境界観測に基づく確率分布定数系の状態推定[†]

砂原善文*・相原伸一*・小島史男*

State Estimation for Stochastic Distributed Parameter Systems under Noisy Boundary Observations

Yoshifumi SUNAHARA*, Shin-ichi AIHARA* and Fumio KOJIMA*

The purpose of this paper is to derive a filter dynamics for distributed parameter systems with white Gaussian noise coefficients under noisy boundary observations. Two kinds of systems are considered. One is modeled by a partial differential equation of parabolic type and the other described by that of hyperbolic type.

With background knowledge of functional analysis, the mathematical models of system dynamics and boundary observation mechanism are formulated. Using the Radon-Nikodym derivative, the precise form of the filter dynamics is derived, reflecting the nonlinearity due to the existence of stochastic coefficients.

1. 緒 言

不規則に変動する係数を有する確率分布定数システムに関して、すでに著者らが確率固有値問題を導入して、推定および制御問題を解析しているが^{1)~5)}、確率固有値問題においては、不規則係数と不規則固有値との1対1対応を仮定することにより、システムのさまざまな確率的性質を明確に求めることが可能であった。本論文においては、実在システムにおいてかなり多く見うけられる不規則係数と不規則固有値が非線形関係にある場合も、さらに固有関数が不規則に変動するようなシステムをも統一的に取り扱うために、新しくソボレフ空間上で値をとる確率積分を導入し、文献1)~5)で述べられたシステムより広いクラスの確率分布定数システムの解析が可能になることを示し、さらにその状態推定問題を考察する。確率分布定数システムの状態推定を考える場合、著者らが文献2)、4)

で考察した領域内部に観測機構を配置する場合より、むしろ実在システムの構造などに関連して、境界領域で観測するのがより実用的である場合が多い。本論文では、このような境界観測のもとでの確率分布定数システムの状態推定問題を考察することにする。以下、本論文の記述においては、生成点 ω は混乱を生じないかぎり省略する。本論文で用いられる記号はつぎのとおりである。

$G, \partial G$; R^n の有界開領域およびその境界

x ; n 次元空間変数で $x=(x_1, x_2, \dots, x_n)$

t ; 時間変数で $t \in T \triangleq]t_0, t_f[$

$u(t, x), v(t, x)$; スカラー状態変数

$L_2(G)$; G 上で2乗可積分である関数の全体からなる空間

$H^m(G)$; G 上で指数 m のソボレフ空間^{6)~8)}

$H_0^m(G)$; $\{\phi | \phi \in H^m(G), D_x^\alpha \phi|_{\partial G} = 0, |\alpha| \leq m-1\}$

ただし、 $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$, $D_x^\alpha = \partial/\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}$ である。

$H^{-m}(G)$; $H_0^m(G)$ の双対空間

Γ ; ∂G 上で2乗可積分である関数の全体からなる空間、すなわち $L^2(\partial G)$

$(\cdot, \cdot)_*, \|\cdot\|_*$; おのおの添字*で定義される空間における内積、ノルムを表わす。ただし空間 H で定義される内積およびノルムは添字を省略する。

$L^2(X, \mu; Y)$; 測度 $\mu \geq 0$ を備えた局所コンパクト可測空間 X 上で定義され、つぎのようなヒルベルト空間 Y 上に値をとる関数全体からなる空間

$$\int_X \|f(t)\|^2_Y d\mu(t) < \infty \quad (t \in X)$$

$\mathcal{L}(X; Y)$; ヒルベルト空間 X から Y への有界線形作用素の全体を表わす。

2. システムモデルおよび数学的準備

2.1 システムモデルおよび観測機構

[†] 第6回制御理論シンポジウムで発表(昭52・5)

* 京都工芸繊維大学工学部 京都市左京区松ヶ崎御所海邊町

* Faculty of Polytechnic Sciences, Kyoto Institute of Technology, Kyoto

(Received July 21, 1977)

システムの数学モデルは、つぎの二つの形の偏微分方程式で与えられるものとなる。

[1] 放物形: $u_t + A(t, x, \omega; D_x)u = 0$

$$((t, x) \in T \times G) \quad (2.1a)$$

$$u(t_0, x) = u_0(x) \quad (x \in G) \quad (2.1b)$$

$$B_j(t, x; D_x)u = 0$$

$$((t, x) \in T \times \partial G) \quad (2.1c)$$

[2] 双曲形: $v_{tt} + A(t, x, w; D_x)v = 0$

$$((t, x) \in T \times G) \quad (2.2a)$$

$$v(t_0, x) = v_0(x), \quad \dot{v}(t_0, x) = \dot{v}_0(x)$$

$$(x \in G) \quad (2.2b)$$

$$B_j(t, x; D_x)v = 0$$

$$((t, x) \in T \times \partial G) \quad (2.2c)$$

$$j=1, 2, \dots, m$$

ここで、 $A(t, x, \omega; D_x)$ は不規則係数をもつ偏微分作用素、 $B_j(t, x; D_x)$ は確定的な境界作用素であり、それらの形は、おのおのつぎのように与えられるものとする。

(H-1) 偏微分作用素 $A(t, x, \omega; D_x)$ は、確定的作用素 $A_D(t)$ と不規則作用素 $A_S(t, \omega)$ との和

$$A(t, \omega) = A_D(t) + A_S(t, \omega) \quad (2.3)$$

の形で表現される。確定的作用素 $A_D(t)$ は

$$A_D(t) \triangleq \sum_{|p|, |q| \leq m} (-1)^{|p|} D_x^p (a_{pq}^d(t, x) D_x^q(\cdot)) \quad (2.4)$$

のように定義され、さらに不規則作用素 $A_S(t, \omega)$ は

$$A_S(t, \omega) \triangleq \sum_{|r| \leq m} a_{|r|}^s(t, x) \frac{dW_{|r|}(t, \omega)}{dt} (D_x^r(\cdot)) \quad (2.5)$$

のように定義される。ここで $W_{|r|}(t, \omega)$ ($|r|=1, 2, \dots, m$) は、相互独立な標準ブラウン運動過程を表わしている(注1)。

(H-2) 境界作用素 $\{B_j(t)\}_{j=1}^m$ は正規⁹⁾であり

$$B_j(t) \triangleq \sum_{|h| \leq m_j} b_{jh}(t, x) (D_x^h(\cdot)) \quad m_j \leq 2m-1 \quad (2.6)$$

のように定義される。ただし $\{B_j(t)\}_{j=1}^m$ は境界 ∂G 上での $2m$ 次のディリクレ系の一部分をなすものである。

(H-3) $\{A_D(t), \{B_j(t)\}_{j=1}^m\}$ は各時刻 $t \in T$ において楕円形境界値問題を構成することができる。

[補題1] (Lions and Magenes) $A_D(t)$ の随伴作用素を $A_D^*(t)$ と表わすとき(注2)、 $\{B_j(t), S_j(t)\}_{j=1}^m$ が

(注1) (2.5)式中のブラウン運動の微分 $dW_{|r|}/dt$ は正規格性白色雑音を示している。したがってこのままでは数学的に意味をなさないののでその定式化を(2.14)式で行う。

(注2) 以後作用素の上付添字“*”は元の作用素の随伴作用素であることを示す。

$2m$ 次のディリクレ系となるように、境界微分作用素 $\{S_j(t)\}_{j=1}^m$ を任意に選ぶと、もう一つのディリクレ系 $\{C_j(t), T_j(t)\}_{j=1}^m$ が一意的に存在し、十分滑らかな関数 ϕ_1, ϕ_2 に対して、つぎの等式が成立する。

$$\begin{aligned} & (A_D(t)\phi_1, \phi_2) - (\phi_1, A_D^*(t)\phi_2) \\ &= \sum_{j=1}^m (S_j(t)\phi_1, C_j(t)\phi_2)_T \\ & \quad - \sum_{j=1}^m (B_j(t)\phi_1, T_j(t)\phi_2)_T \end{aligned} \quad (2.7)$$

一方不規則作用素 $A_S(t, \omega)$ についても、その分散項に関連して、つぎの補題が成立する。

[補題2] つぎの作用素を定義する。

$$\hat{A}_s(t) \triangleq \sum_{|r| \leq m} \hat{A}_s|_{|r|}(t) \triangleq \sum_{|r| \leq m} a_{|r|}^s(t, x) (D_x^r(\cdot)) \quad (2.8)$$

この作用素に関して

$$\begin{aligned} & \sum_{|r| \leq m} (\hat{A}_s|_{|r|}(t)\phi_1, \hat{A}_s|_{|r|}(t)\phi_2) \\ & \quad - (\phi_1, \sum_{|r| \leq m} \hat{A}_s|_{|r|}^*(t) \hat{A}_s|_{|r|}(t)\phi_2) \\ &= \sum_{j=1}^m (\hat{H}_j(t)\phi_1, G_j(t)\phi_2)_T \end{aligned} \quad (2.9)$$

を満足するような境界微分作用素 $\{\hat{H}_j(t)\}_{j=1}^m \{G_j(t)\}_{j=1}^m$ が存在する。

(2.7)式における境界微分作用素 $\{B_j(t), S_j(t)\}_{j=1}^m$ と、(2.9)式の $\{G_j(t)\}_{j=1}^m$ との関係は、システムの挙動を支配する作用素 $A_D(t)$ および $\{B_j(t)\}_{j=1}^m$ の具体的な形が与えられれば明らかになる。このことは後の例題で示される。

さて以上の準備をもって境界観測機構の数学モデルをつぎの微分方程式で与える。

[1] 放物形:

$$dy(t) = \mathcal{H}[\tilde{S}_i(t)u(t)]dt + R(t)de(t, \omega) \quad (2.10)$$

[2] 双曲形:

$$dy(t) = \mathcal{H}[\tilde{S}_i(t)v(t)]dt + R(t)de(t, \omega) \quad (2.11)$$

ただし、[1], [2]とも $y(t_0) = 0$ である。境界微分作用素 $\tilde{S}_i(t)$ は、(2.7)式で決定される m 次の系 $\{S_j(t)\}_{j=1}^m$ の任意の部分集合の線形結合、すなわち

$$\tilde{S}_i(t) = \sum_{j=1}^m d_j S_j(t) \quad (2.12)$$

の形で与えられるものとする。ただし d_j は任意の実数を表わす。また作用素 $\mathcal{H}[\cdot]$ は境界 ∂G 上で定義された作用素で、境界の部分領域 ∂G_0 上で観測を行うことを意味する。

2.2 数学的準備

基礎確率空間を $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ とする。ただし Ω は生

成点 ω よりなる見本空間, $\mathcal{F}$ は Ω 上の最小 σ -代数, P は Ω 上で定義される確率測度である. V と H を二つの G 上の可分なヒルベルト空間とする. $V \subset H$ で, V から H への単射は, 連続でかつ V は H において稠密であると仮定する. H をその双対空間と同一視し, V' が V の双対空間を表わすならば, H は V' の部分空間と同一視されて

$$V \subset H \subset V' \quad (2.13)$$

と書くことができる. (2.5) 式で定義された不規則作用素に関連して, $\mathcal{F}_t (t \in T)$ (注 3) について可測でかつ $L^2(T; L^2(\Omega, \mu; V))$ に属する任意の関数 $\phi(s)$ に関して

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^t dA_s(s, \omega) [\phi(s)] \\ & \triangleq \int_{t_0}^t \sum_{|r| \leq m} a_{|r|}^*(s, x) [D_x^r \phi(s, x)] dw_{|r|}(s) \end{aligned} \quad (2.14)$$

のように新しい確率積分を定義する (詳細は付録 1 参照). さらに作用素 $A_D(t)$ および不規則係数の分散項に相当する作用素に関しては

$$A_D(t) \in \mathcal{L}(V; V') \quad \hat{A}_s^*(t) \hat{A}_s(t) \in \mathcal{L}(V; V') \quad (2.15)$$

と仮定すると, システムモデル [1], [2] は, つぎのように記述される.

$$z(t) + \int_{t_0}^t \hat{A}(s) z(s) ds + \int_{t_0}^t dG_s(t, \omega) [z(s)] = z_0 \quad (2.16) \text{ (注 4)}$$

(2.16) 式は, [1], [2] の解過程をベクトル表示することにより, 一つの式で表現したものである. すなわち [1] では $z(t) = u(t)$, $\hat{A}(s) = A_D(s)$, $dG_s(s, \omega) = dA_s(s, \omega)$, $z_0 = u_0$ であり, [2] では,

$$z(t) = [v(t), \dot{v}(t)]' \quad \hat{A}(s) = \begin{bmatrix} 0 & -I \\ A_D(s) & 0 \end{bmatrix}$$

$$dG_s(s, \omega) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ dA_s(s, \omega) & 0 \end{bmatrix}$$

$$z_0 = [v_0, \dot{v}_0]'$$

である. (2.16) 式の解過程についての一意性, 存在性の条件については, つぎの coercivity condition が有用である.

(C-1) [放物形] つぎの不等式を満足する正数 λ_P と α_P が存在する.

$$2 \langle A_D(t) \phi, \phi \rangle - \sum_{|r| \leq m} (\hat{A}_s^* |r|(t) \phi, \hat{A}_s |r|(t) \phi) + \lambda_P \|\phi\|^2 \geq \alpha_P \|\phi\|_{V^2}^2$$

(注 3) $\mathcal{F}_t$ は $\{W_{|r|}(t, \omega) \mid |r|=1, \dots, m\}$ によって生成される $\mathcal{F}$ の部分 σ -集合体を表わす.

(注 4) 白色雑音から確率積分を構成する際生じる集中定数系の場合に相当する補正項¹³⁾はここでは考慮しない.

$$(v\phi \in V, v, t \in T) \quad (2.17)$$

(C-2) [双曲形] つぎの不等式を満足する正数 $\lambda_h^1, \lambda_h^2, \alpha_h$ が存在する.

$$\langle A_D(t) \phi, \phi \rangle + \lambda_h^1 \|\phi\|^2 \geq \alpha_h \|\phi\|_{V^2}^2 \quad (2.18)$$

$$(v\phi \in V, v, t \in T)$$

$$\sum_{|r| \leq m} (\hat{A}_s^* |r|(t) \phi, \hat{A}_s |r|(t) \phi) \leq \lambda_h^2 \|\phi\|_{V^2}^2 \quad (2.19)$$

$$(v\phi \in V, v, t \in T)$$

ただし $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は $V \times V'$ 上で定義される連続双線形形式である. V および H の具体的な設定については, システムモデルの境界条件と密接に関連している. 一般に境界条件はつぎの二つの場合に分けられる⁶⁾.

1) Stable conditions

$$B_j(t) \phi(t) = 0, \quad j=1, 2, \dots, k-1, \quad m_j < m. \quad (2.20a)$$

2) Natural conditions

$$B_j(t) \phi(t) = 0, \quad j=k, k+1, \dots, m, \quad m_j \geq m \quad (2.20b)$$

すべての境界条件が Stable であれば, $V = H_0^m(G)$ (Dirichlet 問題), またそうでない場合は, $H_0^m(G) \subset V \subseteq H^m(G)$ とおけばよい. また $H = L^2(G)$ と設定する. V の設定については文献 6) に詳しく論じられている. このようにして (2.16) 式を満足する解の一意な存在を, 放物形, 双曲形のおおの場合についてまとめると, つぎの定理が得られる.

《定理 1》

[1] 放物形: z_0 を $L^2(\Omega, \mu; H)$ の任意の元とすると, 条件 (C-1) のもとで, (2.16) 式を満足するただ一つの確率過程 $z(t) \in L^2(T; L^2(\Omega, \mu; V))$ が存在する.

[2] 双曲形: z_0 を $L^2(\Omega, \mu; V) \times L^2(\Omega, \mu; H)$ の任意の元とすると, 条件 (C-2) のもとで, (2.16) 式を満足するただ一つの確率過程 $z(t) \in L^2(T; L^2(\Omega, \mu; V)) \times L^2(T; L^2(\Omega, \mu; H))$ が存在する. ただし μ は, V, H 上で定義される確率測度である (証明は付録 2 参照).

(2.16) 式と同様に

[1] $\vec{S}_i(t) = \vec{S}_i(t)$ [2] $\vec{S}_i(t) = [\vec{S}_i(t), 0]$ とし, 観測の数学モデルを, つぎのように記述する⁹⁾.

$$dy(t) = \mathcal{H}[\vec{S}_i(t) z(t)] dt + R(t) de(t, \omega), \quad y(t_0) = 0 \quad (2.21)$$

観測機構をも含めた解過程 $[z(t, \omega), y(t, \omega)]$ の基礎確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ は完備であるとする. さらに (2.21) 式で与えられる観測過程 $y(t, \omega)$ は, つぎの条件を満足するものと仮定する.

(C-3) $y(t)$ -過程は $L^2(T \times \Omega, dt \otimes d\mu_y; F)$ に属する. ただし, F は可分ヒルベルト空間を示し, μ_y は F 上で定義される確率測度である.

(C-4) 観測雑音 $e(t, \omega)$ は, $L^2(T \times \Omega, dt \otimes d\mu_e; E)$ に属する可分ヒルベルト空間 E で値をもつブラウン運動過程で, μ_e は E 上で定義される確率測度である.

(C-5) 作用素 $\mathcal{H}[\cdot]$ は, $L^\infty(T; \mathcal{L}(\Gamma; F))$ で与えられる確定的有界作用素である. また作用素 $R(t)$ は, 可逆対称有界作用素で, $L^\infty(T; \mathcal{L}(E; F))$ で定義される(注5).

(C-6) 各 $t \in T$ に対し, σ -代数 $\sigma\{z(s), e(s); t_0 \leq s \leq t\}$ と, $\sigma\{e(s_2) - e(s_1); t < s_1 < s_2 \leq t_f\}$ は独立である.

3. 状態推定問題

3.1 最小分散推定機構

本節では記号の簡略化のため, つぎの表現を用いる.

$$\phi_1((\phi_2, \phi_2)_*) = \begin{cases} \phi_1(\phi_2, \cdot)_* & (\text{放物形}) \\ \begin{bmatrix} \phi_1^1(\phi_2^1, \cdot)_* & \phi_1^1(\phi_2^2, \cdot)_* \\ \phi_1^2(\phi_2^1, \cdot)_* & \phi_1^2(\phi_2^2, \cdot)_* \end{bmatrix} & (\text{双曲形}) \end{cases}$$

$$[\phi_1, \phi_2]_* = \begin{cases} (\phi_1, \phi_2)_* & (\text{放物形}) \\ (\phi_1^1, \phi_2^1)_* + (\phi_1^2, \phi_2^2)_* & (\text{双曲形}) \end{cases}$$

ただし [2] 双曲形においては, $\phi_1 = \{\phi_1^1, \phi_1^2\}$, $\phi_2 = \{\phi_2^1, \phi_2^2\}$ である.

【定義】 (2.16) 式の解過程 $z(t)$ と最適推定過程 $\hat{z}(t) \triangleq E\{z(t) | \mathcal{Q}_t\}$ に関して, つぎのように定義する.

$$P(t|t) \triangleq E\{\hat{z}(t)(\hat{z}(t), \cdot) | \mathcal{Q}_t\} \quad (3.1)$$

$$Q(t|t) \triangleq E\{z(t)(z(t), \cdot) | \mathcal{Q}_t\} \quad (3.2)$$

ただし $\mathcal{Q}_t$ は時刻 t までの観測データの集積の最小 σ -代数, すなわち $\mathcal{Q}_t = \sigma\{y(s); t_0 \leq s \leq t\}$ を示す.

(3.1), (3.2) 式に関連して, つぎの作用素を定義する.

$$(\{\cdot\}P)_\delta(t|t) \triangleq E\{\hat{z}(t)((\{\cdot\}z(t), \cdot)) | \mathcal{Q}_t\} \quad (3.3)$$

$$(\{\cdot\}Q)_\delta(t|t) \triangleq E\{z(t)((\{\cdot\}z(t), \cdot)) | \mathcal{Q}_t\} \quad (3.4)$$

ただし $\{\cdot\}$ は任意の境界微分作用素を示している.

このような準備のもとで, つぎの二つの定理が本論文の主要結果として得られる.

《定理2》 最小誤差分散推定の意味で, 観測データの集積 $\mathcal{Q}_t$ に基づく $z(t)$ -過程の最適推定過程 $\hat{z}(t)$ はつぎの確率発展方程式を満足する.

$$\begin{aligned} d[\phi, \hat{z}(t)] \\ = -[\phi, \tilde{A}(t)\hat{z}(t)]dt \end{aligned}$$

$$+ [\phi, (\vec{S}_t(t)P)_\delta(t|t)\mathcal{H}^*[R^{-1*}(t)d\ell(t)]] \quad (3.5a)$$

$$[\phi, \hat{z}(t_0)] = [\phi, \hat{z}_0]$$

$$(\phi \in H^{2m}(G) \text{ or } H^{2m}(G) \times L^2(G)) \quad (3.5b)$$

ただし $\hat{z}_0 = E\{z(t_0)\}$, $d\ell(t) = R^{-1}(t)\{dy(t) - d[\vec{S}_t(t)\hat{z}(t)]dt\}$ である. また境界条件は [1], [2] おおの

$$[1] \text{ 放物形 } B_j(t)\hat{z}(t) = 0 \quad (3.6)$$

$$[2] \text{ 双曲形 } B_j(t)\hat{z}(t) = 0 \quad j=1, 2, \dots, m \quad (3.7)$$

定理3は誤差共分散作用素の動特性を求めたものである. ここでも記号の簡略化のため, つぎの行列を導入する.

$$[1] \text{ 放物形 } K_1 = K_2 = \mathbf{I} \quad (3.8)$$

$$[2] \text{ 双曲形 } K_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad K_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

《定理3》 共分散作用素 $P(t|t)$ は, つぎの作用素方程式を満足する.

$$\begin{aligned} d[P(t|t)\phi_1, \phi_2] \\ = [-\tilde{A}(t)P(t|t) - P(t|t)\tilde{A}^*(t) \\ + \sum_{|r| \leq m} K_1 \tilde{A}_s |r|(t) Q(t|t) (K_1 \tilde{A}_s |r|^*(t))] \\ \times \phi_1, \phi_2] dt - [(\vec{S}_t(t)P)_\delta(t|t)\mathcal{H}^*[R^{-1}(t) \\ \times R^{-1*}(t)\mathcal{H}[\vec{S}_t(t)P(t|t)\phi_1], \phi_2] dt \\ + \sum_{j=1}^m \{[(K_1 B_j(t)P)_\delta(t|t) K_2 T_j(t) \\ - (K_1 S_j(t)P)_\delta(t|t) K_2 C_j(t)] \phi_1, \phi_2\} dt \\ - \sum_{j=1}^m [(K_1 \hat{H}_j(t)Q)_\delta(t|t) K_2 G_j(t) \phi_1, \phi_2] dt \\ + E\{\hat{z}(t)((\hat{z}(t), \phi_1), \phi_2)(\mathcal{H}[\vec{S}_t(t)\hat{z}(t)], \\ R^{-1*}(t)d\ell(t))_F | \mathcal{Q}_t\} \end{aligned} \quad (3.10a)$$

$$[P(t_0|t_0)\phi_1, \phi_2] = E\{[\hat{z}_0((\hat{z}_0, \phi_1), \phi_2)] \quad (3.10b)$$

上式における $Q(t|t)$ は

$$\begin{aligned} d[Q(t|t)\phi_1, \phi_2] \\ = [-\tilde{A}(t)Q(t|t) - Q(t|t)\tilde{A}^*(t) \\ + \sum_{|r| \leq m} K_1 \tilde{A}_s |r|(t) Q(t|t) \\ \times (K_1 \tilde{A}_s |r|^*(t))] \phi_1, \phi_2] dt \\ + \sum_{j=1}^m \{[(K_1 B_j(t)Q)_\delta(t|t) K_2 T_j(t) \\ - (K_1 S_j(t)Q)_\delta(t|t) K_2 C_j(t)] \phi_1, \phi_2\} dt \\ - \sum_{j=1}^m [(K_1 \hat{H}_j(t)Q)_\delta(t|t) K_2 G_j(t) \phi_1, \phi_2] dt \\ - [Q(t|t)\phi_1, \phi_2](\mathcal{H}[\vec{S}_t(t)\hat{z}(t)], \\ R^{-1*}(t)d\ell(t))_F + E\{[\hat{z}(t)((\hat{z}(t), \phi_1), \\ \phi_2)(\mathcal{H}[\vec{S}_t(t)\hat{z}(t)], R^{-1*}(t)d\ell(t))_F | \mathcal{Q}_t\} \end{aligned}$$

$$([1] \phi_1, \phi_2 \in H^{2m}(G), [2] \phi_1, \phi_2 \in H^{2m}(G) \times L^2(G)) \quad (3.11)$$

(注5) $R(t)$ が対称でない場合には後述の作用素 $R^{-1*}(t)R^{-1}(t)$ は $(R(t)R^*(t))^{-1}$ に置きかえればよい.

で与えられる。(定理 2, 3 の証明は Radon-Nikodym の微係数を用いて容易に証明できるので省略する。詳細は文献 2), 4) を参照されたい。)

3.2 近似推定機構

定理 3 の結果で明らかのように, (3. 9a) 式の誤差共分散作用素 $P(t|t)$ を解くには無限次元の確率モーメントを求める必要が生じ実現不可能である。そこでガウス近似を導入することにより, 確率測度 μ_y を抽象的ガウス測度¹⁰⁾ $\tilde{\mu}_y$ によって近似する。すなわち

$$\mu_y(dz|Q_{f_i}) \cong \tilde{\mu}_y(dz|Q_{f_i}) \quad (3.12)$$

ただし $\tilde{\mu}_y$ は

$$\int (\cdot) \tilde{\mu}_y(dz|Q_{f_i}) = \int (\cdot) \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2}[z-\hat{z}, \phi]^2/[P(t|t)\phi, \phi]\right\}}{\sqrt{2\pi[P(t|t)\phi, \phi]}} d[z, \phi] \\ ([1] \ \phi \in H^{2m}(G), [2] \ \phi \in H^{2m}(G) \times L^2(G)) \quad (3.13)$$

で与えられる。そうすると (3. 10a) 式の最後の項および (3. 11) 式の第 4, 5 項はおのおののようになる。

$$E[\hat{z}(t)((\hat{z}(t), \phi_1)), \phi_2](\mathcal{H}[\vec{S}_i(t)\hat{z}(t)], R^{-1*}(t)dL(t))_F|Q_{f_i}) = 0 \quad (3.14) \\ -[Q(t|t)\phi_1, \phi_2](\mathcal{H}[\vec{S}_i(t)\hat{z}(t)], R^{-1*}(t)dL(t))_F \\ + E[\hat{z}(t)((\hat{z}(t), \phi_1)), \phi_2](\mathcal{H}[\vec{S}_i(t)\hat{z}(t)], R^{-1*}(t)dL(t))_F|Q_{f_i}) \\ = [\hat{z}(t)((\vec{S}_i(t)P)_0(t|t)\mathcal{H}^* \times [R^{-1*}(t)dL(t)], \phi_1)), \phi_2] \\ + [(\vec{S}_i(t)P)_0(t|t)\mathcal{H}^* \times [R^{-1*}(t)dL(t)]((\hat{z}(t), \phi_1)), \phi_2] \quad (3.15)$$

したがって, (3. 5) 式の推定機構を実現するためには (3. 10), (3. 11) 式に (3. 14), (3. 15) 式を代入して $P(t|t), Q(t|t)$ に関する近似式をつくり, これと (3. 5) 式を連立させて解けばよい。

4. 具 体 例

本節においては, $t \in T =]0, t_f[$, $G =]0, 1[\subset R^1$ とする。(2. 1) 式的具体例として, $(t, x) \in T \times G$ に対し

$$u_t(t, x) + a_2(t)u_{xx}(t, x) + a_1(t)\eta(t, \omega)u_x(t, x) = 0 \quad (4.1a)$$

を考える。この種の方程式, すなわち u_x の項の係数が不規則変動する場合は, 物理学においては, 移動する液体中の分子の移動を, その重さを考慮しなければいけないとき, あるいは汚染物質の拡散を取り扱うときなどにしばしば現われる数学モデルである。ここでは (4. 1a) 式において, $\eta(t, \omega)$ は標準正規性白色雑音

である。初期条件を

$$u(0, x) = u_0(x) \quad (x \in G) \quad (4.1b)$$

とし, さらにつぎの 2 種類の境界条件を考える。

$$[1] \text{ Dirichlet 条件 } u(t, x) = 0 \quad (4.2a)$$

$$[2] \text{ Neumann 条件 } a_2(t)D_x^1 u(t, x) = 0 \\ ((t, x) \in T \times \partial G) \quad (4.2b)$$

(H-1) の (2. 4), (2. 5) 式はここではおのおの

$$A_D(t) = a_2(t)D_x^2 \quad A_S(t, \omega) = a_1(t)\eta(t, \omega)D_x^1 \quad (4.3)$$

で与えられる。また (H-2) の (2. 6) 式は

$$[1] \ B(t) = D_x^0 \quad [2] \ B(t) = a_2(t)D_x^1 \quad (4.4)$$

の二つの場合を考えていることになる。さて補題 1 を本例題に適用すると, (2. 7) 式は任意の $\phi_1, \phi_2 \in H_2(G)$ に関して

$$(A_D(t)\phi_1, \phi_2) - (\phi_1, A_D^*(t)\phi_2) \\ = (a_2(t)D_x^1\phi_1, D_x^0\phi_2)\Gamma - (D_x^0\phi_1, a_2(t)D_x^1\phi_2)\Gamma \quad (4.5)$$

のように書ける。また (2. 9) 式についても同様に

$$(\hat{A}_S(t)\phi_1, \hat{A}_S(t)\phi_2) - (\phi_1, \hat{A}_S^*(t)\hat{A}_S(t)\phi_2) \\ = (D_x^0\phi_1, a_1(t)D_x^0\{\hat{A}_S(t)\phi_2\})\Gamma \quad (4.6)$$

が成立する。ただし $\hat{A}_S(t) = a_1(t)D_x^1$ である。したがって (4. 4) 式から

[1] Dirichlet 条件:

$$\{B(t), S(t)\} = \{D_x^0, a_2(t)D_x^1\} \quad (4.7)$$

[2] Neumann 条件:

$$\{B(t), S(t)\} = \{a_2(t)D_x^1, D_x^0\} \quad (4.8)$$

となる。条件 (C-1) を [1] では, $V = H_0^1(G)$, [2] では $V = H^1(G)$ と設定して (4. 1) 式に適用すると

$$2a_2(t) + (a_1(t))^2 < 0 \quad (\forall t \in T) \quad (4.9)$$

という係数に関する条件が得られる。そのとき定理 1 から (4. 1) 式はつぎの確率積分方程式で記述できる。

$$u(t, x) + \int_0^t a_2(s)D_x^2 u(s, x)ds \\ + \int_0^t a_1(s)D_x^1 u(s, x)dw(s, \omega) = u_0(x) \\ ((t, x) \in T \times G) \quad (4.10)$$

ここで $w(t, \omega)$ は 1 次元標準ブラウン運動過程である。つぎに観測機構について考える。本例題では観測機構を $x=1$ に配置して観測データを集める。すなわち $\mathcal{H}[\cdot] = \cdot|_{x=1}$ と設定する。(4. 7), (4. 8) 式より $\vec{S}_i(t)$ をつぎのように構成する。

[1] Dirichlet 条件:

$$\vec{S}_i(t) = h(t)S(t) = h(t)a_2(t)D_x^1 \quad (4.11)$$

[2] Neumann 条件:

$$\vec{S}_i(t) = h(t)S(t) = h(t)D_x^0 \quad (4.12)$$

観測の数学モデルは結局つぎの確率微分方程式で与え

られる。

$$[1] \quad dy(t) = h(t)a_2(t)[D_x^{-1}u(t, x)|_{x=1}]dt + r(t)de(t, \omega) \quad (4.13)$$

$$[2] \quad dy(t) = h(t)[u(t, x)|_{x=1}]dt + r(t)de(t, \omega) \quad (4.14)$$

ただし [1], [2] とも $y(0)=0$ である。また $e(t, \omega)$ は $w(t, \omega)$ とは独立な標準ブラウン運動過程を示している。定理 2 から、推定方程式は [1], [2] おおの次式で与えられる。

[1] Dirichlet 条件

$$\begin{aligned} \hat{u}(t, x) &+ \int_0^t a_2(s)[D_x^2 \hat{u}(s, x)]ds \\ &= \bar{u}_0(x) + \int_0^t h(s)a_2(s)[D_x^{-1}p(s, x, \xi)|_{\xi=1}] \\ &\quad \times r^{-2}(s)\{dy(s) \\ &\quad - h(s)a_2(s)[D_x^{-1}\hat{u}(s, \xi)|_{\xi=1}]ds\} \\ &\quad ((t, x) \in T \times G) \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$\hat{u}(t, x) = 0 \quad ((t, x) \in T \times \partial G) \quad (4.16)$$

[2] Neumann 条件

$$\begin{aligned} \hat{u}(t, x) &+ \int_0^t a_2(s)[D_x^2 \hat{u}(s, x)]ds \\ &= \bar{u}_0(x) + \int_0^t h(s)[p(s, x, \xi)|_{\xi=1}]r^{-2}(s)\{dy(s) \\ &\quad - h(s)[\hat{u}(s, \xi)|_{\xi=1}]ds\} \\ &\quad ((t, x) \in T \times G) \end{aligned} \quad (4.17)$$

$$a_2(s)D_x^{-1}\hat{u}(t, x) = 0 \quad ((t, x) \in T \times \partial G) \quad (4.18)$$

3.2 節で述べた手法によって、誤差共分散に関する近似作用素方程式を求めるとつぎのようになる。

$$P(t|t) = \int_0^1 p(t, x, \xi)(\cdot) d\xi \quad (4.19)$$

ただし $p(t, x, \xi)$ はつぎの Riccati 方程式の解である。

[1] Dirichlet 条件

$$\begin{aligned} p_t(t, x, \xi) &+ a_2(t)(D_x^2 + D_\xi^2)p(t, x, \xi) \\ &- (a_1(t))^2 D_x^{-1} D_\xi^{-1} q(t, a, \xi) \\ &+ \left(\frac{h(t)a^2(t)}{r(t)} \right)^2 [D_x^{-1}p(t, x, \xi)|_{\xi=1}] \\ &\quad \times [D_x^{-1}p(t, x, \xi)|_{x=1}] = 0 \\ &\quad ((t, x, \xi) \in T \times G_x \times G_\xi) \end{aligned} \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned} p(t, x, \xi) &= 0 \quad ((t, x, \xi) \in T \times \partial G_x \times G_\xi \\ &\quad \text{and } T \times G_x \times \partial G_\xi) \end{aligned} \quad (4.21)$$

[2] Neumann 条件

$$\begin{aligned} p_t(t, x, \xi) &+ a_2(t)(D_x^2 + D_\xi^2)p(t, x, \xi) \\ &- (a_1(t))^2 D_x^{-1} D_\xi^{-1} q(t, x, \xi) \\ &+ \left(\frac{h(t)}{r(t)} \right)^2 [p(t, x, \xi)|_{\xi=1}][p(t, x, \xi)|_{x=1}] = 0 \end{aligned}$$

$$((t, x, \xi) \in T \times G_x \times G_\xi) \quad (4.22)$$

$$a_2(t)D_x^{-1}p(t, x, \xi) = 0$$

$$((t, x, \xi) \in T \times \partial G_x \times G_\xi) \quad (4.23a)$$

$$a_2(t)D_\xi^{-1}p(t, x, \xi) = 0$$

$$((t, x, \xi) \in T \times G_x \times \partial G_\xi) \quad (4.23b)$$

[1], [2] とも初期条件は

$$p(0, x, \xi) = E\{(u_0(x) - u_0(x))(u_0(\xi) - \bar{u}_0(\xi))\} \quad (4.24)$$

で与えられる。さらに作用素 $Q(t|t)$ については、

$$Q(t|t) = \int_0^1 q(t, x, \xi)(\cdot) d\xi \quad (4.25)$$

で与えられ $q(t, x, \xi)$ は次式の解である。

[1] Dirichlet 条件

$$\begin{aligned} q(t, x, \xi) &+ \int_0^t [a_2(s)(D_x^2 + D_\xi^2) \\ &- (a_1(s))^2 D_x^{-1} D_\xi^{-1}] q(s, x, \xi) ds = q(0, x, \xi) \\ &+ \int_0^t \hat{u}(s, x) h(s) a_2(s) [D_\sigma^{-1} p(s, \xi, \sigma)|_{\sigma=1}] \\ &\quad \times r^{-2}(s) \{dy(s) - h(s) a_2(s) [D_\sigma^{-1} \hat{u}(s, \sigma)|_{\sigma=1}] ds\} \\ &+ \int_0^t h(s) a_2(s) [D_\sigma^{-1} p(s, x, \sigma)|_{\sigma=1}] \hat{u}(s, \xi) \\ &\quad \times r^{-2}(s) \{dy(s) - h(s) a_2(s) [D_\sigma^{-1} \hat{u}(s, \sigma)|_{\sigma=1}] ds\} \\ &\quad ((t, x, \xi) \in T \times G_x \times G_\xi) \end{aligned} \quad (4.26)$$

$$q(t, x, \xi) = 0 \quad (4.27)$$

$$((t, x, \xi) \in T \times \partial G_x \times G_\xi \text{ and } T \times G_x \times \partial G_\xi)$$

[2] Neumann 条件

$$\begin{aligned} q(t, x, \xi) &+ \int_0^t [a_2(s)(D_x^2 + D_\xi^2) \\ &- (a_1(s))^2 D_x^{-1} D_\xi^{-1}] q(s, x, \xi) ds = q(0, x, \xi) \\ &+ \int_0^t \hat{u}(s, x) h(s) [p(s, \xi, \sigma)|_{\sigma=1}] \\ &\quad \times r^{-2}(s) \{dy(s) - h(s) [\hat{u}(s, \sigma)|_{\sigma=1}] ds\} \\ &+ \int_0^t h(s) [p(s, x, \sigma)|_{\sigma=1}] \hat{u}(s, \xi) \\ &\quad \times r^{-2}(s) \{dy(s) - h(s) [\hat{u}(s, \sigma)|_{\sigma=1}] ds\} \\ &\quad ((t, x, \xi) \in T \times G_x \times G_\xi) \end{aligned} \quad (4.28)$$

$$a_2(t)D_x^{-1}q(t, x, \xi) = 0 \quad ((t, x, \xi) \in T \times \partial G_x \times G_\xi) \quad (4.29a)$$

$$a_2(t)D_\xi^{-1}q(t, x, \xi) = 0 \quad ((t, x, \xi) \in T \times G_x \times \partial G_\xi) \quad (4.29b)$$

本例題の数値実験は、[1] Dirichlet 条件の場合についてのみ行った。初期条件は $u_0(x) = 13.56 (\sqrt{3.0 - (x - 0.5)^2} - \sqrt{2.75})$ で、その平均値は $\bar{u}_0(x) = 0$ とおく。(4.1)式の係数は $a_2(t) = -0.5$, $a_1(t) = 0.9$ で与え、さらに観測方程式のパラメータはおおの $h(t) = 0.6$, $r(t) = 0.04$ とする。計算機によって推

Fig. 1 A sample run of the system state $u(t,x)$ in Example

Fig. 2 A sample run of the estimated process $\hat{u}(t,x)$ in Example

Fig. 3 The $u(t,x)$ and $\hat{u}(t,x)$ runs at the special points $x=0.5$ and 0.8 in Example

定機構を実現するための手順はつぎのとおりである。すなわち(4.10)式を計算機を用い逐次(4.13)式の観測データをつくり、これをもとに与えられた境界条件のもとで、(4.15)、(4.20)および(4.26)式を連立させて解けばよい。計算機で解くにあたっては、上記の一連の式を差分形に変換し、陰公式を用いて実現した。その区間幅はいずれも $\Delta t = 0.0001$, $\Delta x = 0.1$ としている。Fig. 1 はシステムの真値の見本過程 $u(t,x)$ を示している。Fig. 2 はこれに対する推定過程を示している。さらに比較検討のため、Fig. 3 においては、 $x=0.5, 0.8$ における真値と推定値の見本過程を示した。なお紙数の都合上、誤差共分散のシミュレーション結果は省略した。

5. 結 言

本論文では、ソボレフ空間上の確率積分を不規則偏微分作用素に導入しシステムの数学モデルを確立することにより、文献 2), 5) で考察した確率的固有値問題を導入する方法よりさらに広いクラスの偏微分方程式を解析することができた。

参 考 文 献

- 1) 砂原, 相原, 小島: マルコフ連鎖形変動パラメータをもつ分布定数系の準最適制御, 計測自動制御学会論文集, 13-3, 249/254 (1977)
- 2) 砂原, 相原, 小島: 不規則係数をもつ確率分布定数系の状態推定, 計測自動制御学会論文集, 13-4, 336/343 (1977)
- 3) Y. Sunahara, Sh. Aihara, M. Koyama and F. Kojima: On the Optimal Control for Distributed Parameter Systems with White Noise Coefficients, Proc. Int. Symp. on Stochastic Differential Equations, RIMS, Kyoto Univ., 397/408, July (1976)
- 4) Y. Sunahara, Sh. Aihara and F. Kojima: Filtering for Distributed Parameter Systems with Stochastic Coefficients, Proc. Int. Conf. on Information Sciences and Systems, Univ. of Patras, Greece, Aug. (1976)
- 5) Y. Sunahara, Sh. Aihara, F. Kojima and M. Koyama: On the Optimal Control for Distributed Parameter Systems, with Markov Chain Coefficients, ibid
- 6) J.L. Lions and E. Magenes: Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications I, Springer (1972)
- 7) J.L. Lions: Optimal Control of Systems Governed by Partial Differential Equations, Springer (1971)
- 8) K. Yoshida: Functional Analysis, Springer (1971)
- 9) A. Bensoussan and M. Viot: Optimal Control of Stochastic Linear Distributed Parameter Systems, SIAM J. Control, 13, 904/926 (1975)
- 10) I.I. Gihman and A.V. Skorohod: The Theory of Stochastic Processes I, Springer (1974)
- 11) E. Wong and M. Zakai: On the Relation between Ordinary and Stochastic Differential Equations, Int. J. Eng. Sci., 3, 213/229 (1965)

《付 録》

〈付録 1〉 確率積分の定義

(2.14)式の確率積分は、その被積分項がヒルベルト空間上で値をとる点で、Bensoussan の定義した確率積分⁹⁾と類似しているが、つぎの点で異なっている。すなわち

- i) ブラウン運動過程 $\{w_{|r|}(t,\omega)\}_{|r|=1,\dots,m}$ は時間のみの不規則関数であり、位置変数 x の関数ではない。
- ii) 偏微分作用素の係数が不規則性をもつことに帰因して、確率積分の被積分項に偏微分作用素が含まれる。

(2.14)式の確率積分に関しては、すでに著者らが報告している、ここではその概略を述べるに止める(詳しくは文献3)参照). いま V は可分であるから、1次独立でその線形結合が V で稠密である可附番個の正規直交基底 $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_k, \dots$ を V からつくることのできる. その中の任意の k 個を取り出して $V_k = \{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_k\}$ なる部分空間を考える. この空間 V_k 上で値をもつ $\phi^k(t)$ を $\phi^k(t) \triangleq \sum_{i=1}^k \phi_i(t) \phi_i$ のように定義する. さらに(2.14)式の確率積分の有限近似として

$$I^k(\phi) \triangleq \int_{t_0}^t \sum_{|r| \leq m} \hat{A}_s |r|(t) \phi^k(\tau) d\omega |r|(\tau) \quad (A.1)$$

を定義する. この確率積分の被積分項は

$$\sum_{|r| \leq m} \hat{A}_s |r|(t) \phi^k(\tau) = \sum_{|r| \leq m} \sum_{i=1}^k \hat{A}_s |r|(t) \phi_i(\phi(t), \phi_i) \quad (A.2)$$

となっており、 V_k が有限次元であるので、位置方向に関して V 上でのノルムを導入することによって通常の伊藤の確率積分の理論をそのまま適用することが可能となる. ところで一方 $\phi(t)$ は $L^2(\Omega, \mu; L^2(T, V))$ に属するとしており、さらに(2.13)式より $V \subset H$ であるから、ソボレフのうめこみ定理とポアンカレの不等式を用いることにより、十分大きな $n \geq k$ に対して、 $L^2(\Omega, \mu; L^2(T; V))$ の意味において

$$\phi^n(t) \rightarrow \phi(t) \quad (n \rightarrow \infty) \quad (A.3)$$

および

$$\sum_{|r| \leq m} \hat{A}_s |r|(t) \phi^n(\tau) \rightarrow \sum_{|r| \leq m} \hat{A}_s |r|(t) \phi(\tau) \quad (n \rightarrow \infty)$$

となる部分列 $\phi^n(t)$ を取り出すことができる. このようにして、 $L^2(\Omega, \mu; L^2(T; V))$ の意味における(A.1)式の極限值、すなわち $\lim_{n \rightarrow \infty} I^n(\phi)$ を(2.14)式の確率積分のように表現するのである. また(2.14)式の確率積分がつぎの性質を満たすことも容易に検証される.

(P-1) ($t_0 \leq s < t \leq t_f$) に対して

$$E \left\{ \int_{t_0}^t dA_s(\tau, \omega) [\phi(\tau)] | \mathcal{F}_s \right\} = \int_{t_0}^s dA_s(\tau, \omega) [\phi(\tau)]$$

(P-2)

$$E \left\{ \left\| \int_{t_0}^t dA_s(\tau, \omega) [\phi(\tau)] \right\|^2 \right\} = E \left\{ \int_{t_0}^t \sum_{|r| \leq m} \|\hat{A}_s |r|(t) \phi(\tau)\|^2 d\tau \right\}$$

〈付録2〉定理1の証明

放物形の場合について行う. 付録1で述べたのと同様の手法で、ソボレフ空間 V の要素である正規直交基底 $\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_k\}$ によって張られる V の部分空間を V_k とする. そして $A_D^k(t) \in \mathcal{L}(V_k; V_k')$ および

$dA_s^k(t, \omega)[\cdot]$ なる作用素を、おののつぎのように定義する.

$$A_D^k(t) = \sum_{i=1}^k \langle A_D(t)(\cdot), \phi_i \rangle \phi_i \quad (B.1)$$

$$dA_s^k(t, \omega)[\cdot] = \sum_{i=1}^k (dA_s(t, \omega)[\cdot], \phi_i) \phi_i \quad (B.2)$$

さらに

$$u^k(t) = \sum_{i=1}^k (u(t), \phi_i) \phi_i \quad u_0^k = \sum_{i=1}^k (u_0, \phi_i) \phi_i \quad (B.3)$$

のように設定しておく. さて(B.1), (B.2)と(B.3)式をつかって、(2.16)式をつぎのように近似する.

$$du^k(t) + A_D^k(t) u^k(t) dt + dA_s^k(t, \omega)[u^k(t)] = 0 \quad (B.4a)$$

$$u^k(t_0) = u_0^k \quad (B.4b)$$

いま $\hat{A}_s^k(t)$ を

$$\hat{A}_s^k(t) = \sum_{i=1}^k (\hat{A}_s(t)(\cdot), \phi_i) \phi_i \quad (B.5)$$

で与えると、このとき明らかに作用素 $\hat{A}_s^{k*}(t) \hat{A}_s^k(t)$ は $\mathcal{L}(V_k; V_k')$ に属する. (B.1), (B.5)式で定義される作用素に関しては明らかに

$$(A_D^k(s) u^k(s), u^k(s)) = \langle A_D(s) u^k(s), u^k(s) \rangle \quad (B.6)$$

$$\|\hat{A}_s^k(s) u^k(s)\|^2 \leq \|\hat{A}_s(s) u^k(s)\|^2 \quad (B.7)$$

の関係が成立するので、伊藤の微分則により、

$$\frac{1}{2} E \{ \|u^k(t)\|^2 \} + E \left\{ \int_{t_0}^t \left[\langle A_D(s) u^k(s), u^k(s) \rangle - \frac{1}{2} \|\hat{A}_s(s) u^k(s)\|^2 \right] ds \right\} \leq \frac{1}{2} E \{ \|u_0^k\|^2 \} \quad (B.8)$$

なる不等式が得られる. 条件(C-1)を(B.8)式に適用することによって、もし $u_0^k \rightarrow u_0 \in L^2(\Omega, \mu; H)$ ($k \rightarrow \infty$)であれば、

$$E \{ \|u^k(t)\|^2 \} \leq C_1 \quad (B.9)$$

$$E \left\{ \int_0^t \|u^k(s)\|_{V^2}^2 ds \right\} \leq C_2 \quad (\forall t \in T) \quad (B.10)$$

を満足するある定数 C_1, C_2 が存在することは明らかである. したがって(B.8), (B.9)式から、 $L^2(T; L^2(\Omega, \mu, V))$ において $u^k(t)$ が $u(t)$ に弱収束するような部分列を選びだすことができ、明らかに(2.16)式を満足する $L^2(T; L^2(\Omega, \mu; V))$ に属する解 $u(t)$ は存在する. さらに解の一意性については(B.8)式から容易に導かれる. 双曲形の場合についても同様の方法で証明できる.

なお、本研究の一部は、文部省科学研究費一般研究C355114の援助によるものであることを記し、深甚の謝意を表する.