $\succeq$ は連続^(注 1)で、かつ各 $y \in E^r$ に対し、連続な限界代替率^(注 2) $m(y) = (m_1(y), \dots, m_{r-1}(y), 1)$ が存在する。

(A.4) (凸選好)

$$y^1 \succeq y^2 \Rightarrow \theta y^1 + (1-\theta)y^2 \succeq y^2, \quad \forall \theta \in [0, 1] \quad (7)$$

《定理 1》 連続な (従って滑らかな) 弱順序選好 $\succeq$ をもつ集合 $(E^r, \succeq)$ は、任意の有界閉集合 $Y \subset E^r$ 上で、空でない最大解の集合 $\max[Y, \succeq] = \{y^* \in Y | y^* \succeq y, \forall y \in Y\}$ および、空でない最小解の集合 $\min[Y, \succeq] = \{y_* \in Y | y_* \preceq y, \forall y \in Y\}$ をもつ。

(証明) 効用関数の概念を援用せずに直接に証明することも可能であるが、ここでは Debreu⁴⁾ の結果を利用して簡単に証明を終える。文献 2) によれば、仮定より、 E^r 上で定義された

$$x \succ y \Leftrightarrow u(x) > u(y) \quad (8)$$

$$x \sim y \Leftrightarrow u(x) = u(y) \quad (9)$$

なる連続効用関数 $u(\cdot)$ が存在する。このような効用

関数 $u(\cdot)$ によって、 $(Y, \succeq)$ と $(u(Y), \geq)$ とは順序準同形となり、また $u(Y)$ は有界閉区間となることに注意する。このとき、もしどのような $y \in Y$ をとっても必ず他に $y \succ y$ なる $y \in Y$ が存在するならば、このことはどのような $y \in Y$ に対しても $u(y) > u(y)$ なる $y \in Y$ が存在することを意味しており、

$$\max[u(Y), \geq] \neq \emptyset \quad (10)$$

に矛盾する。したがって、

$$\max[Y, \succeq] \neq \emptyset \quad (11)$$

を得る。 $\min[Y, \succeq]$ についても同様である。(証明終)

さて、ここで集合 $Y \subset E^r$ の点 y における接錐 $TC(Y, y)$ を

$$TC(Y, y) = \left\{ h \mid h = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n - y}{c_n}, \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0, y_n \in Y \right\} \quad (12)$$

によって定義しよう。このとき、以下が成り立つ。

[補題 1] 任意の $y \in Y$ に対し、 $TC(Y, y)$ は閉集合で、 Y が凸集合であれば $TC(Y, y)$ も凸集合、かつ $Y \subset TC(Y, y) + \{y\}$ 。

(証明) $TC(Y, y)$ の閉性は文献 5) を参照された。まず、凸性を示す。任意の $h^1, h^2 \in TC(Y, y)$ に対し、

$$h^1 = \lim_{n \rightarrow \infty} (y_n^1 - y)/c_n^1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} c_n^1 = 0 \quad (13)$$

$$h^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} (y_n^2 - y)/c_n^2, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} c_n^2 = 0 \quad (14)$$

なる点列 $\{y_n^1\}$, $\{y_n^2\}$ が Y に存在する。このとき、

$$\begin{aligned} \theta h^1 + (1-\theta)h^2 &= \theta \lim_{n \rightarrow \infty} (y_n^1 - y)/c_n^1 \\ &\quad + (1-\theta) \lim_{n \rightarrow \infty} (y_n^2 - y)/c_n^2 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda y_n^1 + (1-\lambda)y_n^2 - y)/c_n \end{aligned} \quad (15)$$

ただし、

$$\lambda = \frac{\theta c_n^2}{\theta c_n^2 + (1-\theta)c_n^1} \quad (16)$$

$$c_n = \frac{c_n^1 c_n^2}{\theta c_n^2 + (1-\theta)c_n^1} \quad (17)$$

明らかに、 $\theta \in [0, 1]$ なら $\lambda \in [0, 1]$ 、かつ $c_n^1 \rightarrow 0$, $c_n^2 \rightarrow 0$ なら $c_n \rightarrow 0$ および Y の凸性より $\lambda y_n^1 + (1-\lambda)y_n^2 \in Y$ であるから、 $\theta h^1 + (1-\theta)h^2 \in TC(Y, y)$ となり証明すべきことがいえた。

さらに、任意の $z \in Y$ に対し、 Y の凸性を使うと任意の自然数 n に対し、 $y_n = (1/n)z + (1-1/n)y \in Y$ によって、

$$\frac{z - y}{\|z - y\|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n - y}{\|y_n - y\|} \in TC(Y, y) \quad (18)$$

(注 1) 選好 $\succeq$ が連続とは、任意の $y \in E^r$ に対して $S^+(y)$ および $S^-(y)$ が閉集合になることをいう⁴⁾。

(注 2) 各属性を明示するために、評価空間 E^r を $Y_1 \times \dots \times Y_r$ と書くことにする。ここで、 $Y_i = f_i(i=1, \dots, r)$ である。このとき、意思決定者の選好度合が変化しないために必要な、 Y_i の限界的 1 単位の喪失をつぐなう Y_r の増加分のことを Y_i の Y_r に対する限界代替率とよび、 m_i で表すことにする。明らかに、一般には限界代替率は $y \in E^r$ の関数である。すなわち、 $N_i(y)$ を y の ε -開近傍とすると、

$$m_i(y) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{-\Delta y_r}{\Delta y_i}, \quad i=1, \dots, r-1$$

$$(m_r(y) \equiv 1 \text{ とする})$$

ただし、 $y = (y_1, \dots, y_r)$ で

$$(y_1, \dots, y_{i-1}, y_i + \Delta y_i, y_{i+1}, \dots, y_{r-1}, y_r + \Delta y_r) \in I(y) \cap N_i(y) \text{ for } \forall \varepsilon > 0.$$

したがって、 $z-y \in TC(Y, y)$ となり $Y \subset TC(Y, y)$
 $+ \{y\}$ がいえる。 (証明終)

また、明らかにつきを得る。

[補題 2] (中間値の定理) 弱順序選好 $\succeq$ が連続であるとき、 $y^1 \succeq y^2 \succeq y^3$ であれば

$$y^2 \sim \theta y^1 + (1-\theta)y^3 \quad (19)$$

が成り立つような $\theta \in [0, 1]$ が存在する。

ここで、さらにつぎの仮定を設ける

(A.5) (評価規範 f_r に対する選好の単調性)

$$\begin{aligned} \Delta y_r > 0 &\Rightarrow (y_1, \dots, y_{r-1}, y_r + \Delta y_r) \in S^+(y) \\ \Delta y_r < 0 &\Rightarrow (y_1, \dots, y_{r-1}, y_r + \Delta y_r) \in S^-(y) \\ v y &\equiv (y_1, \dots, y_r) \in E^r \end{aligned}$$

《定理 2》 E^r における任意の部分集合 Y 、および (A.5) を満足する滑らかな弱順序選好 $\succeq$ に対し、 Y における選好 $\succeq$ に関する限界代替率ベクトルを $m(y)$ とする時、

$$y^* \in \max[Y, \succeq] \Rightarrow m(y^*) \in TC(Y, y^*)^\perp \quad (20)$$

$$y^* \in \min[Y, \succeq] \Rightarrow -m(y^*) \in TC(Y, y^*)^\perp \quad (21)$$

が成り立つ。ここで、 $TC(Y, y^*)^\perp \equiv \{y \in E^r \mid (y, y^*) \leq 0, \forall y \in TC(Y, y^*)\}$ で $TC(Y, y^*)$ の極錐と呼ばれる。

(証明) まず、滑らかな選好 $\succeq$ が (A.5) を満足すれば、

$$TC(\bar{S}^-(y^*), y^*) + \{y^*\} = \bar{H}^-m(y^*)(y^*) \quad (22)$$

が成り立つことに注意しよう。このことは補題 2 より y^* の適当な近傍 $N(y^*)$ が $I(y^*)$ によって、二つの部分 $S^+(y^*) \cap N(y^*)$ および $S^-(y^*) \cap N(y^*)$ に分けられること、および $\Delta y \equiv (\Delta y_1, \dots, \Delta y_r)$ とすれば限界代替率の定義から

$$\begin{aligned} y^* &\equiv (y_1^*, \dots, y_{r-1}^*, y_r^*) \sim (y_1^* + \Delta y_1, y_2^*, \dots, \\ &\quad y_{r-1}^*, y_r^* - m_1(y^*)\Delta y_1 + o(\Delta y_1)) \equiv \tilde{y} \\ &\sim (y_1^* + \Delta y_1, y_2^* + \Delta y_2, y_3^*, \dots, y_{r-1}^*, y_r^* \\ &\quad - m_1(y^*)\Delta y_1 - m_2(\tilde{y})\Delta y_2 + o(\Delta y_1) + o(\Delta y_2)) \\ &= (y_1^* + \Delta y_1, y_2^* + \Delta y_2, y_3^*, \dots, y_{r-1}^*, y_r^* \\ &\quad - m_1(y^*)\Delta y_1 - m_2(y^*)\Delta y_2 + o(|\Delta y_1| + |\Delta y_2|)) \\ &\quad \vdots \\ &\quad \left(\begin{array}{l} m_2(\tilde{y})\Delta y_2 = m_2(\tilde{y})\Delta y_2 - m_2(y^*)\Delta y_2 \\ \quad + m_2(y^*)\Delta y_2 \text{ かつ } m_2(\tilde{y}) \rightarrow m_2(y^*) \\ \quad (|\Delta y_1| + |\Delta y_2| \rightarrow 0) \end{array} \right) \\ &\sim (y_1^* + \Delta y_1, \dots, y_{r-1}^* + \Delta y_{r-1}, y_r^* \\ &\quad - m_1(y^*)\Delta y_1 - \dots - m_{r-1}(y^*)\Delta y_{r-1} + o(\Delta y)) \end{aligned}$$

(ただし、 $o(\Delta y)$ は $|\Delta y_1| + \dots + |\Delta y_{r-1}| \rightarrow 0$ のとき $o(\Delta y)/(|\Delta y_1| + \dots + |\Delta y_{r-1}|) \rightarrow 0$ なる関数) より (A.5) の仮定を使えば $|\Delta y_1| + \dots + |\Delta y_{r-1}|$ の十分小さい Δy に対し

$$m(y^*)^T \Delta y < 0 \Rightarrow y^* + \Delta y \in S^-(y^*)$$

$$m(y^*)^T \Delta y > 0 \Rightarrow y^* + \Delta y \in S^+(y^*)$$

となることから直ちに得られる。

いま、かりに

$$k \in TC(Y, y^*) \cap [H^+m(y^*)(y^*) - \{y^*\}] \quad (23)$$

なるベクトル $k \neq 0$ が存在したとしよう。このとき、

$$k = \lim_{n \rightarrow \infty} (y_n - y^*)/c_n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0 \quad (24)$$

なる列 $\{y_n\} \in Y$ が存在する。この列 $\{y_n\}$ の中には $S^+(y^*)$ に属する $y_q \in \{y_n\} \cap S^+(y^*)$ が存在する。何故なら、もしすべての $y_n \in \bar{S}^-(y^*)$ であれば (22) 式によって、 $k \in \bar{H}^-m(y^*)(y^*) - \{y^*\}$ となり、(23) 式に矛盾するからである。このような y_q の存在は y^* の最大性に反する。したがって (23) 式は否定され

$$TC(Y, y^*) \subset \bar{H}^-m(y^*)(y^*) - \{y^*\} \quad (25)$$

が成立する。(25) 式の両辺の極錐をとれば (20) 式がいえる。(21) 式についても、まったく同様である。

(証明終)

[系 1] $g_i(y) (i=1, \dots, l)$ を 1 階連続微分な関数とし、 $y^* \in \max[Y, \succeq]$ における微分 $\nabla g_i(y^*)$ が 1 次独立であるとき

$$Y = \{y \in E^r \mid g_i(y) \geq 0, i=1, \dots, l\} \quad (26)$$

であれば、定理 2 の仮定のもとで

$$m(y^*) + \sum_{i=1}^l \lambda_i \nabla g_i(y^*) = 0 \quad (27)$$

を満たす、すべての成分が非負でただ一つのベクトル $(\lambda_1, \dots, \lambda_l) \neq 0$ が存在する。

(注意 2) 系 1 は、通常の数理計画法における Kuhn-Tucker の定理に対応するものである。証明は $\nabla g_i(x^*) (i=1, \dots, l)$ が 1 次独立であるとき、文献 5) と同様の証明によって

$$TC(Y, y^*) + \{y^*\} = \bigcap_i \bar{H}^+ \nabla g_i(y^*)(y^*) \quad (28)$$

が成立するから

$$TC(Y, y^*)^\perp = K(-\nabla g_i(y^*)) \quad (29)$$

を経て直ちに得られる。ここに、 $K(-\nabla g_i(y^*))$ は $-\nabla g_i(y^*) (i=1, \dots, l)$ で生成される凸多角錐である。 λ_i の非負性、および唯一性は、 $\nabla g_i(y^*)$ が 1 次独立であれば $K(-\nabla g_i(y^*))$ が尖凸多角錐であることから明らか。

《定理 3》 Y が凸集合、 $\succeq$ が滑らかな弱順序凸選好で (A.5) を満たすとき、

$$y^* \in \max[Y, \succeq] \Leftrightarrow m(y^*) \in TC(Y, y^*)^\perp \quad (30)$$

である。

(証明) 十分性 ($\Leftarrow$) のみを示す。 $\succeq$ が凸選好であるときは、任意の y に対し $\bar{S}^+(y)$ が凸集合となることに注意すると、

$$m(y^*) \in TC(Y, y^*)^\perp \quad (31)$$

であれば

$$(TC(Y, y^*) + \{y^*\}) \cap H^+_{m(y^*)(y^*)} = \phi \quad (32)$$

(32)式および補題1より、ただちに

$$Y \cap S^+(y^*) = \phi$$

を得る。

(証明終)

(注意3) 定理3で、凸選好の仮定A.4の代りにつぎの(A.4') (強凸選好)

$$y^1 \sim y^2 \Rightarrow \theta y^1 + (1-\theta)y^2 \succ y^1, \quad \forall \theta \in (0, 1) \quad (33)$$

の仮定を課せば、最適解 y^* の唯一性がいえる⁴⁾。

3. 対話形座標軸方向最適化法 (ICOM)

これまでの節で、滑らかな主観的(凸)計画法における解の存在、および、必要あるいは十分条件について述べた。ここでは、最適解を求めるための数値解法について述べる。

意思決定者の選好 $\succeq$ に対し、(A.1)~(A.4)に加え、さらにつぎの仮定を課そう。

$$(A.5') \quad (単調性) \quad \geq \subset \succeq \quad (34)$$

ただし、関係 $\geq$ は E^r における非負象限 E^+_{r-1} によって定義される半順序である。すなわち、

$$y^1 \geq y^2 \Leftrightarrow y^1 \succeq y^2, \quad y^1 \neq y^2 \quad (35)$$

単調性の仮定(A.5')は $(E^r, \geq)$ と $(E^r, \succeq)$ が順序準同形となるような写像 $\varphi: (E^r, \geq) \rightarrow (E^r, \succeq)$ の存在を意味している。このとき、任意の関係 R に対し極大元の集合を

$$\text{ext}[Y, R] = \{\vartheta | (\vartheta, \vartheta) \in R, \quad y \neq \vartheta, \quad \forall y \in Y\} \quad (36)$$

で定義すれば、容易にわかることであるが、(34)式より

$$\text{ext}[Y, \succeq] \subset \text{ext}[Y, \geq] \quad (37)$$

を得る。したがって、弱順序選好 $\succeq$ に対しては極大解は最大解でもあるから

$$\max[Y, \succeq] \subset \text{ext}[Y, \geq] \quad (38)$$

が成立する。

ここで、

$$Y = \{y | y = (y_1, \dots, y_r), \quad y_i = f_i(x), \quad i=1, \dots, r, \quad \forall x \in X\} \quad (39)$$

とすると、 $\text{ext}[Y, \geq]$ はベクトル値評価規範 $f = (f_1, \dots, f_r)$ に対する(評価空間内の)非劣解の集合となる。評価規範 f に適当な滑らかさを仮定することによって、今後、非劣解集合 $\text{ext}[Y, \geq]$ は E^r における滑らかな曲面 T をなすと仮定しよう。このとき、点 y における曲面 T の外向き法線を $t(y) = (t_1(y), \dots, t_{r-1}(y), 1)$ すなわち、

$$\text{hyp } T = \{(y_1, \dots, y_r) | \bar{y}_r \leq y_r, \quad (y_1, \dots, y_r) \in T\}$$

とすると

$$t(y)^T \Delta y \leq 0 \quad \text{for } \forall \Delta y \in TC \quad (\text{hyp } T, y)$$

とすれば定理3、および(38)式よりつぎを得る。

(性質1) 各 $f_i(x)$ が凹関数で、非劣解曲面 T が滑らかなとき、滑らかな弱順序凸選好 $\succeq$ が(A.5')を満足すれば、

$$y^* \in \max[Y, \succeq] \Leftrightarrow y^* \in T, \quad m_i(y^*) = t_i(y^*) \quad i=1, \dots, r-1 \quad (40)$$

[補題3] $y_i = (y_{i1}, \dots, y_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_r)$, $(y_{i-1}, y_i + \Delta y_i) = (y_{i1}, \dots, y_{i-1}, y_i + \Delta y_i, y_{i+1}, \dots, y_r)$ のように表し、 $(y_1, \dots, y_r)_T$ は曲面 T 上の点を表すことにする。このとき、 $\forall y \in T$ に対し性質1の仮定のもとで

$$m_i(y) > t_i(y) \Rightarrow (y_{i-1}, y_i + \Delta y_i)_T \succ (y_{i-1}, y_i)_T = y \quad (\text{充分小さな } \Delta y_i > 0) \quad (41)$$

$$m_i(y) = t_i(y) \Rightarrow (y_{i-1}, y_i + \Delta y_i)_T \prec (y_{i-1}, y_i)_T, \quad \forall \Delta y_i \neq 0 \quad (42)$$

(証明) $y_{(i-1)} = (y_1, \dots, y_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_{r-1})$ とする。限界代替率の定義から

$$(y_1, \dots, y_r)_T \sim (y_{(i-1)}, y_i + \Delta y_i, y_r - m_i(y) \Delta y_i + o(\Delta y_i)) \quad (43)$$

ただし、 $o(\Delta y_i)$ は $\lim_{\Delta y_i \rightarrow 0} o(\Delta y_i)/\Delta y_i = 0$ なる関数である。

一方、曲面上では

$$(y_{(i-1)}, y_i + \Delta y_i)_T = (y_{(i-1)}, y_i + \Delta y_i, y_r - t_i(y) \Delta y_i + o(\Delta y_i)) \quad (44)$$

よって、単調性の仮定(A.5')を用いれば(43)、(44)式より

$$m_i(y) > t_i(y) \quad \text{のとき、} \quad (y_{i-1}, y_i + \Delta y_i)_T \succ (y_1, \dots, y_r)_T, \quad \text{充分小さな } \Delta y_i > 0.$$

逆向きの不等式も同様にして得られる。

また、 $m_i(y) = t_i(y)$ の場合については、 E^r の非正象限を E^-_{r-1} とするとき $Y + E^-_{r-1}$ が凸集合になることはよく知られている⁶⁾から、点 y を通る $Y_i \times Y_r$ 平面上で定理を用いればよい。(証明終)

補題3を利用することによって、以下のような最適化手法を提案することができる。まず、非劣解曲面 T 上の各点は適当なスカラー最適化問題を解くことによって与えることに注意する。たとえば、 $(b_1, \dots, b_r)_T$ に対し

$$b_r = \max_{x \in X} f_r(x) \quad \text{subject to } f_i(x) = b_i, \quad i=1, \dots, r-1 \quad (45)$$

である。このような拘束条件付最適化問題を解くにあたっては、乗数法⁷⁾を用いれば曲面 T 上の点 $(b_1, \dots, b_r)_T$ のみならず、その点における曲面の法線ベクト

ル t をも Lagrange 乗数として同時に求めることができ都合である。

さて、 $y^* \in \max [Y, \succeq]$ を求めることは (40) 式より曲面 T 上の $\succeq$ に関する最適化であるが、さきに述べたように曲面 T 上の点を適当な最適化手法によって解くことにすれば、 $y_1, \dots, y_{r-1}$ を独立変数と見なした拘束条件のない最適化問題に帰着することができる。そこで、まず $y_2, \dots, y_{r-1}$ をあるレベルに固定し、 y_1 のレベルのみを変化させて二つの交換比 m_1, t_1 の大小比較のみによって、たとえば二分法などで $m_1 = t_1$ なる点を曲面 T に見出すことができる。以後、 y_2 軸、 y_3 軸、…というように、つぎつぎと探索する座標軸方向をサイクリックに変えて最適解 $y^* \in \max [Y, \succeq]$ を求める方法を、「対話形座標軸方向最適化法 (Interactive Coordinatewise Optimization Method 略称 ICOM)」と呼ぶことにする。

(注意 4) 曲面 T 上の点を求めるための補助的最適化問題 (45) が容易に解ける場合には、 b_i を適当に変化させて ($j \neq i$ に対する b_j は固定) (45) 式を解き、解 b_r を b_i に対してプロットすれば $f_j = b_j (j \neq i, r)$ レベルでの f_i 対 f_r の非劣解曲線が得られる。この際、適当な補間法を用いる必要があるが、先にも述べた乗数法により (45) 式を解けば、 f_i 対 f_r 非劣解曲線の接線の傾きの情報をもラグランジュ乗数として得られるので、 b_i の標本点は比較的少なくすむ利点がある。このように、意思決定者に各 f_i 対 f_r の非劣解曲線を示すことができれば、意思決定者は提示された非劣解曲線を視察することによって、単に非劣解曲線の 1 次近似の情報 t_i のみに基づくよりも、より簡単に自己の選好解を答えることができる。各座標軸方向の探索において、非劣解曲線を意思決定者に示す方法を大局的な ICOM、それに反し、局所情報 t_i のみを意思決定者に示す方法を局所的な ICOM と呼ぶことにする。Fig. 1 は、3 次元の評価規範をもつ意思決定問題に対する大局的な ICOM の図解である。初期点 $f_1 = a_0, f_2 = b_0$ において、 $f_2 = b_0$ に固定したまま f_3 対 f_1 の非劣解曲線を描き意思決定者に提示したとき、意思決定者がその曲線の上でトレードオフ分析を (主観的に) 行った結果、最も好ましい点は $f_1 = a_1$ に対応する点であった。つぎに $f_1 = a_1$ を固定し f_3 対 f_2 の非劣解曲線を提示した結果は、 $f_2 = b_1$ に対応する所が最も好ましい点であった。以下、同様に固定すべき評価規範を順次変えていって探索した結果を (f_1, f_2) 平面に描くと、 $(a_0, b_0) \rightarrow (a_1, b_0) \rightarrow (a_1, b_1) \rightarrow \dots \rightarrow (a_3, b_3)$ のように探索が進んでいったことが示されている。

Fig. 1 Global ICOM for three dimensional criterion

(注意 5) ICOM は、評価規範の一对比較を最適点探索の基礎にしているところがその最も大きな特徴である。Geoffrion らは、各探索点において意思決定者の選好に関する限界代替率ベクトルを推測しながら、この配法と類似の手続きで探索する方法を提案している²⁾が、限界代替率ベクトルを意思決定者に評価させるのは、意思決定者に相当高度な判断力を要求していることになり、一般に困難な作業である³⁾。また、Haimes らは非劣解曲面の法線 t_i に基づいて、意思決定者に自己の選好を符号をも入れた代理価値として序数的に答えさせる SWT 法を提案している³⁾。ここでは、最適解は代理価値を同時に 0 とする点、すなわち連立方程式の根として得られるが、その方程式を解くことは代理価値が序数尺度であるがゆえに一層困難な作業で、3 次元以上評価規範をもつ問題には SWT 法はそのままでは適用できない。ここで提案した局所的な ICOM では、意思決定者は自己の限界代替率 m_i が t_i よりも大きいかなんかのみを判断すればよく、その違いの度合を点数として答える必要もなく判断しやすいものとなっている。また、大局的な ICOM では、非劣解集合のトレードオフの状況が曲線として視覚化されるので、意思決定者は単に数値のみを示されるよりも、より簡単にトレードオフ分析を行うことが可能となっている。

つぎの定理は Zangwill の結果⁹⁾を若干、修正したものである。

《定理 4》 A を E^r から E^r への点対集合写像とし、

$$y^{k+1} \in A(y^k), y^1 \in E^r \quad (46)$$

で与えられるアルゴリズムは

- 1) $\forall y^k \in Y \subset E^r$, ただし、 Y はコンパクト
- 2) a) $z \in \max [Y, \succeq]$ のとき、任意の $y \in A(z)$

に対し, $y > z_0$

b) $z \in \max[Y, \succeq]$ のときアルゴリズムは終る

3) A は任意の $z \in \max[Y, \succeq]$ で閉じているの条件を満足するとき, 収束する.

(注意 6) 定理 4 を用いれば, 滑らかな主観的凸計画法における ICOM の収束がいえる. すなわち, 文献 7) にも述べられているように, 座標軸方向最適化法では写像 A は閉じており, また, 最適点を含む十分大きい有界閉集合で探索を行うと考えれば, 1) の仮定も満足される. 2) の仮定は定理 3, 補題 3 より明らかに満足される.

4. 意思決定者が複数の場合

前節までは, 意思決定者が 1 人の場合を扱ってきたが, ここでは意思決定者が複数の場合について考える. n 人の意思決定者がそれぞれの選好 $\succeq_i (i=1, \dots, n)$ をもつとき, このような個人の選好をまとめて社会 (グループ) としての一つの選好を作るために, いかなる条件のもとでいかなる社会的選好が可能となるかは興味深い問題であるが, 一応本論文では議論の対象外とする. したがって, ここでは社会的選好として全員一致のルールに基づく, つぎの P をとって解の性質の吟味をすることにする.

【定義】 $y^1 P y^2, y^1, y^2 \in E^r \wedge y^1 \succeq_i y^2, i=1, \dots, n$ で少なくとも一つの i については $y^1 \succ_i y^2$.

このように定義された社会的選好 P は, 明らかに半順序となり, 一般に最適解の集合 $\max[Y, P]$ は空の場合が多い. それゆえ, ここでは極大解 $y^0 \in \text{ext}[Y, P]$ に対し若干の考察を行う. 通常, このような極大解は Pareto 解と呼ばれる. 本節でも, 各意思決定者の選好 $\succeq_i$ は滑らかで凸な弱順序選好とし, 代替案の集合 X の凸性, および評価規範 $f_i(\cdot) (i=1, \dots, r)$ の凹性を仮定する. さらに, 各 $\succeq_i$ が単調性 (A. 5') を満たすとき, 明らかに $\succeq \subset P$ だから $\text{ext}[Y, P] \subset \text{ext}[Y, \succeq]$ である. すなわち, 任意の Pareto 解は非劣解曲面 T 上にあることに注意する. すでに述べたように, 曲面 T 上の各点は補助的最適化問題 (45) を解くことによって得られるので, いま独立変数として $(y_1, \dots, y_{r-1})$ をとることにすれば, y_r は $y_r = (y_1, \dots, y_{r-1})$ の関数として定まる. これを $y_r(y_{r-1})$ とするとき,

$$y_{r-1} \succeq_i' y_{r-2} \Leftrightarrow (y_{r-1}, y_r(y_{r-1})) \succeq_i (y_{r-2}, y_r(y_{r-2})) \quad (47)$$

で定義される $\succeq_i'$ についてつぎが成り立つ.

【補題 4】 X が凸, $f_j(\cdot) (j=1, \dots, r)$ が凹のとき,

選好 $\succeq_i$ が凸ならば, 単調性 (A. 5') のもとに $\succeq_i'$ も凸である.

(証明) まず, 関数 $y_r(y_{r-1})$ は凹であることに注意しよう. このことは $Y=f(X)$ に対し, $Y+E^r$ が凸集合なることから直ちに得られる. したがって, $\succeq_i$ が凸で単調なら

$$\begin{aligned} y_{r-1} \succeq_i' y_{r-2} &\Leftrightarrow (y_{r-1}, y_r(y_{r-1})) \succeq_i (y_{r-2}, y_r(y_{r-2})) \\ &\Rightarrow \theta(y_{r-1}, y_r(y_{r-1})) + (1-\theta)(y_{r-2}, y_r(y_{r-2})) \succeq_i (y_{r-2}, y_r(y_{r-2})), \forall \theta \in [0, 1] \\ &\Rightarrow (\theta y_{r-1} + (1-\theta)y_{r-2}, y_r(\theta y_{r-1} + (1-\theta)y_{r-2})) \succeq_i (y_{r-2}, y_r(y_{r-2})), \forall \theta \in [0, 1] \\ &\Rightarrow \theta y_{r-1} + (1-\theta)y_{r-2} \succeq_i' y_{r-2} \quad \forall \theta \in [0, 1] \end{aligned}$$

より $\succeq_i'$ の凸性がいえる.

(証明終)

【補題 5】 $f_1 \times \dots \times f_{r-1}$ に対応する空間 E^{r-1} において, 選好 $\succeq_i'$ に関する無差別曲面の点 y_{r-1} での法線ベクトル $\bar{m}^i = (\bar{m}_1^i, \dots, \bar{m}_{r-1}^i)$ は

$$\bar{m}^i = m_{r-1}^i - t_{r-1} \quad (48)$$

で与えられる. ただし, m_{r-1}^i は $\succeq_i$ に関する点 $y = (y_{r-1}, y_r(y_{r-1}))$ での限界代替率 $m^i = (m_1^i, \dots, m_{r-1}^i, 1)$ の最初の $r-1$ 成分をとったもので, t_{r-1} も同様に定義される.

(証明) 方向比 $\bar{m}^i = (\bar{m}_1^i, \dots, \bar{m}_{r-1}^i) = k(\bar{m}_1^i, \dots, \bar{m}_{r-2}^i, 1)$ としよう. このとき定義より明らかに

$$\begin{aligned} y_r &\sim (y_{r-1}, y_r(y_{r-1})) + \Delta y_j, y_{r-1} - \bar{m}_j^i \Delta y_j + 0(\Delta y_j), \\ y_r &- t_j \Delta y_j + t_{r-1} \bar{m}_j^i \Delta y_j + 0(\Delta y_j) \\ &= (y_{r-1}, y_r(y_{r-1})) + \Delta y_j, y_{r-1} - \bar{m}_j^i \Delta y_j, \\ y_r &- m_j^i \Delta y_j + m_{r-1}^i \bar{m}_j^i \Delta y_j + 0(\Delta y_j) \end{aligned}$$

が成り立たねばならない. ここで $\Delta y_j \rightarrow 0$ とすると

$$\bar{m}_j^i = (m_j^i - t_j) / (m_{r-1}^i - t_{r-1}) \quad (49)$$

を得る. したがって, $\bar{m}^i = m_{r-1}^i - t_{r-1}$ が成立する.

(証明終)

【定理 5】 補題 4 の仮定のもとで

$$y \in \text{ext}(Y, P) \Leftrightarrow y \in T, \sum_{i=1}^n \lambda_i (m^i(y) - t(y)) = 0 \quad (50)$$

$$\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$$

ただし $\lambda_i \geq 0, i=1, \dots, n$

(証明) 文献 10), 11) とほとんど同じである. 二者択一の定理, すなわち「つぎの

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \bar{m}^i = 0, \lambda_i \geq 0, \text{ かあるいは } \bigcap_i H_{\bar{m}^i}^+(y_{r-1}) \neq \emptyset$$

のいずれかが成立」を用いる. ただし, $H_{\bar{m}^i}^+(y_{r-1})$ は E^{r-1} での半空間であることに注意する. $y \in E_{\succeq_i}(Y, P)$ のとき定理 2 の証明とほとんど同様に, もし $\sum_{i=1}^n \lambda_i \bar{m}^i = 0, \lambda_i \geq 0, i=1, \dots, n$ が成立しないとすると $\bigcap_i H_{\bar{m}^i}^+(y_{r-1}) \neq \emptyset$ だから, 任意の i に対し $y_{r-1} - y_{r-1} \in H_{\bar{m}^i}^+$

(y_{r-}) なる $\bar{y}_{r-}$ が存在し、したがって $\lim_{k \rightarrow \infty} (y_{r-k} - y_{r-}) / \|y_{r-k} - y_{r-}\| = (\bar{y}_{r-} - y_{r-}) / \|\bar{y}_{r-} - y_{r-}\|$ なる $y_{r-k} \in S_i^+(y_{r-}) (i=1, \dots, n)$ が存在し、 $y \in \text{ext}(Y, P)$ に矛盾する。逆に $\sum_{i=1}^n \lambda_i \bar{m}^i = 0 ((\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq 0, \lambda_i \geq 0, i=1, \dots, n)$ のとき、すなわち、 $\bigcap_i H_{\bar{m}^i}^+(y_{r-}) = \phi$ なら $\bigcap_i S_i^+(y_{r-}) = \phi$ だから明らかに $(y_{r-}, y_r(y_{r-})) \in \text{ext}(Y, P)$ 。以上から $m^i = (m_{r-i}, 1)$, $t = (t_{r-1}, 1)$ および (48) 式より (50) 式を得る。 (証明終)

(注意 7) 特に、 $i=1$ の場合 (50) 式は明らかに第 2 節の性質 1 と一致する。

(注意 8) (50) 式の右側を

$$t(y) = \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i m^i \right) / \sum_{i=1}^n \lambda_i, \quad (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq 0, \lambda_i \geq 0, \\ i=1, \dots, n$$

と書き直せば、非劣解曲面 T 上の点 y において各意思決定者の選好の限界代替率ベクトル $m^i = (m_1^i, \dots, m_{r-i}^i, 1)$ の適当な荷重平均が、曲面下の点 y での法線方向比 $t = (t_1, \dots, t_{r-1}, 1)$ に等しいとき、かつそのときに限り、 y は Pareto 解となることを示している。

5. おわりに

意思決定者の選好に関する最適解について、いくつかの性質を明らかにし、滑らかで凸な選好に対して一つの対話形最適化法—ICOM—を提案した。このような最適化法を実際問題に適用する場合には、仮定の吟味に特に注意しなければならない。局所的な主観的判断の蓄積が、全体として必ずしも首尾一貫したものにしないことは、文献 12) などで指摘されているとおりである。また、最適解探索の間に生ずる意思決定者の選好の変化、つまり学習効果も当然考慮されなければならない。このような、実際の諸問題を初めから問題の設定に含ませることが、今後の重要な課題として残っている。ICOM 適用に際しては、初期点や探索すべき座標軸方向の順序を変えて何度も最適化を行い、得られた解の不変性を確認することが必要である。具体的な応用例については文献 13) などを参照されたい。

なお、本研究は昭和 51 年度文部省科学研究費による特定研究「環境汚染の検知と制御」に関する研究の一環として行われたものであることを付記する。

最後に、本論文原稿に対し、いくつかの有益なご指摘をいただいた査読委員の方々に深く感謝いたします。

参考文献

- 1) R. J. Aumann: Subjective Programming; in "Human Judgments and Optimality", ed. by M. W. Shelly and G. L. Bryan, Wiley, 217/242 (1964)
- 2) A. M. Geoffrion, J. S. Dyer and A. Feinberg: An Interactive Approach for Multi-Criterion Optimization, with an Application to the Operation of an Academic Department", Management Science, 19-4, 357/368 (1972)
- 3) Y. Y. Haimes, W. A. Hall and H. T. Freedman: Multiobjective Optimization in Water Resources Systems, Elsevier Scientific Publishing Company (1975)
- 4) G. Debreu: Theory of Value, Wiley (1959)
- 5) M. R. Hestenes: Calculus of Variations and Optimal Control Theory, Wiley (1966)
- 6) P. L. Yu: Cone Convexity, Cone Extreme Points and Nondominated Solutions in Decision Problems with Multiobjectives, J. of Optimization Theory and Applications, 14-3, 319/377 (1974)
- 7) H. Nakayama, H. Sayama and Y. Sawaragi: A Generalized Lagrangian Function and Multiplier Method, J. of Optimization Theory and Applications, 17-3/4, 211/227 (1975)
- 8) J. Wallenius: Comparative Evaluation of Some Interactive Approaches to Multicriterion Optimization, Management Science, 21-12, 1387/1396 (1975)
- 9) W. I. Zangwill: Nonlinear Programming; A Unified Approach, Prentice Hall (1969)
- 10) H. W. Kuhn and A. W. Tucker: Nonlinear Programming, Proc. 2nd Berkeley Symposium on Math. Stat. and Prob., Berkeley (1951)
- 11) 志水: 多目的システム (ベクトル目的関数) の最適化理論, 計測と制御, 14-1, 94/103 (1974)
- 12) A. Ichikawa: Structure of Multidimensional Criteria, Proc. 5th SICE Symp. on Control Theory, 115/120 (1976)
- 13) Y. Sawaragi, S. Ikeda, H. Nakayama, T. Tanino and C. Okumura: An Interactive Optimization Method for a Water Resource Problem with Multiple Objectives, Proc. IFAC Symp. on Environmental Systems Planning, Design and Control (1977)