非線形系の可制御性の基本的考察†

鈴木 嘉彦*・長谷川 広之*

Fundamental Consideration of the Controllability of Nonlinear Systems

Yoshihiko SUZUKI* and Hiroyuki HASEGAWA*

1. ま え が き

可制御性の問題は、系が線形の場合にはほとんど完全に解析が行われ、その体系化をみているが、非線形系に関しては解析の困難さもあり可制御のための必要十分条件を導出するまでには至っていない。非線形系については近年可制御性を考察する手法として、微分幾何学的方法が注目され、これらの手法は本学会誌にも解説されている¹⁾。本文では文献 1) で示されている概念とは異なるが、微分幾何学的観点から、制御系を多様体 M 上のベクトル場で表現するものとして、このベクトル場を用いて可制御性を基本的に考察する手法に関して一提案を行う。

2. 可制御の条件の幾何学的表現

本文で考察する制御系は、1 入力 u の n 次元システム $\dot{x} = f(x, u)$ にさらに入力 u 、時刻 t を状態変数とした $n+2$ 次元のシステムで、 $n+2$ 次元解析多様体 M 上で、システムのフローを記述するベクトル場 X_u が次式で与えられるものとする。

$$X_u = - \sum_{i=1}^n f_i(x, u) \frac{\partial}{\partial x_i} - \dot{u}(t) \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial t} \quad (1)$$

ただし、 $x = (x^1, \dots, x^n)$ 、 u および t はおのおの多様体 M の座標とし、 $u(t)$ は

$$u(t) = \sum_{j=1}^n a_j t^{j-1} \quad (2)$$

で記述される t の $n-1$ 次実関数、 $\dot{u}(t)$ は u の t による微分を意味し、制御入力 u に関して従来のものより制限が強い。

(1) 式の X_u に対して、 M 上の解析関数 F を考え、 $X_u(F) = 0$ なる F を $t=t_0$ なる境界において

$$F_i(x, u, t_0) = x^i, \quad i=1, \dots, n \quad (3)$$

として求めることができる。

このようにして求められる $F_i(x, u, t, a; t_0) = x^i(t_0)$ が多様体の適当な点において、 u に関して解くことができるならば ((2) 式の a_j を決定できるならば)、適

当な時刻 t_0, t における $x(t_0), x(t)$ を結ぶ曲線が、求められた u によって存在することになり可到達となる²⁾。つまり F_i に対して

$$\text{rank} \left(\frac{\partial F_i}{\partial a_j} \right) = n \quad i, j=1, \dots, n \quad (4)$$

が適当な x, u, t に対して成立するならば可到達となる。さらにこの系が可制御となる条件を以下考察する。

〔補題〕 $F_i(x, t, a; t_0) = x^i(t_0)$ ($i=1, \dots, n$) が任意の点 $x, t, x^i(t_0)$ において a について解けるための十分条件は、1 次形式 $w = \tilde{F}_{i\alpha}^{-1} \tilde{F}_{i\alpha} dx$ が完全形式となることである。

(証明)

$F_i(x, t, a; t_0) = x^i(t_0)$ で $t_0, x^i(t_0)$ 、 t を任意に定めれば、 F_i は x と $a (= (a_1, \dots, a_n))$ の関数となる。 $\tilde{F}_i$ を次式で与えると、

$$\tilde{F}_i = F_i(x, a) - x^i \quad (5)$$

(5) 式を満たす x, a に対して、両辺を微分すると

$$\tilde{F}_{i\alpha} da + \tilde{F}_{i\alpha} dx = 0 \quad (6)$$

ただし、

$$\tilde{F}_{i\alpha} = \partial F_i / \partial a, \quad \tilde{F}_{i\alpha} = \partial F_i / \partial x$$

となる。(4) 式が成立するならば

$$da = -\tilde{F}_{i\alpha}^{-1} \tilde{F}_{i\alpha} dx \quad (7)$$

ここで、 w が完全形式ならば (7) 式は完全積分可能となり任意の $x(t)$ に対し、(8) 式として a が求まる。

$$a - a^* = - \int_{x^*}^x \tilde{F}_{i\alpha}^{-1} \tilde{F}_{i\alpha} dx \quad (8)$$

ただし、 x^* はある入力パラメータ $a^* (= (a_1^*, \dots, a_n^*))$ に対して一意的に決定される $x(t)$ である。

つぎに $X_u(F) = 0$ なる F を実際に求める手順を示す。仮定より X_u は解析的であり、かつ M の任意の点において $X_u \neq 0$ であるから、境界条件式 (3) のもとで解 $F_i(x, u, t; t_0)$ は次式の形式で与えられることが知られている³⁾。

$$F_i = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} \varphi_{ir}(x, u)(t-t_0)^r \quad (9)$$

ここで、(9) 式における φ_{ir} をつぎのようにして求める。まず、 $X_u(F_k) = 0$ より

$$\frac{\partial F_k}{\partial t} = \sum_{i=1}^n f_i(x, u) \frac{\partial F_k}{\partial x^i} + \dot{u}(t) \frac{\partial F_k}{\partial u} \quad (10)$$

† 第 17 回計測自動制御学会学術講演会で発表 (昭 53・8)

* 山梨大学工学部 甲府市武田 4-3-11

(Received June 12, 1978)

$$k=1, \dots, n$$

が成立する。また文献3)の手法に従って、つぎの関係が成立する。

$$\varphi_{k0} = F_k|_{t=t_0} = x^k$$

$$\varphi_{k1} = \partial F_k / \partial t|_{t=t_0} = f_k(x, u)$$

$$= X(x^k) \triangleq X^{(1)}(x^k)$$

$$\varphi_{k2} = \partial^2 F_k / \partial t^2|_{t=t_0}$$

$$= \partial / \partial t \left(\sum_{j=1}^n f_j \partial F_k / \partial x^j + \dot{u} \partial F_k / \partial u \right) \Big|_{t=t_0}$$

$$= \left(\sum_{j=1}^n f_j \frac{\partial^2 F_k}{\partial x^j \partial t} + \dot{u} \frac{\partial^2 F_k}{\partial u \partial t} + \ddot{u} \frac{\partial F_k}{\partial u} \right) \Big|_{t=t_0}$$

$$= \{X(X^{(1)} + X_1)(x^k) \triangleq X^{(2)}(x^k) \quad (11)$$

ただし、

$$X = \sum_j f_j \partial / \partial x^j + \dot{u} \partial / \partial u, \quad X_1 = \ddot{u} \partial / \partial u \quad (12)$$

以下同様にして、 $\varphi_{k3}, \dots, \varphi_{ki}, \dots$ およびベクトル場 $X^{(3)}, \dots, X^{(i)}$ を求めると、次式が成立する。

$$\varphi_{k3} = \{X(X^{(2)} + 2X_1X + X_2)(x^k) \triangleq X^{(3)}(x^k)$$

⋮

$$\begin{aligned} \varphi_{ki} = \{ & X(X^{(i-1)} + {}_{i-1}C_1X_1(X^{(i-2)} + \dots \\ & + {}_{i-1}C_{i-1}X_{i-1}(X^{(i-i-1)} + \dots + {}_{i-1}C_{i-1}X_{i-1}X_{i-1}) \} (x^k) \\ & \triangleq X^{(i)}(x^k) \end{aligned} \quad (13)$$

ただし、 $u^{(i+1)}$ を $u(t)$ の t による $i+1$ 回微分として

$$X_i = u^{(i+1)}(t) \partial / \partial u \quad (14)$$

の意味であり、 u は (2) 式を仮定したので $X_i = 0, i \geq n$ が成立する。

以上の考察結果より、 φ_{ii} が求まり F_i が定まる。よって、つぎの定理が成立する。

《定理》 (1) 式で記述される制御系が局所可制御となるための十分条件は、 $\text{rank}(\partial F_i / \partial a_j) = n$ であり、かつ $w = \tilde{F}_{ix}^{-1} \tilde{F}_{ix} dx$ が完全形式であることである。

(証明) 補題より、 a が任意の t, x に対して存在するので可制御である。

前節で示した結果を用いて実際の解析を行う。

$$\dot{x} = Ax + bu \quad (15)$$

ただし、 $A: n \times n$ 行列、 $b: n \times 1$ ベクトル、 u は

$$u(t) = \sum_{j=1}^n a_j t^{j-1} \quad (16)$$

で記述される線形系に対しては、(12) 式の X は時間軸を反転して考えて

$$X = (Ax + bu)^T \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^T + \dot{u} \frac{\partial}{\partial u} \quad (17)$$

で与えられる。

(17) 式の X および (16) 式の $u(t)$ により $X_1, \dots, X_{n-1}$ を求め、これらのベクトル場より $X^{(1)}, \dots, X^{(r)}, \dots$ を求めることができ、途中で $|\partial F_i / \partial x_j| \neq 0$ (解の一意性により導かれる) を用いて、従来知られている $\det(b, Ab, \dots, A^{n-1}b) \neq 0$ を導出することができる。

非線形系の場合まだ実際の結果を導出するに至っていないが、つぎの方法は有効と思われる。

定理を利用するうえでの最大の問題点、 $X^{(r)}$ の r が無限大まで存在することである。この問題を解くための一手法として、 $(\partial F_i / \partial x_j)$ の正則性を用いた無限項和の処理が考えられる。また多様体 M 上で基底 $\partial / \partial x_j, j=1, \dots, n$ に関して1次独立なベクトル場 $X^{(r)}, i=1, \dots, n$ を求める。たとえば $X^{(0)}, \dots, X^{(n-1)}$ が1次独立であるとすれば、 $X^{(r)}, r \geq n$ は $X^{(0)}, \dots, X^{(n-1)}$ を用いて表現可能であり、一般的に表現すれば F_i は

$$F_i = \sum_{j=0}^{n-1} g_j(x, u, t) X^{(j)}(x^i) \quad (18)$$

と記述できる。よって $g_j(x, u, t)$ の M 上での定性的性質を知ることができるならば、有限個のベクトル場 $X^{(0)}, \dots, X^{(n-1)}$ を用いて可制御性を考察可能となる。

この手法に関しては現在の段階ではまだ明確な結論を導くに至っていないが、入力 $u = \sum_{j=1}^n a_j t^{j-1}$ の a_j に関する可制御問題とさらに、 a_j に関する最適制御問題を同一レベルの問題として解析可能であり、この手法に関する考察を進めることは有意義であると思われる。

3. あとがき

前述したように、非線形系の可制御性に関しては未だ明確な結論は得られていないものの、本文で示した定理および解析法は、実用上有効な結論を期待できるので一提案を行った。本文中では制御入力の一つとしたが、これは多入力になってもまったく同様に行え、また御制入力状態フィードバックで構成するように考えても表現を多少変えることにより、同様な考察が実行できることを付記しておく。

参考文献

- 1) 伊藤, 早川: 非線形システムの可制御性, 計測と制御, 16-12, 891/900 (1977)
- 2) H. J. Sussmann and V. Jurdjevic: Controllability of Nonlinear Systems, J. Diff. Eq., 12, 95/116 (1972)
- 3) 松田道彦: 外微分形式の理論, p. 14~, 岩波書店 (1976)