線形確率系に対する線形関数フィルタの設計法[†]

近 藤 英 二*

Design of Linear Functional Filters for Linear Stochastic Systems

Eiji KONDO*

This paper considers the problem of designing a linear functional filter (L.F.F.) to estimate a linear function of the state variables of a linear stochastic system, for the purpose of implementing a feedback control law.

The L.F.F. is a linear unbiased filter, and is generally of lower order than the Kalman-Bucy filter. It is shown here that, when the L.F.F. is used in the standard LQG control problem, separation property is established for the cost and the stability. For the steady-state case, the minimal order, canonical forms and the optimal design are obtained by a single L.F.F. which estimates a scalar-valued linear function of the state. Finally, an illustrative example is given to show the effectiveness of the L.F.F..

1. ま え が き

線形確率系の制御においては、状態フィードバックを用いることが多い。しかし、状態変数のすべてを直接測定することは一般に困難であるため、すべての状態変数を推定する動的な系として Kalman-Bucy フィルタ^{1),2)}が提案された。このフィルタは最適な線形不偏フィルタであるが、その次元が線形確率系の次元と同じになるという難点がある。一方、実用上の観点からすれば、状態変数の線形関数（フィードバック制御則）の値が得られれば十分である場合が多い。そこで、その値を推定することにより、低次元の線形不偏フィルタを求めることが望まれる。ここでは、このようなフィルタを線形関数フィルタと名付ける。

この論文では、線形関数フィルタの定義を述べ、その最適設計法や標準的な LQG（線形系 - 2 次形式評価 - ガウス性白色雑音）制御問題³⁾への応用について考察する。さらに汎関数フィルタ（線形関数がスカラ

一値をとるときは線形関数フィルタ）に対しては、定常的な場合の最小次元、正準形および最適化アルゴリズムを与える。最後に例題を示し、Kalman-Bucy フィルタとの比較を行う。

2. 線形関数フィルタの定義

確率系を連続時間系で取り扱う場合には、伊藤形確率微分方程式⁴⁾で記述しなければならない。しかし、標準的な LQG 制御問題を取り扱う場合には、慣用的な常微分方程式で表現しても不都合を生じない³⁾。そこで以下では常微分方程式表示を用いるが、解の存在条件などの詳細な記述は省略する^{3),4)}。

制御対象として、つぎの線形確率系を考える：

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + \xi(t), & x(t_0) = x_0, \\ y(t) = C(t)x(t) + \theta(t). \end{cases} \quad (1)$$

ここで x は n 次元状態ベクトル、 u は m 次元許容制御ベクトル^{3),4)}、 y は r 次元出力ベクトルとし、 A, B, C はそれぞれ t の連続実関数を要素とする有界な $n \times n$, $n \times m$, $r \times n$ 行列とする。特に断らないかぎり、以下に現れる行列は t の連続実関数を要素にもつ有界な行列とする。また x_0 は n 次元ガウス性雑音ベクトル、 ξ と θ はそれぞれ n 次元と r 次元のガウス性白色雑音ベクトルとし、 x_0, ξ, θ は互いに独立とする。このとき各雑音の統計的性質を

$$\mathcal{E}\{x_0\} = \bar{x}_0, \quad \mathcal{E}\{(x_0 - \bar{x}_0)(x_0 - \bar{x}_0)'\} = \Sigma_0, \quad (3)$$

$$\mathcal{E}\{\xi(t)\} = 0, \quad \mathcal{E}\{\xi(t)\xi'(\tau)\} = E(t)\delta(t-\tau), \quad (4)$$

$$\mathcal{E}\{\theta(t)\} = 0, \quad \mathcal{E}\{\theta(t)\theta'(\tau)\} = \theta(t)\delta(t-\tau) \quad (5)$$

とする。ここで $\mathcal{E}\{\cdot\}$ は期待値操作を、 $'$ はベクトルや行列の転置を表す。また $\delta(t-\tau)$ は Dirac のデルタ関数であり、 Σ_0 と E は $n \times n$ 半正値対称行列、 θ は $r \times r$ 正値対称行列とする。さらに y と u のみが直接測定可能とする。

この制御対象に対して、 x の線形関数

$$w(t) = K(t)x(t) \quad (t_0 \leq t \leq t_1) \quad (6)$$

[†] 第 16 回計測自動制御学会学術講演会で発表 (昭 52・8)

* 九州大学工学部 福岡市東区箱崎 6-10-1

* Faculty of Engineering, Kyushu University, Fukuoka

(Received March 4, 1977)

なる q 次元列ベクトル w が必要になったとする。ここで K は $q \times n$ 実行列であり、 t_1 は固定終端時刻である。

ところで Tse-Athans^{5), 6)} は、離散時間系に対して Luenberger オブザーバを、 x を推定するフィルタとして使うことを提案している。しかし連続時間系において y が正值な共分散行列をもつ白色雑音 θ を含む場合には、Luenberger オブザーバを用いて x を推定することは良い方法ではない。なぜなら、ここで用いる 2 次形式評価に $\delta(0)[\rightarrow \infty]$ の項が含まれるからである (付録 4 参照)。同様に、たとえ可能だとしても y の線形関数で w を構成したり、線形関数オブザーバ^{7), 8)}を用いて w を推定することは、評価に $\delta(0)[\rightarrow \infty]$ の項が含まれるから避けなければならない。そこで、つぎに定義する線形フィルタにより、 w の推定値 $\hat{w}$ を求める。

【定義 1】 y, u を入力、 $\hat{w}$ を出力とするつぎの p 次元線形系を w を推定する線形関数フィルタ ($q=1$ のとき特に汎関数フィルタ) といい、 p と z をそれぞれ線形関数フィルタの次元と状態ベクトルという。なお $t_0 \leq t \leq t_1$ とする。

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = D(t)z(t) + E(t)y(t) + F(t)u(t), & (7) \\ \hat{w}(t) = G(t)z(t), & (8) \end{cases}$$

【条件 1】

$$\begin{cases} \dot{T}(t) + T(t)A(t) - D(t)T(t) = E(t)C(t), & (9) \\ T(t_0)A(t_0) - D(t_0)T(t_0) = E(t_0)C(t_0), \end{cases}$$

【条件 2】

$$F(t) = T(t)B(t), \quad (10)$$

【条件 3】

$$z(t_0) = T(t_0)\hat{x}_0, \quad (11)$$

【条件 4】

$$G(t)T(t) = K(t). \quad (12)$$

ここで z は p 次元列ベクトルであり、 D, E, F, G, T はそれぞれ $p \times p$, $p \times r$, $p \times m$, $q \times p$, $p \times n$ の実行列となる。

この時、つぎの定理が成立する。

《定理 1》 線形関数フィルタは線形不偏フィルタであり、その最小次元は $1 \leq p \leq n$ の範囲に含まれる。

(証明)

(1) 線形性: 明らかである。

(2) 不偏性: $t_0 \leq t \leq t_1$ なる t に対して

$$e(t) = z(t) - T(t)x(t) \quad (13)$$

とおくと、

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= D(t)e(t) - [\dot{T}(t) + T(t)A(t) \\ &\quad - D(t)T(t) - E(t)C(t)]x(t) \end{aligned}$$

$$+ [F(t) - T(t)B(t)]u(t) - T(t)\xi(t) + E(t)\theta(t) \quad (14)$$

となる。よって条件 1 と条件 2 より

$$\dot{e}(t) = D(t)e(t) - T(t)\xi(t) + E(t)\theta(t) \quad (15)$$

となる。さらに (4), (5) 式と条件 3 より

$$\mathcal{E}\{e(t)\} = 0 \quad (16)$$

となる。すなわち、 z は Tx の (線形) 不偏フィルタになっている。また (13) 式と条件 4 より

$$\dot{w}(t) = w(t) + G(t)e(t) \quad (17)$$

となるから、(16) 式より

$$\mathcal{E}\{\dot{w}(t)\} = \mathcal{E}\{w(t)\} \quad (18)$$

となる。よって、線形関数フィルタは (線形) 不偏フィルタである。

(3) 最小次元の存在範囲: Kalman-Bucy フィルタが $p=n$ のときの最適な線形関数フィルタになっていることより、明らかである。

3. 最適な線形関数フィルタ

ここでは、 w のかわりに推定値 $\hat{w}$ を用いることによって生じる推定誤差の 2 次形式評価

$$\begin{aligned} \Delta J(t_0, t_1) &= \mathcal{E}\left\{[\hat{w}(t_1) - w(t_1)]' W [\hat{w}(t_1) - w(t_1)] \right. \\ &\quad \left. + \int_{t_0}^{t_1} [\hat{w}(t) - w(t)]' R(t) [\hat{w}(t) - w(t)] dt \right\} \quad (19) \end{aligned}$$

を最小にする最適な線形関数フィルタについて考察する。ここで W は $q \times q$ 半正値対称行列、 R は $q \times q$ 正値対称行列とする。

ところで Tx の推定誤差 e の共分散行列を

$$\Sigma_{22}(t) = \mathcal{E}\{e(t)e'(t)\} \quad (20)$$

とおくと、 Σ_{22} は $p \times p$ 半正値対称行列となり

$$\begin{cases} \dot{\Sigma}_{22}(t) = D(t)\Sigma_{22}(t) + \Sigma_{22}(t)D'(t) + T(t)E(t)T'(t) \\ \quad + E(t)\theta(t)E'(t), \\ \Sigma_{22}(t_0) = T(t_0)\Sigma_0T'(t_0) \end{cases} \quad (21)$$

より求める (付録 1 参照)。このとき (19) 式は

$$\begin{aligned} \Delta J(t_0, t_1) &= \text{tr } G'(t_1)WG(t_1)\Sigma_{22}(t_1) \\ &\quad + \int_{t_0}^{t_1} \text{tr } G'(t)R(t)G(t)\Sigma_{22}(t)dt \quad (22) \end{aligned}$$

となる。ここで tr は行列の跡を表す。

すなわち線形関数フィルタの最適設計法は、定義 1 の条件 1~条件 4 と (21) 式の制約条件のもとで、(22) 式を最小化する確定的なパラメータ最適化問題に帰着される。

なお (21), (22) 式の代りに、つぎの随伴系を用いる

と便利な場合もある (付録2 参照):

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{P}}_{22}(t) + \mathbf{P}_{22}(t)\mathbf{D}(t) + \mathbf{D}'(t)\mathbf{P}_{22}(t) \\ + \mathbf{G}'(t)\mathbf{R}(t)\mathbf{G}(t) = \mathbf{O}, \\ \mathbf{P}_{22}(t_1) = \mathbf{G}'(t_1)\mathbf{W}\mathbf{G}(t_1), \end{cases} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \Delta J(t_0, t_1) &= \text{tr } \mathbf{P}_{22}(t_0)\mathbf{T}(t_0)\Sigma_0\mathbf{T}'(t_0) \\ &+ \int_{t_0}^{t_1} \text{tr } \mathbf{P}_{22}(t)[\mathbf{T}(t)\mathbf{E}(t)\mathbf{T}'(t) \\ &+ \mathbf{E}(t)\boldsymbol{\theta}(t)\mathbf{E}'(t)]dt. \end{aligned} \quad (24)$$

ここで随伴行列 $\mathbf{P}_{22}$ は $p \times p$ 半正値対称行列である。

4. 標準的な LQG 制御問題における 最適な線形関数フィルタ

つぎに (1)~(5) 式の制御対象において, 2 次形式評価

$$\begin{aligned} J(t_0, t_1) &= \mathcal{E} \left\{ \mathbf{x}'(t_1)\mathbf{S}\mathbf{x}(t_1) \right. \\ &\left. + \int_{t_0}^{t_1} [\mathbf{x}'(t)\mathbf{Q}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}'(t)\mathbf{R}(t)\mathbf{u}(t)]dt \right\} \end{aligned} \quad (25)$$

を最小にする $\mathbf{u}$ を決定する LQG 制御問題に対して, 状態 $\mathbf{x}$ が直接測定可能な場合, Kalman-Bucy フィルタを用いる場合および線形関数フィルタを用いる場合について考察する。ここで $\mathbf{S}$ と $\mathbf{Q}$ は $n \times n$ 半正値対称行列, $\mathbf{R}$ は $m \times m$ 正値対称行列とする。

[1] 状態 $\mathbf{x}$ が直接測定可能な場合⁴⁾:

この場合の最適制御則 $\mathbf{u}^*$ と評価の最小値 J^+ は

$$\begin{cases} \mathbf{u}^*(t) = \mathbf{K}^*(t)\mathbf{x}(t), \\ \mathbf{K}^*(t) = -\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}'(t)\mathbf{P}_{11}(t), \\ \dot{\mathbf{P}}_{11}(t) + \mathbf{P}_{11}(t)\mathbf{A}(t) + \mathbf{A}'(t)\mathbf{P}_{11}(t) + \mathbf{Q}(t) \\ - \mathbf{P}_{11}(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}'(t)\mathbf{P}_{11}(t) = \mathbf{O}, \\ \mathbf{P}_{11}(t_1) = \mathbf{S}, \end{cases} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} J^+(t_0, t_1) &= \text{tr } \mathbf{P}_{11}(t_0)(\bar{\mathbf{x}}_0\bar{\mathbf{x}}_0' + \Sigma_0) \\ &+ \int_{t_0}^{t_1} \text{tr } \mathbf{P}_{11}(t)\mathbf{E}(t)dt \end{aligned} \quad (27)$$

となる。明らかに $n \times n$ 半正値対称行列 $\mathbf{P}_{11}$ は最適レギュレータにおける Riccati 方程式の解である。

[2] Kalman-Bucy フィルタを用いる場合⁴⁾:

この場合には分離定理が成立するから, 最適制御則 $\mathbf{u}^*$ は Kalman-Bucy フィルタと最適レギュレータより

$$\begin{cases} \mathbf{u}^*(t) = \mathbf{K}^*(t)\hat{\mathbf{x}}(t), \quad \hat{\mathbf{x}}(t_0) = \bar{\mathbf{x}}_0, \\ \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = [\mathbf{A}(t) + \mathbf{L}^*(t)\mathbf{C}(t)]\hat{\mathbf{x}}(t) \\ - \mathbf{L}^*(t)\mathbf{y}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}^*(t), \\ \dot{\Sigma}(t) = \mathbf{A}(t)\Sigma(t) + \Sigma(t)\mathbf{A}'(t) + \mathbf{E}(t) \\ - \Sigma(t)\mathbf{C}'(t)\boldsymbol{\theta}^{-1}(t)\mathbf{C}(t)\Sigma(t), \\ \Sigma(t_0) = \Sigma_0, \quad \mathbf{L}^*(t) = -\Sigma(t)\mathbf{C}'(t)\boldsymbol{\theta}^{-1}(t) \end{cases} \quad (28)$$

となる。ここで

$$\Delta J^*(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \text{tr } \Sigma(t)[\mathbf{K}^*(t)]'\mathbf{R}(t)\mathbf{K}^*(t)dt \quad (29)$$

とおくと, このときの評価の最小値 J^* は

$$J^*(t_0, t_1) = J^+(t_0, t_1) + \Delta J^*(t_0, t_1) \quad (30)$$

となる。明らかに $n \times n$ 半正値対称行列 Σ は Kalman-Bucy フィルタにおける Riccati 方程式の解である。

[3] $\mathbf{w} = \mathbf{K}^*\mathbf{x}$ を推定する線形関数フィルタを用いる場合 ($q=m$ とする):

$$\mathbf{w}(t) = \mathbf{K}^*(t)\mathbf{x}(t) \quad (31)$$

において, 線形関数フィルタにより $\hat{\mathbf{w}}$ を求め

$$\mathbf{u}(t) = \hat{\mathbf{w}}(t) \quad (32)$$

とする。このときの評価 J は, 第3章において

$$\mathbf{W} = \mathbf{O} \quad (33)$$

としたときの ΔJ を用いると,

$$J(t_0, t_1) = J^+(t_0, t_1) + \Delta J(t_0, t_1) \quad (34)$$

となる (付録3 参照)。すなわち Kalman-Bucy フィルタと同様に, 線形関数フィルタを用いることによって生じる評価の増分 ΔJ は, 線形関数フィルタのみに直接依存している。これは評価における分離性であり, 線形関数フィルタを用いる利点の一つである。よって, LQG 制御問題における線形関数フィルタの最適設計法は, 第3章のパラメータ最適化問題に帰着される。これに対して, 一般的な動的補償器を用いるときの評価の増分を求めるためには, 拡大系 (制御対象と動的補償器を合せた系) を取り扱わなければならない。

ところで一般に

$$p \leq n, \quad J(t_0, t_1) \geq J^*(t_0, t_1) \geq J^+(t_0, t_1) \quad (35)$$

の関係があるから, 次元 p の減少量とそれに伴う評価 J の増加量を考慮して, 線形関数フィルタを設計しなければならない。

5. $(t_1 - t_0) \rightarrow \infty$ の場合 (安定性と 評価の修正)

この場合には, フィードバック制御系の安定性が問題となる。一般的な動的補償器を用いる場合には, 一様漸近安定な動的補償器によって拡大系が一様漸近安定化可能でなければならない。しかし線形関数フィルタ (Kalman-Bucy フィルタ) を用いる場合には,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(t) &= \mathbf{H}(t)\mathbf{w}(t) = \mathbf{H}(t)\mathbf{K}(t)\mathbf{x}(t), \\ \mathbf{H}(t): m \times q \text{ 行列} \end{aligned} \quad (36)$$

の状態フィードバックで制御対象が一様漸近安定化可能ならば, あとは線形関数フィルタ (Kalman-Bucy フィルタ) が一様漸近安定になれば良い (付録3 参

照). すなわち, 安定性に関しても便利な分離性が成立する.

なお $(t_1 - t_0) \rightarrow \infty$ のとき評価 $J(\Delta J)$ は発散するので, つぎの修正評価 $I(\Delta I)$ を用いる:

$$I = \lim_{(t_1 - t_0) \rightarrow \infty} \frac{J(t_0, t_1)}{t_1 - t_0}, \quad \Delta I = \lim_{(t_1 - t_0) \rightarrow \infty} \frac{\Delta J(t_0, t_1)}{t_1 - t_0}. \quad (37)$$

5.1 定常的な場合

さらに前述の行列がすべて定数行列となる定常的な場合を考える. 明らかにフィードバック制御系が安定であるための必要十分条件は, $A+BHK$ と $D(A+L^*C)$ のすべての固有値 (極) の実部が負になることである. この安定条件が成立すれば, 第 3 章の (21) ~ (24) 式はそれぞれ

$$\begin{cases} D\Sigma_{22} + \Sigma_{22}D' + TET' + E\theta E' = 0, & (38) \\ \Delta I = \text{tr } G'RG\Sigma_{22}, & (39) \\ P_{22}D + D'P_{22} + G'RG = 0, & (40) \\ \Delta I = \text{tr } P_{22}(TET' + E\theta E') & (41) \end{cases}$$

と修正される. また第 4 章の評価は, つぎのように修正される:

$$\begin{cases} I^+ = \text{tr } P_{11}E, \quad \Delta I^* = \text{tr } \Sigma(K^*)'RK^*, \\ I^* = I^+ + \Delta I^*, \quad I = I^+ + \Delta I, \end{cases} \quad (42)$$

$$p \leq n, \quad I \geq I^* \geq I^+. \quad (43)$$

5.2 定常的な汎関数フィルタ

ここでは, (A, C) が可観測かつ C が最大階数 r をもつ場合の定常的な汎関数フィルタについて考察する. この汎関数フィルタは, 文献 8) の汎関数オブザーバにおいて, 形式的に

$$h=0 \quad (44)$$

とした場合に相当する. よって文献 8) の定理 2 と定理 3 より, D が任意の固有値 (極) をもちうる場合の汎関数フィルタの最小次元と正準形が与えられる. ここではこれ以上の記述は行わないが,

$$n_1 = \min \{j : \text{rank } [C' \ A'C' \ \dots \ (A')^{j-1}C'] = n\} \quad (45)$$

で定義される (A, C) の可観測指数 n_1 を用いると, つぎの定理が成立する.

《定理 2》 $p \geq n_1$ とすれば, すべての K に対して, 任意の極をもちうる汎関数フィルタを構成することができる. このとき正準形の各係数行列の要素は, 定数や設計パラメータの 1 次式よりなる.

なお D の固有値がある制約条件を満足しなければならない場合についても, 文献 8) を参照されたい.

つぎに正準形に含まれる設計パラメータの最適化決定法を求める. (41) 式を変形すると,

$$\Delta I = \text{tr } P_{22} [T \ E] \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & \theta \end{bmatrix} [T \ E]' \quad (46)$$

となる. 明らかに, (46) 式は文献 8) の (68) 式において, (44) 式とした場合には相当しない. すなわち, 汎関数フィルタは汎関数オブザーバの特別な場合ではない. しかし, (40), (46) 式はそれぞれ文献 8) の (63), (68) 式と同一形式であるから, 文献 8) と同様の最適化アルゴリズムが与えられる. 詳細については文献 8) を参照されたい.

6. 例 題

Table 1 に示す定常的な LQG 制御問題を考える.

[1] 状態 x が直接測定可能な場合には $I^+ = 2.701$ となる.

[2] Kalman-Bucy フィルタを用いる場合を Table 2 に示す.

[3] $w = K^*x$ を推定する汎関数フィルタを用いる場合を考える. 明らかに 1 次元の汎関数フィルタは

Table 1 Parameters of LQG control system

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} -3 & 0 & -3 & -9 \\ 0 & -2 & 5 & -5 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \\ B' &= [1 \ -1 \ 0 \ 0] \\ C &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ E &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ Q &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \theta &= \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix} \quad R = [1] \end{aligned}$$

Table 2 Parameters and cost of Kalman-Bucy filter

$$\begin{aligned} A+L^*C &= \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0.083 & -2.725 \\ 0 & -2 & 7.670 & -3.167 \\ 1 & 0 & -0.212 & 1.946 \\ 0 & 1 & -3.054 & -0.097 \end{bmatrix} \\ L^* &= \begin{bmatrix} 3.083 & 6.275 \\ 2.670 & 1.833 \\ -1.212 & -1.054 \\ -1.054 & -3.097 \end{bmatrix} \\ K^* &= [-0.380 \ 2.321 \ -2.183 \ 7.246] \\ I^* &= 16.086 \end{aligned}$$

存在しないので、 $p=2$ ($=n_1$) の場合を考える。定理 2 より、 D は任意の固有値をもつことができる。このときの正準形は、

$$D = \begin{bmatrix} 0 & d_1 \\ 1 & d_2 \end{bmatrix}, \quad G = [0 \ 1], \quad (47)$$

$$E = \begin{bmatrix} -2.839d_1 - 2.321d_2 + 2.605 & -1.424d_1 - 2.321d_2 + 2.605 \\ 0.380d_1 + 1.042d_2 - 0.804 & -2.321d_1 - 2.605d_2 + 1.798 \end{bmatrix}, \quad (48)$$

$$F = \begin{bmatrix} 2.701d_2 - 3.647 \\ -2.701 \end{bmatrix}, \quad (49)$$

$$T = \begin{bmatrix} 0.380d_2 - 1.042 & -2.321d_2 + 2.605 & -0.380d_1 + 1.140d_2 - 3.127 & 2.321d_1 - 4.642d_2 + 5.209 \\ -0.380 & 2.321 & -2.183 & 7.246 \end{bmatrix} \quad (50)$$

Table 3 Parameters and cost of optimal linear functional filter ($p=2$)

$D^\circ = \begin{bmatrix} 0 & -4.079 \\ 1 & -3.275 \end{bmatrix}$
$E^\circ = \begin{bmatrix} 21.783 & 16.015 \\ -5.769 & 19.794 \end{bmatrix}$
$F^\circ = \begin{bmatrix} -12.493 \\ -2.701 \end{bmatrix}$
$G^\circ = [0 \ 1]$
$I^\circ = 18.881$
$I^\circ/I^* = 1.174$

となる。つぎに 2 次元の最適な汎関数フィルタ（記号の右肩に添字[°]を付ける）を Table 3 に示す。この汎関数フィルタと Kalman-Bucy フィルタを比べると、次元は 50% 低下しているが、評価は 17.4% 増加していることがわかる。

7. あとがき

この論文では、線形確率系に対して線形関数フィルタを提案し、その設計法について考察した。まず線形関数フィルタは状態変数の線形関数（フィードバック制御則）の値を推定する線形不偏フィルタであり、一般にその次元を Kalman-Bucy フィルタの次元より小さくできる利点があることを示した。つぎに推定誤差の 2 次形式評価を最小にする最適な線形関数フィルタを設計する問題が、確定的なパラメータ最適化問題に帰着されることを示した。また標準的な LQG 制御問題に応用した場合には、評価に関して分離性が成立することを示した。さらに安定性に関しても分離性が成立することを示した。特に定常的な汎関数フィルタに対しては、その最小次元、正準形および最適化アルゴリズムを与えた。最後に例題を用いて 2 次元の最適な汎関数フィルタと 4 次元の Kalman-Bucy フィルタを比較した結果、評価の増加は 17.4% となり次元の低下を考え合せると、汎関数フィルタを用いることの

有効性が示された。

なお多入力定常系や非定常系に対する線形関数フィルタの最小次元、正準形および最適化アルゴリズムは、現在検討中であり、今後別の機会に詳しい報告をしたいと思います。

参 考 文 献

- 1) R. E. Kalman and R. S. Bucy: New Results in Linear Filtering and Prediction Theory, ASME Trans. Ser. D, **83**, 95/108 (1961)
- 2) M. Athans and E. Tse: A Direct Derivation of the Optimal Linear Filter Using the Maximum Principle, IEEE Trans. on Automatic Control, **AC-12-6**, 690/698 (1967)
- 3) E. Tse: On the Optimal Control of Stochastic Linear Systems, IEEE Trans. on Automatic Control, **AC-16-6**, 776/785 (1971)
- 4) 坂和愛幸: 最適システム制御論, コロナ社 (1972)
- 5) E. Tse and M. Athans: Optimal Minimal-Order Observer-Estimators for Discrete Linear Time-Varying Systems, IEEE Trans. on Automatic Control, **AC-15-4**, 416/426 (1970)
- 6) E. Tse: Observer-Estimators for Discrete-Time Systems, IEEE Trans. on Automatic Control, **AC-18-1**, 10/16 (1973)
- 7) 近藤英二, 高田 勝: 多次元線形関数オブザーバの設計法, 日本機械学会論文集, **42-360**, 2412/2420 (1976)
- 8) 近藤英二: 汎関数オブザーバの正準形と最適設計, 計測自動制御学会論文集, **14-1**, 1/7 (1978)

《付 録》

〈付録 1〉 (21) 式の誘導

(20) と (15) 式より

$$\begin{aligned} \dot{\Sigma}_{22}(t) = & D(t)\Sigma_{22}(t) + \Sigma_{22}(t)D'(t) - T(t)\mathcal{E}\{\xi(t)e'(t)\} \\ & - \mathcal{E}\{e(t)\xi'(t)\}T'(t) + E(t)\mathcal{E}\{\theta(t)e'(t)\} \\ & + \mathcal{E}\{e(t)\theta'(t)\}E'(t) \end{aligned} \quad (A.1)$$

となる。ところで (15) 式の一般解と、(3)～(5) 式の統計的性質より

$$\mathcal{E}\{e(t)\xi'(t)\} = -\frac{1}{2}T(t)E(t), \quad (A.2)$$

$$\mathcal{E}\{e(t)\theta'(t)\} = \frac{1}{2}E(t)\theta(t) \quad (\text{A. 3})$$

となる。また初期条件は自明である。よって(21)式が成立する。

〈付録 2〉 (22)と(24)式が等しいことの証明
(21), (23)式を用いると

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \text{tr } P_{22}(t) \mathcal{J}_{22}(t) \\ &= \text{tr } P_{22}(t) [T'(t)E(t)T'(t) + E(t)\theta(t)E'(t)] \\ & \quad - \text{tr } G'(t)R(t)G(t)\mathcal{J}_{22}(t) \end{aligned} \quad (\text{A. 4})$$

を得る。さらに(A.4)式の両辺を t_0 から t_1 まで積分して、(21), (23)式を用いると、(22)と(24)式が等しいことがわかる。

〈付録 3〉 安定性と評価に関する分離性の証明
拡大系の $(n+p)$ 次元状態ベクトルを

$$\tilde{x}'(t) = [x'(t) \ e'(t)] \quad (\text{A. 5})$$

において、フィードバック制御

$$u(t) = H(t)\hat{w}(t) \quad (\text{A. 6})$$

を行うと、フィードバック制御系の状態方程式は

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{A}(t)\tilde{x}(t) + \tilde{\theta}(t) \quad (\text{A. 7})$$

となる。ここで $\tilde{A}$ は $(n+p) \times (n+p)$ 行列、 $\tilde{\theta}$ は $(n+p)$ 次元のガウス性白色雑音ベクトルであり、それぞれ

$$\tilde{A}(t) = \begin{bmatrix} A(t) + B(t)H(t)K(t) & B(t)H(t)G(t) \\ O & D(t) \end{bmatrix}, \quad (\text{A. 8})$$

$$\tilde{\theta}(t) = \begin{bmatrix} I_n & O \\ -T(t) & E(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi(t) \\ \theta(t) \end{bmatrix} \quad (\text{A. 9})$$

となる。このとき $\tilde{A}$ はブロック上三角行列であるから、明らかに安定性に関する分離性が成立する。

つぎに $\tilde{x}$ の 2 次モーメント行列を

$$\tilde{\Sigma}(t) = \mathcal{E}\{\tilde{x}(t)\tilde{x}'(t)\} \quad (\text{A. 10})$$

とおくと、 $\tilde{\Sigma}$ は $(n+p) \times (n+p)$ 半正値対称行列となり

$$\dot{\tilde{\Sigma}}(t) = \tilde{A}(t)\tilde{\Sigma}(t) + \tilde{\Sigma}(t)\tilde{A}'(t) + \tilde{\theta}(t), \quad \tilde{\Sigma}(t_0) = \tilde{\Sigma}_0 \quad (\text{A. 11})$$

より求まる。ここで $\tilde{\theta}$ と $\tilde{\Sigma}_0$ は $(n+p) \times (n+p)$ 半正値対称行列であり、それぞれ

$$\tilde{\theta}(t) = \begin{bmatrix} E(t) & -E(t)T'(t) \\ -T(t)E(t) & T(t)E(t)T'(t) + E(t)\theta(t)E'(t) \end{bmatrix}, \quad (\text{A. 12})$$

$$\tilde{\Sigma}_0 = \begin{bmatrix} \tilde{x}_0\tilde{x}_0' + \Sigma_0 & -\Sigma_0T'(t_0) \\ -T(t_0)\Sigma_0 & T(t_0)\Sigma_0T'(t_0) \end{bmatrix} \quad (\text{A. 13})$$

となる。なお以下においては、 $q=m$ かつ $H=I_m$ の場合だけを取り扱う。このとき(25)式の評価は

$$J(t_0, t_1) = \text{tr } \tilde{S}\tilde{\Sigma}(t_1) + \int_{t_0}^{t_1} \text{tr } \tilde{Q}(t)\tilde{\Sigma}(t)dt \quad (\text{A. 14})$$

となる。ここで $\tilde{S}$ と $\tilde{Q}$ は $(n+p) \times (n+p)$ 半正値対称行列であり、それぞれ

$$\tilde{S} = \begin{bmatrix} S & O \\ O & O \end{bmatrix}, \quad (\text{A. 15})$$

$$\tilde{Q}(t) = \begin{bmatrix} Q(t) + K'(t)R(t)K(t) & K'(t)R(t)G(t) \\ G'(t)R(t)K(t) & G'(t)R(t)G(t) \end{bmatrix} \quad (\text{A. 16})$$

となる。しかし、つぎの随伴系を用いるほうが便利である：

$$\begin{cases} \dot{\tilde{P}}(t) + \tilde{P}(t)\tilde{A}(t) + \tilde{A}'(t)\tilde{P}(t) + \tilde{Q}(t) = O, \\ \tilde{P}(t_1) = \tilde{S}, \\ J(t_0, t_1) = \text{tr } \tilde{P}(t_0)\tilde{\Sigma}_0 + \int_{t_0}^{t_1} \text{tr } \tilde{P}(t)\tilde{\theta}(t)dt. \end{cases} \quad (\text{A. 17})$$

ここで随伴行列 $\tilde{P}$ は

$$\tilde{P}(t) = \begin{bmatrix} P_{11}(t) & P_{12}(t) \\ P_{12}'(t) & P_{22}(t) \end{bmatrix} \quad (\text{A. 18})$$

なる $(n+p) \times (n+p)$ 半正値対称行列である。このとき $n \times p$ 行列 P_{12} は

$$\begin{aligned} & \dot{P}_{12}(t) + P_{12}(t)D(t) + [A(t) + B(t)K(t)]'P_{12}(t) \\ & \quad + [P_{11}(t)B(t) + K'(t)R(t)]G(t) = O, \\ & P_{12}(t_1) = O \end{aligned} \quad (\text{A. 19})$$

となる。ここで

$$P_{11}(t)B(t) + K'(t)R(t) = O \quad (\text{A. 20})$$

とおくと、線形常微分方程式の解の一意性より

$$P_{12}(t) = O \quad (\text{A. 21})$$

となり、 P_{11} と P_{22} が分離される。このとき(A.17)と(A.20)式より、 K と P_{11} はそれぞれ(26)式の K^* と P_{11} に一致する。さらに、 P_{22} は(23)式において $W=O$ とした場合に一致し、評価 J は(34)式となる。すなわち評価に関する分離性が成立する。

〈付録 4〉 Luenberger オブザーバを用いる場合の評価

x の推定値 $\hat{x}$ を求める Luenberger オブザーバは

$$\dot{\hat{z}}(t) = \hat{D}(t)\hat{z}(t) + \hat{E}(t)y(t) + \hat{F}(t)u(t), \quad (\text{A. 22})$$

$$\hat{x}(t) = \hat{G}(t)\hat{z}(t) + \hat{H}(t)y(t), \quad (\text{A. 23})$$

[条件 A.1]

$$\begin{cases} \dot{\hat{T}}(t) + \hat{T}(t)A(t) - \hat{D}(t)\hat{T}(t) = \hat{E}(t)C(t), \\ \hat{T}(t_0)A(t_0) - \hat{D}(t_0)\hat{T}(t_0) = \hat{E}(t_0)C(t_0), \end{cases} \quad (\text{A. 24})$$

[条件 A.2]

$$\hat{F}(t) = \hat{T}(t)B(t), \quad (\text{A. 25})$$

[条件 A.3]

$$\hat{z}(t_0) = \hat{T}(t_0)\tilde{x}_0, \quad (\text{A. 26})$$

[条件A.4]

$$\hat{G}(t)\hat{T}(t)+\hat{H}(t)C(t)=I_n \quad (\text{A. 27})$$

となる。ここで $\hat{z}, \hat{D}, \hat{E}, \hat{F}, \hat{G}, \hat{H}, \hat{T}$ はそれぞれ適当な次元の実行列とする。このとき

$$\hat{w}(t)=K(t)\hat{x}(t) \quad (\text{A. 28})$$

において、適当な次元の任意実行列 X に対して

$$\hat{e}(t)=\hat{z}(t)-\hat{T}(t)x(t), \quad \hat{\mathcal{L}}(t)=\mathcal{E}\{\hat{e}(t)\hat{e}'(t)\}, \quad (\text{A. 29})$$

$$\begin{aligned} \phi(X(t), t) &= \text{tr } K'(t)X(t)K(t) \left\{ \hat{H}(t)\theta(t)\hat{H}'(t)\delta(0) \right. \\ &\quad + \frac{1}{2}\hat{H}(t)\theta(t)\hat{E}'(t)\hat{G}'(t) \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}\hat{G}(t)\hat{E}(t)\theta(t)\hat{H}'(t)+\hat{G}(t)\hat{\mathcal{L}}(t)\hat{G}'(t) \right\} \end{aligned} \quad (\text{A. 30})$$

とすると、(19)式の評価は

$$\Delta J(t_0, t_1)=\phi(W, t_1)+\int_{t_0}^{t_1}\phi(R(t), t)dt \quad (\text{A. 31})$$

となる。したがって評価の中に $\text{tr } K'RK\hat{H}\theta\hat{H}'\delta(0)$ [$\rightarrow\infty$] の項があるので、Luenberger オブザーバを用いることは良い方法ではない ((25)式の評価を用いても同様である)。この欠点を除くためには、 θ と R が正值で $K \neq O$ であるから

$$\hat{H}(t)=O \quad (\text{A. 32})$$

としなければならず、 $\hat{x}$ を求めるフィルタの最小次元は線形確率系の次元 n となる。明らかに、Kalman-Bucy フィルタは $\hat{x}$ を求める最小次元の最適な線形不偏フィルタである。