周波数特性に基づく流体回路系の過渡応答計算法*

吉岡 宗之*・森川 敬信*

A Method of Transient Response Calculation for the Fluid Circuit Systems
on the Basis of Frequency Characteristics

Muneyuki YOSHIOKA* and Yoshinobu MORIKAWA*

1. はじめに

管路系の過渡応答計算に際しては、周波数領域でその有用性が広く検証されている Brown の管路モデル¹⁾さえも、未だ十分使いこなすに至っていない。そこで本報では、まず最初に線形で安定な系の過渡応答を周波数特性に基づいて計算する方法を提示し、そのうえでこの手法を管路系に適用する場合の有用性を Brown のモデルに即して明らかにする。また、Johnson らの近似的な過渡応答計算法²⁾と本報の方法との関連性をも示す。

2. 過渡応答計算法

線形系を考え、 s 領域 (s : Laplace 演算子) における入力を $P_i(s)$ 、伝達関数を $G(s)$ 、出力を $P_0(s)$ とするとき、 $P_0(s)=P_i(s)G(s)$ であり、 t 領域 (t : 時間) における出力 $p_0(t)$ は、 $s=b+j\omega$ ($b=\text{const.}>0$, $j=\sqrt{-1}$, ω : 角周波数) を用いて次式で表わせる。

$$p_0(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{b-j\infty}^{b+j\infty}P_0(s)e^{st}ds \quad (1)$$

ただし、正の定数 b は $P_0(s)$ のすべての極が積分路の左側に位置するように選ぶ必要がある。

さて、 $P_0(s)$ の極が容易に求まらない場合、(1)式を数値積分することが必要になる。そこでいま $s=b+j\omega$, $ds=j d\omega$ を用いて (1) 式を書き換えると、

$$p_0(t)=\frac{e^{bt}}{2\pi}\int_0^\infty\{P_0(b+j\omega)e^{j\omega t}+P_0(b-j\omega)e^{-j\omega t}\}d\omega \quad (2)$$

となる。したがって原理的には、定数 b を与えて $P_0(b\pm j\omega)$ を計算し、 ω について数値積分を実行することで、任意の線形系の過渡応答が計算できる³⁾。しかし、後述する管路系のように $P_0(b\pm j\omega)$ の計算が非常に面倒で、かつ積分範囲を広く取る必要がある場合には、この方法も実用性に乏しい。そこでつぎに、条件を付加することで実用性を高めることを考える。

まず、(a)系は安定であり、(b)入力 $p_i(t)$ の最終値は有限確定であるものと仮定する。このとき、原点の近傍で積分路を半円周 $s=b+re^{j\theta}$ ($r>0$, $-\pi/2\leq\theta\leq\pi/2$) に変更すれば、 $b\rightarrow+0$, $r\rightarrow+0$ とすることが可能になり、(1)式より出力 $p_0(t)$ はつぎのように表わせる。

$$p_0(t)=\frac{1}{2\pi}\lim_{r\rightarrow+0}\left\{\int_{-\pi/2}^{\pi/2}P_0(re^{j\theta})erte^{j\theta}re^{j\theta}d\theta+\int_{-\infty}^{-r}P_0(j\omega)e^{j\omega t}d\omega+\int_r^{\infty}P_0(j\omega)e^{j\omega t}d\omega\right\} \\ =\frac{P(0)}{2}+\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\{P_0(j\omega)e^{j\omega t}+P_0(-j\omega)e^{-j\omega t}\}d\omega \quad (3) \\ P(0)=\lim_{s\rightarrow 0}sP(s)$$

ここで $P(0)/2$ は半円周上の積分値であり、出力の最終値を $p_0(\infty)$ とするとき $p_0(\infty)=P(0)$ である。

いま、入力として (a)単位ステップ、(b)Terminated-ramp (飽和するまでの時間 τ_1 , 飽和値 1), (c)単一矩形パルス (パルス幅 τ_2 , 高さ 1) を考えるものとすれば、(3)式よりそれぞれつぎようになる。

(a) 単位ステップ応答

$$p_0(t)=\frac{G(0)}{2}+\int_0^\infty\frac{|G(j\omega)|}{\pi\omega}\sin(\omega t+\varphi)d\omega \quad (4) \\ \varphi=\arg G(j\omega)$$

(b) Terminated-ramp 応答

$$p_0(t)=\frac{P(0)}{2}+\int_0^\infty\frac{|G(j\omega)|}{\pi\tau_1\omega^2}\{\cos(\omega t+\varphi-\omega\tau_1)-\cos(\omega t+\varphi)\}d\omega \quad (5)$$

(c) 単一矩形パルス応答

$$p_0(t)=\int_0^\infty\frac{|G(j\omega)|}{\pi\omega}\{\sin(\omega t+\varphi)-\sin(\omega t+\varphi-\omega\tau_2)\}d\omega \quad (6)$$

なお、 $N>0$ とするとき、入力 $p_i(t)$ が条件式

$$\int_0^\infty|p_i(t)|dt=N<\infty \quad (7)$$

を満たすなら、周知のとおり過渡応答は Fourier 変換法によっても求まり、この場合 Laplace 逆変換においては上述の半円周上の積分値が 0 になる。(c)がこの例に当たる。

さて、以上の過渡応答計算法は、仮定した要件を満

† 日本機械学会関西支部第 53 期定期総会講演会で発表 (昭 53・3)

* 大阪大学工学部 吹田市大字山田上

(Received November 8, 1978)

たすかぎり適用対象を限定する必要はないが、管路系への適用において特に有用であり、元来そのために考察したものである。したがって、その考察の過程を明らかにすることは計算法の特徴およびそこに至る必然性を明確にすることに通じるので、つぎにそれを示す。

3. 管路系への適用の有用性

管路を含む系では、伝達関数 $G(s)$ の中に管路の伝播定数 $\gamma(s)$ 、特性インピーダンス $Z_c(s)$ を含み、これらは一般に s の複雑な関数である。たとえば Brown のモデル¹⁾では $\gamma(s) = \sqrt{Z(s)Y(s)}$ 、 $Z_c(s) = \sqrt{Z(s)/Y(s)}$ 、ただし

$$Z(s) = sL \left\{ 1 - \frac{2J_1\left(ja\sqrt{\frac{s}{\nu}}\right)}{ja\sqrt{\frac{s}{\nu}}J_0\left(ja\sqrt{\frac{s}{\nu}}\right)} \right\}^{-1}$$

$$Y(s) = sC \left\{ 1 + \frac{2(\kappa-1)J_1\left(ja\sqrt{\frac{\sigma s}{\nu}}\right)}{ja\sqrt{\frac{\sigma s}{\nu}}J_0\left(ja\sqrt{\frac{\sigma s}{\nu}}\right)} \right\}$$

(a : 管半径, $C = \pi a^2 / \rho c^2$, c : 音速, J_0 ; J_1 : Bessel 関数, $L = \rho / \pi a^2$, κ : 比熱比 (液体の場合 $\kappa=1$), ν : 動粘性係数, ρ : 密度, σ : Prandtl 数) で与えられる。したがって, $s = b + j\omega$ において γ, Z_c を求めようとすれば, 任意偏角に対する J_0, J_1 を計算することが必要になる。また $\gamma(b + j\omega)$, $Z_c(b + j\omega)$ などは多価関数であり, 数値計算の過程で物理的に意味のある値を選び出す必要がある。一方, $s = j\omega$ とすれば J_0, J_1 の偏角は $\arg j\sqrt{j}$ となり, このとき Bessel 関数は Kelvin 関数を用いて

$$J_n(xe^{3\pi/4}) = e^{n\pi j} J_n(xe^{-\pi/4}) = \text{ber}_n x + j \text{bei}_n x \quad (8)$$

と表わせる。そのうえ $\gamma(j\omega)$, $Z_c(j\omega)$ の多価性は解析的に処理できる。したがって $\gamma(j\omega)$, $Z_c(j\omega)$ の計算は $\gamma(b + j\omega)$, $Z_c(b + j\omega)$ に比べてはるかに簡単になる。ゆえに管路系の過渡応答計算においては, (3) 式による方法は実用に耐え有用である。なお, この計算法を容量で終端された空気圧伝送系のステップ応答に適用し, 実験とも比較して良好な結果を得ており⁴⁾, 詳細は改めて公表する予定である。

4. Johnson らの近似法との関連

ステップ応答を矩形パルス列に対する応答で近似する方法が Johnson らによって提案され²⁾, 空気圧伝送系のステップ応答の計算にも Katz らによって利用されている^{5), 6)}。そこでここでは, Johnson らの方法で求まる結果が (4) 式の近似形であることを示す。

矩形パルス列の周期を $T(\omega_0 = 2\pi/T)$, $0 < t < T/2$ で

$p_i(t) = 1$, $T/2 < t < T$ で $p_i(t) = 0$ となるよう座標軸の基点およびパルス幅を定めるとき, $p_i(t)$ は

$$p_i(t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \sin(2n-1)\omega_0 t}{(2n-1)\pi} \quad (9)$$

で表わせる (不連続点の前後で Gibbs の現象が現われるが, それが管路系の応答計算に与える影響については別に考察してある⁷⁾ので参照されたい)。そして応答 $p_0(t)$ は

$$p_0(t) = \frac{G(0)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2|G\{j(2n-1)\omega_0\}|}{(2n-1)\pi} \times \sin\{(2n-1)\omega_0 t + \varphi_{2n-1}\} \quad (10)$$

$$\varphi_{2n-1} = \arg G\{j(2n-1)\omega_0\}$$

一方, (4) 式を矩形公式 (分割幅 $2\omega_0$, 高さ $f\{(2n-1)\omega_0\}$, $f(\omega) = |G(j\omega)| \sin(\omega t + \varphi)/\pi\omega$) を用いて数値積分すれば, 直ちに (10) 式が得られる。したがって, 以上の考察によりステップ応答を矩形パルス列に対する応答で近似できる根拠を明らかにしたことになる。

しかし, この方法を管路系の応答計算に用いるのは決して上策とはいえない。なぜなら, 被積分関数 $f(\omega)$ は共振点 (および反共振点) 付近でその値が急激に変化し, 系が複雑になるほど $f(\omega)$ の変化も複雑になる。また ω の増加につれて $f(\omega)$ が 0 に近づく早さがゆるやかなため, 積分範囲を十分広く取らないと収束しない場合があり (Katz らの計算例⁵⁾には収束していない波形も見られる) 注意を要する。したがって, 積分法の選定に当たっては上述のことを考慮に入れる必要がある。ところが, 矩形公式による数値積分法にはもともと精度上の問題があり, 精度を上げようとすれば他の積分法にも増して分割数を多くしなければならず, その結果計算時間が長くなりすぎるので, 広範囲の積分を精度よく行うには不適である。したがって, 管路系のステップ応答計算には Johnson らの近似法を用いるより, Simpson の公式などの精度のよい公式を用いて, 直接 (4) 式を数値積分するほうが望ましい。

参考文献

- 1) F.T. Brown: The Transient Response of Fluid Lines, ASME Trans., Ser D, **84**, 547/553 (1962)
- 2) R.L. Johnson, et al.: Importance of Extending Nyquist Servomechanism Analysis to Include Transient Response, Jour. Aero. Sci., **18**, 43/49 (1951)
- 3) W. Kring, et al.: Numerisches Berechnen von Schwingungen und Kriechvorgängen mit der Laplace-Transformation, Ingenieur-Archiv, **44**, 335/346 (1975)
- 4) 吉岡ほか: 周波数特性に基づく流体回路系の過渡応答計算法, 日本機械学会講演論文集, **784-4**, 24/27 (1978)
- 5) S. Katz, et al.: Transient Response of Rectangular Pneumatic Transmission Lines with Blank Chamber Terminations, Fluidics Quart., **8**, 85/103 (1976)
- 6) S. Katz: Transient Response of Fluid Lines by Frequency Response Conversion, ASME Trans., Ser. G, **99**, 310/313 (1977)
- 7) 吉岡ほか: 流体管路における任意形状波の線形ひずみ, 流体工学, **14**, 585/593 (1978)