資源配分形階層システムの数理計画法の若干の性質[†]

志 水 清 孝*・相 吉 英太郎*

1. はじめに

N 個の部分システム(下位レベル)と1個の中央システム(上位レベル)からなり、おのおのが決定ユニットを有する階層的機構を研究する。中央システムは中央の目的に従って、部分システムのパラメータ(部分システムへ配分する資源量、予算などの設計パラメータ)を決定することにより部分システムを支配し、一方、部分システムは中央システムより課せられたパラメータのもとで、独自の目的に従って決定を行う。このような決定問題は2レベル最適化問題となるが、この小論で定式化される問題は下位レベルが多目的計画問題(ベクトル最小化問題)になっている点で従来のものと根本的に異なる。関連研究として普通の数理計画問題を資源配分形2レベル分割法で解く Silverman⁴⁾らの研究、分権的な資源配分形2レベル計画法として Geoffrion¹⁾、志水²⁾らの研究がある。

2. 資源配分形2レベル多目的決定問題

部分システム n はそれぞれ決定変数 x_n 、目的関数 f_n 、制約条件 $g_n \leq 0$ をもち、中央からパラメータ α_n が与えられたもとで f_n を最小にするような x_n を求めたい。ところが部分システム間には相互干渉があり、 f_n も g_n も x_n のみの関数ではなく、 $x = (x_1, \dots, x_N)$ の関数になっている。したがって下位レベルは、異なる目的と相互干渉をもつ部分システムの集合であり、与えられたパラメータ α のもとで部分システムが互いに協力して $x = (x_1, \dots, x_N)$ に関するベクトル目的関数 $f = (f_1, \dots, f_N)$ の最小化を行い、非劣解(Pareto 最適解)の集合を生成する。このとき、中央システムは $f_1, \dots, f_N$ と α の関数である超目的関数 Φ に基づき、下位問題の最適なパラメータ $\alpha^0 = (\alpha_1^0, \dots, \alpha_N^0)$ の値と、この α^0 に対応する下位問題の非劣解集合の中から最良な非劣解(選好最適解) $\hat{x}^0 \equiv \hat{x}_{\text{bes}}(\alpha^0)$ を選ぶ。このような問題はつぎのように定式化される。

$$\min_{\alpha, \hat{x}(\alpha)} \Phi(f(\hat{x}(\alpha), \alpha), \alpha) \quad (1. a)$$

$$\text{subj. to } G(f(\hat{x}(\alpha), \alpha), \alpha) \leq 0 \quad (1. b)$$

$$\begin{pmatrix} f_1(\hat{x}(\alpha), \alpha) \\ \vdots \\ f_N(\hat{x}(\alpha), \alpha) \end{pmatrix} = \min_x \begin{pmatrix} f_1(x, \alpha) \\ \vdots \\ f_N(x, \alpha) \end{pmatrix} \quad (1. c)$$

$$\text{subj. to } g_1(x, \alpha) \leq 0 \\ \vdots \\ g_N(x, \alpha) \leq 0 \quad (1. d)$$

ここで x, α はそれぞれ合成ベクトル $(x_1, \dots, x_N)$, $(\alpha_1, \dots, \alpha_N)$ である。 $\hat{x}(\alpha)$ はパラメトリック非劣解であり、(1. b)式は上位の決定パラメータ α と下位の決定 $\hat{x}(\alpha)$ に課せられた制約であり、(1. b)式を満たす $(\alpha, \hat{x}(\alpha))$ は存在すると仮定する。関数 Φ や G の例としては $\Phi(f(\hat{x}(\alpha), \alpha), \alpha) = F(f(\hat{x}(\alpha), \alpha)) + H(\alpha)$ $G(f(\hat{x}(\alpha), \alpha), \alpha) = \begin{pmatrix} G_1(\alpha) \\ f(\hat{x}(\alpha), \alpha) - c \end{pmatrix}$ があり、 c は満足水準を表す定数である。また G は α のみの関数の場合もある。問題(1)は、 N 個の部分目的関数 $\{f_n\}$ と1個の超目的関数 Φ をもつ2レベル多目的システムの選好最適解を求める問題とみなすことができるが、パラメータ α によって下位レベルの求める非劣解 $\hat{x}(\alpha)$ の集合が変化する点で、通常の多目的決定問題ともまったく異なる。そこで問題(1)の解の性質を考えるために、つぎの問題を考える。

ただし以下では簡単のため、 $f = (f_1, \dots, f_N)$, $g = (g_1, \dots, g_N)$ と書く。

$$\min_{\alpha, x} \Phi(f(x, \alpha), \alpha) \quad (2. a)$$

$$\text{subj. to } G(f(x, \alpha), \alpha) \leq 0, g(x, \alpha) \leq 0 \quad (2. b), (2. c)$$

《定理1》 Φ および G が f に関しそれぞれ強意単調増加関数および単調増加関数のとき、問題(2)の解 (α^0, x^0) は問題(1)の選好最適解である。

(証明) 最初に問題(2)の解 (α^0, x^0) が問題(1)の許容解であることを示す。まず、

$$G(f(x^0, \alpha^0), \alpha^0) \leq 0 \quad (3)$$

もし x^0 が α を α^0 に固定したときの問題(1. c), (1. d)の非劣解でないとすると、

$$f(\tilde{x}, \alpha^0) \leq f(x^0, \alpha^0), g(\tilde{x}, \alpha^0) \leq 0 \quad (4) \text{ (注1) (5)}$$

なる $\tilde{x}$ が存在し、 G の単調増加性と(3), (4)式より

$$G(f(\tilde{x}, \alpha^0), \alpha^0) \leq G(f(x^0, \alpha^0), \alpha^0) \leq 0 \quad (6)$$

が成り立つ。また Φ の強意単調増加性と(4)式より、

(注1) $a \leq b$ は $a \leq b$ かつ $a \neq b$ を表す。

[†] 第3回システムシンポジウムで発表(昭52・7)

* 慶応義塾大学工学部 横浜市港北区日吉 3-14-1

(Received February 21, 1978)

$$\Phi(f(\hat{x}, \alpha^0), \alpha^0) < \Phi(f(x^0, \alpha^0), \alpha^0) \quad (7)$$

(5), (6), (7)式より (α^0, x^0) が問題(2)の解であることに矛盾する。このことと(3)式より (α^0, x^0) は問題(1)の許容解であり、問題(1)の許容解集合は問題(2)の許容解集合に含まれることから、 (α^0, x^0) は問題(1)の最適解である。」

《定理 2》 Φ および G が f に関し単調増加関数のとき、問題(1)の解 $(\alpha^0, \hat{x}^0)$ は問題(2)の解である。

(証明) $(\alpha^0, \hat{x}^0)$ が問題(2)の解でないとする、

$$\Phi(f(\hat{x}, \hat{\alpha}), \hat{\alpha}) < \Phi(f(\hat{x}^0, \alpha^0), \alpha^0) \quad (8)$$

$$G(f(\hat{x}, \hat{\alpha}), \hat{\alpha}) \leq 0, \quad g(\hat{x}, \hat{\alpha}) \leq 0 \quad (9), (10)$$

なる $(\hat{\alpha}, \hat{x})$ が存在する。(i) $\hat{x}$ が α を $\hat{\alpha}$ に固定した下位問題(1. c), (1. d)の非劣解ならば、(8)~(10)式は $(\alpha^0, \hat{x}^0)$ が問題(1)の解であることに矛盾する。(ii) $\hat{x}$ が下位問題(1. c), (1. d)の非劣解でないならばある非劣解 x^* に対し、

$$f(x^*, \hat{\alpha}) \leq f(\hat{x}, \hat{\alpha}), \quad g(x^*, \hat{\alpha}) \leq 0 \quad (11), (12)$$

が成り立ち、 G の単調増加性と(11), (9)式より、

$$G(f(x^*, \hat{\alpha}), \hat{\alpha}) \leq G(f(\hat{x}, \hat{\alpha}), \hat{\alpha}) \leq 0 \quad (13)$$

また Φ の単調増加性と(11)式より、

$$\Phi(f(x^*, \hat{\alpha}), \hat{\alpha}) \leq \Phi(f(\hat{x}, \hat{\alpha}), \hat{\alpha}) \quad (14)$$

(8), (14)式より

$$\Phi(f(x^*, \hat{\alpha}), \hat{\alpha}) < \Phi(f(\hat{x}^0, \alpha^0), \alpha^0) \quad (15)$$

x^* は $\alpha = \hat{\alpha}$ に対する下位問題(1. c), (1. d)の非劣解であり、かつ(13)式より制約式(1. b)を満たすから、(15)式は $(\alpha^0, \hat{x}^0)$ が問題(1)の解であることに矛盾する。ゆえに(i), (ii)より $(\alpha^0, \hat{x}^0)$ は問題(2)の解である。」

《定理 3》 問題(1)で f は x のみの関数 $f(x)$ とする。 G, Φ が (f, α) に関し凸で G が f に関し単調増加関数、 f と g はそれぞれ x と (x, α) に関し凸関数とする。このとき $(\alpha^0, \hat{x}^0)$ が問題(1)の選好最適解であるための十分条件は、つぎの式を満たす μ, λ, r が存在することである。

$$\mu^T \nabla_x f(\hat{x}^0) + \lambda^T \nabla_x g(\hat{x}^0, \alpha^0) + r^T \nabla_x G(f(\hat{x}^0), \alpha^0) = 0 \quad (16)$$

$$\nabla_a \Phi(f(\hat{x}^0), \alpha^0) + \lambda^T \nabla_a g(\hat{x}^0, \alpha^0) + r^T \nabla_a G(f(\hat{x}^0), \alpha^0) = 0 \quad (17)$$

$$g(\hat{x}^0, \alpha^0) \leq 0, \quad \lambda^T g(\hat{x}^0, \alpha^0) = 0, \quad \lambda \geq 0 \quad (18)$$

$$G(f(\hat{x}^0), \alpha^0) \leq 0, \quad r^T G(f(\hat{x}^0), \alpha^0) = 0, \quad r \geq 0 \quad (19)$$

$$\mu^T = \nabla_r \Phi(f(\hat{x}^0), \alpha^0) > 0 \quad (20)$$

(証明) G の凸性と単調性および f の凸性より $G(f(x), \alpha)$ は (x, α) に関して凸関数となる。 Φ の凸性、 f の凸性、(16), (17)式、 g, G の (x, α) に関する凸性および(18), (19)式の相補条件を順に用いると、 $g(x, \alpha) \leq 0, G(f(x), \alpha) \leq 0$ を満たす (x, α) に対し、

$$\begin{aligned} \Phi(f(x), \alpha) - \Phi(f(\hat{x}^0), \alpha^0) &\geq \nabla_r \Phi(f(\hat{x}^0), \alpha^0) \{f(x) - f(\hat{x}^0)\} \\ &+ \nabla_a \Phi(f(\hat{x}^0), \alpha^0) (\alpha - \alpha^0) \geq \mu^T \nabla_x f(\hat{x}^0) (x - \hat{x}^0) + \nabla_a \Phi(f(\hat{x}^0), \alpha^0) (\alpha - \alpha^0) \\ &= \{-\lambda^T \nabla_x g(\hat{x}^0, \alpha^0) - r^T \nabla_x G(f(\hat{x}^0), \alpha^0)\} (x - \hat{x}^0) + \{-\lambda^T \nabla_a g(\hat{x}^0, \alpha^0) - r^T \nabla_a G(f(\hat{x}^0), \alpha^0)\} (\alpha - \alpha^0) \\ &= -\lambda^T \{\nabla_x g(\hat{x}^0, \alpha^0) (x - \hat{x}^0) + \nabla_a g(\hat{x}^0, \alpha^0) (\alpha - \alpha^0)\} - r^T \{\nabla_x G(f(\hat{x}^0), \alpha^0) (x - \hat{x}^0) + \nabla_a G(f(\hat{x}^0), \alpha^0) (\alpha - \alpha^0)\} \\ &\geq -\lambda^T \{g(x, \alpha) - g(\hat{x}^0, \alpha^0)\} - r^T \{G(f(x), \alpha) - G(f(\hat{x}^0), \alpha^0)\} = -\lambda^T g(x, \alpha) - r^T G(f(x), \alpha) \geq 0 \end{aligned}$$

これは任意の許容解 $(\alpha, \hat{x}(\alpha))$ に対しても成り立ち、 $\Phi(f(\hat{x}^0), \alpha^0) \leq \Phi(f(\hat{x}(\alpha)), \alpha)$ である。一方、(16), (18), (19)式と $\mu > 0$ は $\hat{x}^0$ が、ベクトル最小化問題

$$\min_x \{f(x) \mid G(f(x), \alpha^0) \leq 0, g(x, \alpha^0) \leq 0\} \quad (21)$$

の非劣解であるための十分条件であり、 G の f に関する単調性の仮定のもとでは、問題(21)の非劣解であって $\alpha = \alpha^0$ に対する下位問題(1. c), (1. d)の非劣解でないものは存在しないことが容易に証明されるから、 $(\alpha^0, \hat{x}^0)$ は問題(1)の許容解である。以上より $(\alpha^0, \hat{x}^0)$ は問題(1)の最適解である。」

3. 拡張と検討

問題(1)はつぎのように一般化される。

$$\min_{\alpha, \hat{x}(\alpha)} \Phi(\alpha, \hat{x}(\alpha)) \quad (22. a)$$

$$\text{subj. to } G(\alpha, \hat{x}(\alpha)) \leq 0 \quad (22. b)$$

$$f(\hat{x}(\alpha), \alpha) = \min_x f(x, \alpha) \quad (22. c)$$

$$\text{subj. to } g(x, \alpha) \leq 0 \quad (22. d)$$

この問題は大変難しいが、下位問題(22. c, d)を重み係数 w を媒介として等価なスカラー目的関数問題に置き換え、上位問題を α と w の探索問題に等価変換し、直接試行法で最適解を求めるアプローチが考えられる。この小論では資源配分形の多目的決定問題に関する若干の性質を考察し、選好最適解の十分条件を与えた。部分システム n が決定変数 x_n と α_n だけを含む場合にはいわゆる分権のシステムにおける資源配分問題となる。資源配分形数理計画問題の計算方法に関しては現在研究が進められている。

参考文献

- 1) A. M. Geoffrion, et al.: Coordination of Two-Level Organizations with Multiple Objectives, A. V. Balakrishnan (ed.), Techniques of Optimization, 455/468, Academic Press (1972)
- 2) K. Shimizu: Optimization Algorithms for Multiple Objective Programs and Decentralized Hierarchical Systems, Proc. of IFAC-LSSTA, Italy (Udine), 489/497 (1976)
- 3) 志水: 多目的システム (ベクトル目的関数) の最適化理論, 計測と制御, 14-1, 94/103 (1975)
- 4) G. J. Silverman: Primal Decomposition of Mathematical Programs by Resource Allocation, Oper. Res., 20-1, 58/74 (1972)