動作環境の変化を考慮に入れた最適信頼性設計[†]

稲垣 敏之*・井上 紘一*・明石 一*

Optimal Reliability Design of Systems under Changing Environment

Toshiyuki INAGAKI*, Koichi INOUE* and Hajime AKASHI*

This paper presents a new formulation of an optimal reliability design problem for a system under changing environment, where the system components have time-dependent reliability. Our optimization problem is of a nonlinear mixed-integer program and its solution determines simultaneously an optimal reliability allocation and an optimal preventive maintenance schedule. A computationally economical method of solution is presented on the basis of a nonlinear programming algorithm. By use of an illustrative example, the importance of our formulation is shown in comparison with other two formulations.

1. 緒 言

システムの故障が多方面に影響を及ぼす今日、高信頼性システムの実現はますます重要な課題となりつつある。信頼性理論の一分野である最適信頼性設計問題では、コスト、重量、容積などの種々の制約条件のもとで、システム信頼度を最大にすることに心が払われる。この種の最適化問題は、電子工学、原子力工学、OR などをはじめとする多くの分野で研究されてきた¹⁾。

従来の研究のほとんどは、システム構成要素（以後、要素と呼ぶ）の信頼度の時間不変性を仮定している。しかし実際は、要素の信頼度は時間経過とともに単調に減少するものであり、さらにその時間的挙動は、要素のおかれている環境（動作環境とよぶ）に大きく左右される。電子部品を例にとれば、故障発生頻度は周囲の温度や湿度に依存し、好ましくない環境における故障発生頻度は、理想的環境におけるその 10^2 倍に達する場合もあることが報告されている^{2), 3)}。

本報告では、上述の観点から、時間的に変化する信頼度をもつ要素から成るシステムに対する新しい最適

信頼性設計問題を定式化し、あわせてその一解法を提案する。ここで与える最適化問題は、動作環境の変化を考慮に入れて、最適信頼性配分と最適予防保全計画とを同時に決定するものであり、文献4)をさらに発展させたものである。

最適信頼性設計問題に予防保全計画問題を組み込んだ理由をつぎに述べる。要素の信頼度向上をはかる際には、つぎの2方法が重要である。すなわち、より高い水準の生産技術を用いて高い信頼性を有する要素を製作する方法と、適切な保全を適時実施することによって、機能達成能力を高める方法である。ところで、生産技術がすでにある程度高い水準に達している今日の状況では、それを上回る生産技術の開発には多大の費用と時間を要する。それゆえ、上述の2方法を排他的に採るのではなく、技術的水準と保全コストを考慮に入れて、両方法を組み合わせた方策を採ることが重要となる。本報告で与えた最適化問題の定式化はこの考えに基づくものである。

2. 問題の記述

m 個の要素の論理的直列構造として表現されるシステムを考察の対象とする。各要素は、作動状態と故障状態との2状態をとるものとし、つぎの2値変数を導入する。

$$x_r(u) = \begin{cases} 1 & \text{要素 } r \text{ は時刻 } u \text{ に作動状態} \\ 0 & \text{要素 } r \text{ は時刻 } u \text{ に故障状態} \end{cases}$$

また各要素は、一定の動作環境のもとでは、IFR (Increasing Failure Rate) のワイブル分布に従うものとする。要素 r の形状母数および尺度母数を α_r, λ_r と書けば、故障率 $h_r(u)$ は次式で与えられる。

$$h_r(u) = \alpha_r \lambda_r^{\alpha_r} u^{\alpha_r - 1}, \quad \alpha_r > 1 \quad (1)$$

要素 r の平均寿命は、 $\Gamma(\alpha_r + 1)/\lambda_r$ で与えられるが、本報告では、生産技術水準の向上によって、 λ_r の値の小さな要素、すなわち平均寿命の長い要素の製作が可能である場合を考えている。

要素 r の動作環境変化を、状態空間 $\Phi_r = \{1, 2\}$ 上

[†] 第20回自動制御連合講演会で発表(昭52・12)

* 京都大学工学部 京都市左京区吉田本町

* Faculty of Engineering, Kyoto University, Kyoto

(Received January 23, 1978)

のマルコフ過程 $\{w_r(u)\}$ でモデル化する。ここに状態 1 は理想的動作環境を表し、状態 2 は何らかの意味で好ましくない動作環境を表す。変化する動作環境のもとでの要素 r の故障率を

$$\tilde{h}_r(u) = c_r(u) \alpha_r \lambda_r a_r u^{a_r-1} \quad (2)$$

で与え、係数 $c_r(u)$ を次式で定める。

$$c_r(u) = \begin{cases} c_{1r}(=1) & w_r(u)=1 \text{ のとき} \\ c_{2r}(> 1) & w_r(u)=2 \text{ のとき} \end{cases}$$

このとき、保全を行わない場合の時刻 u における要素 r の信頼度 $R_r(u)$ は次式で表される。

$$R_r(u) \triangleq P\{x_r(\tau)=1 \text{ for } 0 \leq \tau \leq u\} \\ = \exp \left[- \int_0^u \alpha_r \lambda_r a_r c_r(\tau) \tau^{a_r-1} d\tau \right] \quad (3)$$

最適化問題の目的関数としては、システムの平均使命信頼度をとる。システムの使命信頼度 J は

$$J \triangleq P \{ \prod_{r \in m} x_r(u)=1 \text{ for } 0 \leq u \leq T | PM \} \quad (\text{注 } 1) \quad (4)$$

で定義され、予防保全 (PM) を行う場合に、システムが定められた計画期間 $[0, T]$ の全域にわたって正常に作動する確率としての意味をもつ。また、システム平均使命信頼度 $\bar{J}$ は

$$\bar{J} \triangleq E\{J\} \quad (5)$$

として定義される。ここに、記号 $E\{\cdot\}$ は数学期待値を表す。なお (4) 式は、計画期間中に要素の故障が発生した場合にはそのシステムは使命を達成できなかったものとみなすことを意味する。それゆえ、故障発生時の事後保全 (CM) は本報告の考察範囲から除外される。

予防保全の方式として取替方策を採るものとし、期間 $[0, T]$ における要素 r の取替回数を n_r 、取替時刻を t_{k_r} ($k_r \in n_r$) で表すと、最適信頼性配分と最適予防保全計画を同時に決定する最適化問題は、以下のように定式化できる。

(問題 1)

$$\max_{\lambda, n, t} \bar{J}(\lambda, n, t) \quad (6)$$

subject to

$$\sum_{r \in m} (n_r + 1) [g_r(\lambda_r) + C_{I_r}] \leq C_{\text{total}} \quad (7)$$

$$0 < \lambda_{rL} < \lambda_r \leq \lambda_{rU} \quad (8)$$

$$n_r: \text{非負整数} \quad (9)$$

$$0 \leq t_1^r \leq \dots \leq t_{n_r}^r \leq T, \quad r \in m \quad (10)$$

なお、上で用いた記号の意味はつぎのとおりである。

$$\lambda \triangleq (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$$

$$n \triangleq (n_1, \dots, n_m)$$

$$t \triangleq (t^1, \dots, t^m), \quad t^r \triangleq (t_1^r, \dots, t_{n_r}^r)$$

λ_{rL} : λ_r の下限値

λ_{rU} : λ_r の上限値

$g_r(\lambda_r)$: 尺度母数の値が λ_r である要素 r の製作コストであり、つぎの性質をもつ。

(a) 半開区間 $(\lambda_{rL}, \lambda_{rU}]$ で単調減少かつ凸であり、2階連続微分可能

(b) $\lim_{\lambda_r \rightarrow \lambda_{rL}+0} g_r(\lambda_r) = +\infty$

C_{I_r} : 要素 r の取替コスト

C_{total} : 許容コスト

3. 目的関数の明確な関数表現の導出

3.1 使命信頼度

つぎの仮定をおく。

- i) 各要素の故障は互いに統計的独立に発生する
- ii) 新しい要素は使用開始時には完璧な状態にある
- iii) 取替は瞬時に完了する
- iv) 取替に関する待ち行列は発生しない
- v) 各要素の動作環境は互いに統計的独立である
- vi) 時刻 $u=0$ では、各要素の動作環境は理想的状態にある

以上の仮定のもとで、システム使命信頼度 J の関数表現を導く。

要素 r の取替時刻の系列 t^r は、計画期間 $[0, T]$ の分割 $\Delta_r: 0=t_0^r \leq t_1^r \leq \dots \leq t_{n_r}^r \leq t_{n_r+1}^r=T$ を与える。ここで新しく、以下の 3 性質をもつ分割 $\Delta: 0=t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_N \leq t_{N+1}=T$ を考える。

- (a) すべての $r \in m$ に対して、 Δ は Δ_r の細分割
- (b) すべての $q \in N$ に対して、 $t_q = t_{k_r}^r$ を満たす組 (r, k_r) が少なくとも 1 組存在する
- (c) $N \leq \sum_{r \in m} n_r$

さて、事象 E_0, E_q, M_q をつぎのように定める。

$$E_0 \triangleq \text{event} \{ \prod_{r \in m} x_r(u)=1 \text{ at } u=0 \}$$

$$E_q \triangleq \text{event} \{ \prod_{r \in m} x_r(u)=1 \text{ for } t_{q-1} \leq u \leq t_q \}$$

$$M_q \triangleq \text{event} \{ \text{時刻 } t_q \text{ で、} t_q = t_{k_r}^r \text{ を満たす要素 } r \text{ を取り替える} \}$$

これらの記号を用いれば、前述の仮定 i), iii) ならびに iv) のもとで、使命信頼度 J はつぎのように書くことができる。

$$J = \prod_{q \in N+1} P \{ \prod_{r \in m} x_r(u)=1 \text{ for } t_{q-1} \leq u \leq t_q | E_0, E_1, M_1, \dots, E_{q-1}, M_{q-1} \} \\ = \prod_{r \in m} \prod_{q \in N+1} P \{ x_r(u)=1 \text{ for } t_{q-1} \leq u \leq t_q \}$$

(注 1) 記法 $r \in m$ は、 $r \in \{1, 2, \dots, m\}$ の略記法である。

$$\leq \tau_q | E_0, E_1, M_1, \dots, E_{q-1}, M_{q-1} \rangle \quad (11)$$

各 τ_{q-1} に対し、要素 r を最後に取り替えた時刻が

$$t_{k_r, r} = \max \{ t_{u, r}; t_{u, r} \leq \tau_{q-1} \} \quad (12)$$

として一意的に定まることに注意すれば、(11)式はさらにつぎのように書き換えられる。

$$\begin{aligned} J &= \prod_{r \in m} \prod_{q \in N+1} \frac{R_r(\tau_q - t_{k_r, r})}{R_r(\tau_{q-1} - t_{k_r, r})} \\ &= \prod_{r \in m} \prod_{k_r \in n_r+1} R_r(t_{k_r, r} - t_{k_r, r-1}) \\ &= \prod_r \exp \left[- \sum_{k_r} \int_{t_{k_r, r-1}}^{t_{k_r, r}} \alpha_r \lambda_r \alpha_r c_r(u) (u - t_{k_r, r-1})^{\alpha_r-1} du \right] \triangleq \prod_r J_r \end{aligned} \quad (13)$$

ここに、2番目の等号は仮定 ii) による。

3.2 平均使命信頼度

仮定 v) から次式が成立する。

$$\bar{J} = \prod_{r \in m} E \{ J_r \} \quad (14)$$

そこで、要素 r に注目し、その平均使命信頼度を求めることにする。なお表記の簡単化のために、添字 r は省略する。まず、次式で $\bar{m}^i(u)$ を定義する。

$$\begin{aligned} \bar{m}^i(u) &\triangleq E \left\{ \exp \left[- \int_u^T c(\tau) s(\tau) d\tau \right] \middle| c(u) = c_i \right\} \\ &= E \left\{ \exp \left[- \int_u^T c(\tau) s(\tau) d\tau \right] \middle| w(u) = i \right\} \end{aligned}$$

ただし、 $s(\tau)$ はつぎのとおりである。

$$s(\tau) \triangleq \begin{cases} \alpha \lambda^\alpha \tau^{\alpha-1}, & 0 \leq \tau \leq t_1 \\ \alpha \lambda^\alpha (\tau - t_1)^{\alpha-1}, & t_1 \leq \tau \leq t_2 \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ \alpha \lambda^\alpha (\tau - t_n)^{\alpha-1}, & t_n \leq \tau \leq T \end{cases}$$

仮定 vi) から、要素の平均使命信頼度は $\bar{m}^i(0)$ で表されるが、これを得るためには微分方程式

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{m}^i(u)}{du} &= (c_i s(u) + \sigma_{ij}) \bar{m}^i(u) - \sigma_{ij} \bar{m}^j(u) \\ \bar{m}^i(T) &= 1, \quad i, j \in 2, \quad i \neq j \end{aligned} \quad (15)$$

を解く必要がある。ここに σ_{ij} は次式で定義される。

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &\triangleq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} P \{ c(u+h) = c_j | c(u) = c_i \} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} P \{ w(u+h) = j | w(u) = i \} \end{aligned}$$

(15)式は区分的連続時変係数を有し、解析的に解を得ることは困難である。そこで、 $\bar{m}^i(0)$ の近似表現をつぎのようにして導出する。

まず、 $\bar{m}^2(u)$ を既知とすれば、 $\bar{m}^1(u)$ は

$$\bar{m}^1(u) = z(u) \exp \left[- \int_u^T (c_1 s(\tau) + \sigma_{12}) d\tau \right] \quad (16)$$

として得られる。ただし、 $z(u)$ は微分方程式

$$\frac{dz(u)}{du} = -\sigma_{12} \bar{m}^2(u) \exp \left[\int_u^T (c_1 s(\tau) + \sigma_{12}) d\tau \right]$$

の解である。これら両式から次式を得る。

$$\begin{aligned} \bar{m}^1(0) &= \exp \left[- \int_0^T (c_1 s(\tau) + \sigma_{12}) d\tau \right] \{ 1 + \sigma_{12} \\ &\quad \times \int_0^T \bar{m}^2(v) \exp \left[\int_v^T (c_1 s(\tau) + \sigma_{12}) d\tau \right] dv \} \end{aligned} \quad (17)$$

実際には $\bar{m}^2(u)$ は未知であるが、(17)式から $\bar{m}^1(0)$ の下界 $\bar{m}^1(0)_{LB}$ と上界 $\bar{m}^1(0)_{UB}$ とをつぎのように得ることができる (付録 1 参照)。

$$\begin{aligned} \bar{m}^1(0)_{LB} &= \exp(-\sigma_{12} T) \exp \left[- \int_0^T c_1 s(\tau) d\tau \right] \\ &\quad + [1 - \exp(-\sigma_{12} T)] \exp \left[- \int_0^T c_2 s(\tau) d\tau \right] \end{aligned} \quad (18)$$

$$\bar{m}^1(0)_{UB} = \exp \left[- \int_0^T c_1 s(\tau) d\tau \right] \quad (19)$$

そこで、 $\bar{m}^1(0)$ の近似表現を次式で与える。

$$\begin{aligned} \bar{m}^1(0) &= p \cdot \exp \left[- \int_0^T c_1 s(\tau) d\tau \right] \\ &\quad + (1-p) \exp \left[- \int_0^T c_2 s(\tau) d\tau \right] \\ &= \sum_{i \in 2} A_i \cdot \exp \left[- \sum_{k \in n+1} c_i \lambda^\alpha (t_k - t_{k-1})^\alpha \right] \end{aligned} \quad (20)$$

ここに

$$0 < p \leq 1, \quad A_1 \triangleq p, \quad A_2 \triangleq 1 - A_1 \quad (21)$$

以上のことから、システムの平均使命信頼度は近似的に次式で表現される。

$$\begin{aligned} \bar{J} &= \prod_{r \in m} \left\{ \sum_{i \in 2} A_{ir} \cdot \exp \left[- \sum_{k_r \in n_r+1} c_{ir} \lambda_r \alpha_r (t_{k_r, r} - t_{k_r, r-1})^{\alpha_r} \right] \right\} \triangleq \prod_r \bar{J}_r \end{aligned} \quad (22)$$

ただし、 A_{ir} は各 r ごとに (21) 式で定義される。

4. 問題規模の縮小

(6)式はつぎのように表すことができる。

$$\max_{\lambda, n} [\max_t \bar{J}(\lambda, n, t)] \quad (23)$$

ここで、 λ と n はすでに決められたとしよう。このとき制約条件 (7) - (10) のもとでのつぎの 3 種の最適化は等価である (付録 2 参照)。

- t に関する $\bar{J}$ の最大化
- 各 $r \in m$ について、 t^r に関する $\bar{J}_r$ の最大化
- 各 $r \in m$ について、 t^r に関する次式の最小化

$$F_r(t^r) \triangleq \sum_{k_r \in n_r+1} (t_{k_r, r} - t_{k_r, r-1})^{\alpha_r}$$

ところで, $F_r(t^r)$ のヘッセ行列が (10) 式を満たす t^r の領域で正定であることに注意すれば, $F_r(t^r)$ は, $\partial F_r(t^r)/\partial t_{kr}^r = 0$, すなわち

$$t_{kr+1}^r - t_{kr}^r = t_{kr}^r - t_{kr-1}^r, \quad r \in m, \quad k_r \in n_r + 1 \quad (24)$$

を満たす t^r において最小値をとることがわかる. この式は, 準最適予防代替計画 (注 2) が, 各要素ごとの定期的代替計画となることを示している.

このことから, 決定変数の少ない最適化問題がつかないように得られる.

(問題 2)

$$\max_{\lambda, n} \Pi \sum_{i \in 2} A_{ir} \cdot \exp[-c_{ir} \lambda_r \alpha_r (n_r + 1)^{1-\alpha_r} T^{\alpha_r}] \quad (25)$$

subject to (7) - (9).

5. 非線形計画法を用いる解法

問題 2 は非線形混合整数計画問題であり, このクラスの問題に対する一般解法アルゴリズムは未だ確立されていない. ここでは非線形計画 (NLP) 法を用いる簡単な解法を与える.

整数値変数 $n_r (r \in m)$ を実数値変数として扱い, 混乱を避けるため, n_r^e で表す. このとき問題 2 は, λ と $n^e \triangleq (n_1^e, \dots, n_m^e)$ に関する NLP 問題 (問題 2 a とよぶ) となる. 一方, 問題 2 において, $n_r (r \in m)$ をある点に固定すれば, λ に関する NLP 問題 (問題 2 b) が得られる.

解法手順をつぎに示す.

- I. $A_{ir} (i \in 2, r \in m)$ の初期値設定
- II. 問題 2 a を解き, 最適解 $\tilde{\lambda}, \tilde{n}^e$ を得る
- III. 問題 2 の n を $n_{(\mu)} \triangleq (n_1^{\mu}, \dots, n_m^{\mu})$, $\mu \in 2^m$, に固定する. ここに n_r^{μ} は, $\tilde{n}_r^e - 1 < n_r^{\mu} \leq \tilde{n}_r^e \leq n_r^{UB} < \tilde{n}_r^e + 1$ を満たす整数 n_r^{LB} あるいは n_r^{UB} である. 問題 2 b を解き, 最適解 $\lambda_{(\mu)}$ を得る
- IV. ステップ III を各 $\mu \in 2^m$ に対して繰り返し, 最大の $\bar{J}(\lambda_{(\mu)}, n_{(\mu)})$ を与える組 (λ^*, n^*) を求める
- V. 各 $r \in m$ に対し, 過程 $\{c_r(u)\}$ の N 本の見本過程 $\{c_r^v(u); 0 \leq u \leq T\}$, $v \in N$, を計算機によって発生させ, 次式が近似的に成立するか否かを調べる

$$\frac{1}{N} \sum_{v \in N} \left[- \sum_{k_r \in n_r^* + 1}^{t_{k_r}^{r*}} \alpha_r \lambda_r^* \alpha_r c_r^v(u) (u - t_{k_r-1}^{r*})^{\alpha_r-1} du \right]$$

(注 2) 「準最適計画」は, 近似表現した目的関数に対する「最適計画」の意味である.

$$\approx \sum_{i \in 2} A_{ir} \cdot \exp[-c_{ir} \lambda_r^* \alpha_r (n_r^* + 1)^{1-\alpha_r} T^{\alpha_r}] \quad (26)$$

ここに, $t_{k_r}^{r*} \triangleq k_r \cdot T / (n_r^* + 1)$ である. (26) 式がすべての $r \in m$ に対して近似的に成立すれば, アルゴリズム停止. それ以外の場合には, A_{ir} を修正してステップ I へ戻る

以下の例では, 問題 2 a, 問題 2 b を, 一般化ラグランジュ関数^{5)~7)}を用いた Pierre・Lowe のアルゴリズム⁵⁾によって解いている.

6. 数値例

4 個の要素から成る直列システムを例にとり, $g_r(\lambda_r)$ としてつぎのモデルを考える.

$$g_r(\lambda_r) = K_r \left(\log_{10} \frac{L_r}{\lambda_r - \lambda_{rL}} \right)^{M_r} \quad (27)$$

これは文献 8) で与えられたコスト・信頼度モデルと同様の基盤に立つものである. $C_{\text{total}} = 10^4$, $T = 1$, $K_r = 10^2$, $L_r = 1$, $M_r = 2 (r \in 4)$ とし, 他のパラメータを Table 1 のように定める. ここでは, 要素 1, 2 の動作環境のみが変化し, 要素 3, 4 の動作環境は常に理想的である場合を考えている.

5. で与えた解法によって得られた問題 2 の最適解を Table 2 の Case 1 に示す. なお, この解は局所最適解である. それは, 問題 2 a が非凸計画問題であることによる.

本報告で与えた定式化によって得られる解の有効性を, つぎに述べる二つの定式化方法 (Case 2, Case 3)

Table 1 Parameters for example

Component r	1	2	3	4
α_r	1.2	1.3	1.2	1.3
λ_{rL}	0.030	0.030	0.015	0.015
λ_{rU}	0.45	0.45	0.40	0.40
C_{Ir}	20	20	20	20
σ_{12}	10.0	3.0	—	—
σ_{21}	10.0	7.0	—	—
c_{1r}	1.0	1.0	1.0	1.0
c_{2r}	10.0	10.0	1.0	1.0

Table 2 Optimal decision variables

Component r		1	2	3	4
Case 1	λ_r	0.03229	0.03475	0.02021	0.02224
	n_r	4	5	2	4
Case 2	λ_r	0.03207	0.03514	0.01724	0.02029
	n_r	3	4	2	3
Case 3	λ_r	0.0300003	0.0300024	0.01522	0.01533
	n_r	0	0	0	0

との比較によって示す。Case 2は、予防取替方策は採用するが動作環境変化を考慮しない場合である。このときの目的関数は、(13)式で、 $C_r(u) \equiv 1 (r \in m)$ とおいたときの J である。この場合、(24)式を満たす定期的取替計画は、厳密に最適な計画となり³⁾、目的関数は(25)式において、 $A_{1r}=1, A_{2r}=0 (r \in m)$ とした場合と一致する。Case 3は、動作環境の変化は考慮するが予防取替は行わない場合である。このときの最適化問題は、問題2のすべての n_r を0とおくことによって得られる。この問題は凸計画問題であり、大域的最適解が求まる。

Case 2, 3 の最適解を Table 2 に併記する。Table 2 から、動作環境の変化を考慮している Case 1 と 3 では、要素 1 と 2 に重点をおいた決定がなされている様子を見ることができる。

つぎに、Case 1, 2 および 3 をシミュレーションによって比較する。要素 1, 2 の動作環境変化の見本過程 (Fig. 1) に対するシステム信頼度の時間的挙動を Fig. 2 に示す。終端時刻でのシステム信頼度の値が、システム使命信頼度の実現値である。

同様のシミュレーションを計算機によって発生させた 40 組の見本過程に対して実行した結果、システム使命信頼度の実現値の算術平均値をつぎのように得た。a) Case 1: 0.9036, b) Case 2: 0.9009, c) Case 3: 0.8790, a) と c) との比較から予防取替方策の有効性を知ることができ、a) と b) との比較から、動作環境変化の考慮の重要性を知ることができる。

Fig. 1 Sample paths for $\{w_1(u)\}$ and $\{w_2(u)\}$

Fig. 2 Time-dependent behavior of system reliability for sample paths shown in Fig. 1

7. 結 言

時変信頼度をもつ要素から成るシステムに対し、動作環境変化を考慮に入れて最適信頼性配分と最適予防保全計画を同時に決定する新しい最適信頼性設計問題を定式化し、その解法を与えた。また、数値例により、本報告で与えた定式化方法の重要性を示した。なお、ここでは予防保全方策を取替方策に限ったが、as-good-as-new 修理方策に対しても同様の議論が可能である。

本報告では、システム使命信頼度の期待値を最大にするベイズ決定方策を扱ったが、他の決定方策が必要となる場合もある。それは、システム使命の不達成という事態の生起が破局的な事態をひきおこす場合である。原子力発電プラントを例にとれば、緊急炉心冷却装置などの安全装置システムが機能しなければ、発電炉に異常が生じてもそれに対処できず、結局事故の回避が不可能となる。このように、考察の対象となるシステムが安全装置システムのような特別な性格を有するシステムである場合には、システム使命信頼度のとりうる最小値を最大にするマキシミン (maximin) 決定方策の採用が妥当である⁹⁾。

本報告のシステムに対しマキシミン決定方策を採用場合には、最大化の対象となる目的関数は、(22)式において $A_{1r}=0, A_{2r}=1 (r \in m)$ としたときの $\bar{J}$ に一致し、最適化問題は文献4) に与えた解法を用いて解くことができる。

終りに、有益なご討論をいただいた京都大学工学部 武内良樹氏に感謝いたします。

参 考 文 献

- 1) K. B. Misra: On Optimal Reliability Design, A Review, Proc. 6th IFAC Congress, Boston, 1/10 (1975)
- 2) H. E. Lambert: Fault Trees for Decision Making in Systems Analysis, Ph. D. Thesis, University of California (1975)
- 3) J. Endrenyi: Algorithms for Solving Reliability Methods of Systems Exposed to a 2-State Environment, IEEE Trans. on Reliability, 24-4, 281/285 (1975)
- 4) T. Inagaki, K. Inoue and H. Akashi: Optimal Reliability Allocation under Preventive Maintenance Schedule, to appear in IEEE Trans. on Reliability, 27-1 (Apr 1978)
- 5) D. A. Pierre and M. J. Lowe: Mathematical Programming via Augmented Lagrangians, Addison-Wesely (1975)
- 6) H. Nakayama, H. Sayama and Y. Sawaragi: A Generalized Lagrangian Function and Multiplier Method, J. Opt. Th. Appl., 17-3/4, 211/227 (1975)
- 7) D. P. Bertsekas: Multiplier Methods; A Survey,

Automatica, 12-2, 133/145 (1976)

- 8) 亀山, 佐山, 村上: 高信頼性システムの最適 unit 信頼度配分問題に対する一考察, 第20回自動制御協会学術講演会講演論文集, 57/58 (1976)
- 9) T. Inagaki, K. Inoue and H. Akashi: Improvement of Supervision Schedules for Protective Systems, to appear in IEEE Trans. on Reliability.

《付 録》

〈付録 1〉 A. $\bar{m}^1(0)_{LB}$

(17)式の右辺{ }の第2項はつぎのように評価できる.

$$\begin{aligned}
 & \int_v^T \bar{m}^2(v) \exp \left[\int_v^T (c_1 s(\tau) + \sigma_{12}) d\tau \right] dv \\
 & > \int_0^T \exp \left[- \int_v^T c_2 s(\tau) d\tau \right] \\
 & \quad \times \exp \left[\int_v^T (c_1 s(\tau) + \sigma_{12}) d\tau \right] dv \\
 & > \int_0^T \exp \left[- \int_0^T (c_2 - c_1) s(\tau) d\tau \right] \\
 & \quad \times \exp [\sigma_{12}(T-v)] dv \\
 & = \frac{1}{\sigma_{12}} \exp(\sigma_{12}T) - 1 \exp \left[- \int_0^T (c_2 - c_1) s(\tau) d\tau \right]
 \end{aligned} \tag{A.1}$$

(A.1)式と(17)式から(18)式を得る.

B. $\bar{m}_1(0)_{UB}$

(17)式の右辺{ }の第2項をつぎのように評価する.

$$\begin{aligned}
 & \int_0^T \bar{m}^2(v) \exp \left[\int_v^T (c_1 s(\tau) + \sigma_{12}) d\tau \right] dv \\
 & < \int_0^T \exp \left[- \int_v^T c_1 s(\tau) d\tau \right] \\
 & \quad \times \exp \left[\int_v^T (c_1 s(\tau) + \sigma_{12}) d\tau \right] dv \\
 & = \frac{1}{\sigma_{12}} [\exp(\sigma_{12}T) - 1]
 \end{aligned} \tag{A.2}$$

(A.2)式と(17)式から(19)式を得る.

〈付録 2〉

最適化 a と b とが等価であることは明らかであるので, b と c との等価性のみをつぎに示す.

$$\begin{aligned}
 \bar{J}_r &= \sum_{i \in 2} A_{ir} \cdot \exp \left[- \sum_{k_r \in n_r + 1} c_{ir} \lambda_r \alpha_r (t_{k_r} - t_{k_r - 1})^{\alpha_r} \right] \\
 &= \sum_{i \in 2} A_{ir} \cdot \exp [-c_{ir} \lambda_r \alpha_r F_r(t^r)]
 \end{aligned}$$

各 $i \in 2$ に対して, $c_{ir} \lambda_r \alpha_r > 0$ ゆえ $\exp[-c_{ir} \lambda_r \alpha_r F_r]$ は F_r に関して単調減少. さらに, $A_{ir} \geq 0$ かつ $\sum_r A_{ir} > 0$ ゆえ $\bar{J}_r$ は F_r に関して単調減少. ゆえに t^r に関する $\bar{J}_r$ の最大化と F_r の最小化は等価となり, 結局, 最適化 b と c との等価性が示される.