出力微分情報を用いた双線形システムの状態観測器[†]

舟橋 康行*・安達 由洋*

State Observer for Bilinear Systems Using Derivative of Output

Yasuyuki FUNAHASHI* and Yoshihiro ADACHI*

From the viewpoint of state estimation, we may regard bilinear systems as time-varying systems and apply to them the results with the observer of a linear time-varying system. However, since the input is in general not known a priori, it seems impossible to apply the theories of time-varying linear systems to bilinear systems. For the purpose of simple implementation, a new type of state observer is proposed in this paper.

The output of the bilinear system is one-time differentiable. Based on this fact and on the concept of Lyapunov stability, we propose a method for designing a state observer for bilinear systems, using information on the input, output and one-time derivative of the output. This state observer has a specific feature of simple structure and the norm of the estimation error converges to zero asymptotically irrespective of the input. As a result, state observers are shown to be designed for a wider class of bilinear systems. Also the condition, under which a state observer without information on one-time derivative can be designed, is given obviously.

1. 緒 言

本論文では、入出力および出力の1階微分情報を用いた双線形システムの状態観測器の構成法について報告する。

状態推定の立場からは、双線形システムを線形時変システムとみなして、線形時変システムの観測器に対する結果（たとえば1））を適用することが考えられる。しかし、この場合入力をパラメータとして含む複雑な行列方程式を解かねばならない。しかも、一般に

は入力はいずれもあらかじめわからないので、オンラインで行列方程式を解かねばならず、現実には適用不可能と考えられる。そこで、比較的簡単に構成できる双線形システムの状態観測器についての研究がいくつか報告されている^{2)~8)}。たとえば、文献3), 4)では推定誤差が入力に依存しない観測器が与えられた。また、推定誤差が入力に依存することは許し、単に推定誤差のノルムが入力に関係なく漸近的に零に収束する観測器を考えれば、文献3), 4)よりも広いクラスのシステムに対して状態観測器が構成できることが示された⁷⁾。なお、これらは入力および出力の情報のみを用いた観測器である。

双線形システムの出力は常に1階微分可能である。この事実から、入出力および出力の1階微分の情報を用いた新たな観測器が構成されている⁸⁾。

本論文では、入出力および出力の1階微分の情報を用いた双線形システムの観測器を、リアプノフの安定性の観点から構成することを考える。その結果、本方法によれば従来の方法で構成できないクラスのシステムに対しても観測器が構成できることになった。まず2節で観測器の定義を行い、3節では観測器の存在条件を導き、その構成法を与える。また、特別な場合には出力の1階微分情報を用いない観測器に変換できることを示す。最後に、4節ではいくつかのシステムに対して実際に観測器を構成し、本論文の方法がこれまでのものより広いクラスのシステムに適用できることを示す。

2. 状態観測器の基本式

つぎのような双線形システム $\Sigma(A, B, C)$ を考える。

$$\begin{aligned}\Sigma: \dot{x} &= \left(A_0 + \sum_{i=1}^m u_i A_i \right) x + Bu \\ y &= Cx\end{aligned}\quad (2.1)$$

ただし、 x は n 次元状態ベクトル、 $u = [u_1, u_2, \dots, u_m]^T$ は m 次元入力ベクトル、 y は p 次元出力ベクトルであ

[†] US-Japan Cooperation Research の St. Louis Meeting で発表 (昭 52・8)

* 名古屋大学工学部 名古屋千種区不老町

* Faculty of Engineering, Nagoya University, Nagoya
(Received February 1, 1978)

り, $A_i (i=0, 1, \dots, m)$, B, C はそれぞれ適当なサイズの実定数行列である. また, $\text{rank } C=p$ とする. ここで, つぎの(2.2)式を満たす任意の $(n-p) \times n$ 行列 D をとり, $T=[C^T D^T]^T$ で状態空間の基底変換を行う.

$$\text{rank} \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} = n \quad (2.2)$$

そのとき, 行列 A_i, B, C はそれぞれつぎの行列 $\bar{A}_i, \bar{B}, \bar{C}$ に変換される.

$$\bar{A}_i = T A_i T^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{i11} & \bar{A}_{i12} \\ \bar{A}_{i21} & \bar{A}_{i22} \end{bmatrix} \quad i=0, 1, \dots, m$$

$$\bar{B} = T B = \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 \end{bmatrix}$$

$$\bar{C} = C T^{-1} = [I_p \quad 0] \quad (2.3)$$

ただし, $\bar{A}_{i11} \in \mathbf{R}^{p \times p}$, $\bar{A}_{i12} \in \mathbf{R}^{p \times (n-p)}$, $\bar{A}_{i21} \in \mathbf{R}^{(n-p) \times p}$, $\bar{A}_{i22} \in \mathbf{R}^{(n-p) \times (n-p)}$, $\bar{B}_1 \in \mathbf{R}^{p \times m}$, $\bar{B}_2 \in \mathbf{R}^{(n-p) \times m}$ の実定数行列であり, I_p は p 次の単位行列である. また, つぎのように状態ベクトルを分割する.

$$\bar{x} = T x = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

ただし, $\bar{x}_1 \in \mathbf{R}^p$, $\bar{x}_2 \in \mathbf{R}^{n-p}$ である.

このとき, 変換された双線形システム Σ' はつぎのように記述される.

$$\begin{aligned} \Sigma': \begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_1 \\ \dot{\bar{x}}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \bar{A}_{011} & \bar{A}_{012} \\ \bar{A}_{021} & \bar{A}_{022} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} \\ &+ \sum_{i=1}^m u_i \begin{bmatrix} \bar{A}_{i11} & \bar{A}_{i12} \\ \bar{A}_{i21} & \bar{A}_{i22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 \end{bmatrix} u \\ y &= [I_p \quad 0] \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.5)$$

第2式より $\bar{x}_1 = y$ である. したがって $\bar{x}_1$ は直接に観測できるので $\bar{x}_2$ を推定すればよい. $\bar{x}_2$ に対する方程式を取り出すと次式になる.

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}_2 &= \left(\bar{A}_{022} + \sum_{i=1}^m u_i \bar{A}_{i22} \right) \bar{x}_2 \\ &+ \left(\bar{A}_{021} + \sum_{i=1}^m u_i \bar{A}_{i21} \right) y + \bar{B}_2 u \end{aligned} \quad (2.6)$$

また, $\bar{x}_2$ に対する観測方程式はつぎようになる.

$$\begin{aligned} \eta &= \dot{y} - \left(\bar{A}_{011} + \sum_{i=1}^m u_i \bar{A}_{i11} \right) y - \bar{B}_1 u \\ &= \left(\bar{A}_{012} + \sum_{i=1}^m u_i \bar{A}_{i12} \right) \bar{x}_2 \end{aligned} \quad (2.7)$$

そこで, システム Σ' に対してつぎのシステム Σ_0 を考える.

$$\begin{aligned} \Sigma_0: \dot{z} &= \left(\bar{A}_{022} + \sum_{i=1}^m u_i \bar{A}_{i22} \right) z \\ &+ \left(\bar{A}_{021} + \sum_{i=1}^m u_i \bar{A}_{i21} \right) y + \bar{B}_2 u \end{aligned}$$

$$+ \left(K_0 + \sum_{i=1}^m u_i K_i \right) \left[\eta - \left(\bar{A}_{012} + \sum_{i=1}^m u_i \bar{A}_{i12} \right) z \right] \quad (2.8)$$

ただし, z は $(n-p)$ 次元ベクトルであり, $K_i \in \mathbf{R}^{(n-p) \times (n-p)}$ ($i=0, 1, \dots, m$) である.

【定義 1】

Σ' と Σ_0 の間に, 初期状態 $x(0), z(0)$ および入力 $u(\cdot)$ に関係なく

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [\bar{x}_2(t) - z(t)] = 0 \quad (2.9)$$

が成立するとき, Σ_0 を Σ' の状態観測器という.

ここで, $e = \bar{x}_2 - z$ と定義すれば, e はつぎの方程式を満たす.

$$\begin{aligned} \dot{e} &= \left[\bar{A}_{022} + \sum_{i=1}^m u_i \bar{A}_{i22} \right. \\ &\quad \left. - \left(K_0 + \sum_{i=1}^m u_i K_i \right) \left(\bar{A}_{012} + \sum_{i=1}^m u_i \bar{A}_{i12} \right) \right] e \\ &= \left[(\bar{A}_{022} - K_0 \bar{A}_{012}) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^m u_i (\bar{A}_{i22} - K_i \bar{A}_{i12} - K_0 \bar{A}_{i12}) \right. \\ &\quad \left. - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m u_i u_j K_i \bar{A}_{j12} \right] e \end{aligned} \quad (2.10)$$

誤差 e 自身が入力 $u(\cdot)$ に依存しないことを要求すれば, つぎの定理が得られる.

《定理 1⁸⁾》

Σ_0 が Σ' の状態観測器であるための十分条件は, つぎの条件(i)~(iii)を満たす $K_0, K_i (i=1, 2, \dots, m)$ が存在することである.

- (i) $\bar{A}_{022} - K_0 \bar{A}_{012}$: 安定
- (ii) $\bar{A}_{i22} - K_i \bar{A}_{i12} - K_0 \bar{A}_{i12} = 0 \quad i=1, 2, \dots, m$
- (iii) $K_i \bar{A}_{j12} = 0 \quad i, j=1, 2, \dots, m \quad (2.11)$

3. 安定な状態観測器の構成

前節では, 観測器を定義し観測誤差が入力 $u(\cdot)$ に依存しないという制約により観測器の存在条件を求めた. しかしながら, 上述の存在条件を満たさないシステムも数多く存在する. そこで, この節では, リアプノフの安定性の考えを用いて, よりゆるやかな条件のもとで観測器を構成することを考える.

《定理 2》

Σ_0 が Σ' の状態観測器であるための十分条件は, つぎの条件を満たす $K_0, K_i (i=1, 2, \dots, m)$ および正定対称行列 P, Q が存在することである.

- (i) $P(\bar{A}_{022} - K_0 \bar{A}_{012}) + (\bar{A}_{022} - K_0 \bar{A}_{012})^T P = -Q$

$$\begin{aligned}
 & \text{(ii)} \quad P(\bar{A}_{i22} - K_i \bar{A}_{012} - K_0 \bar{A}_{i12}) \\
 & \quad + (\bar{A}_{i22} - K_i \bar{A}_{012} - K_0 \bar{A}_{i12})^T P = 0 \\
 & \quad i=1, 2, \dots, m \\
 & \text{(iii)} \quad P(K_i \bar{A}_{j12}) + (K_i \bar{A}_{j12})^T P \\
 & \quad = 0 \quad i, j=1, 2, \dots, m \quad (3.1)
 \end{aligned}$$

(証明)

$V(e) = e^T P e$ とする。ここで $V(e)$ の時間微分をとると

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} V(e) &= \dot{e}^T P e + e^T P \dot{e} \\
 &= e^T [P(\bar{A}_{022} - K_0 \bar{A}_{012}) \\
 & \quad + (\bar{A}_{022} - K_0 \bar{A}_{012})^T P] e \\
 & \quad + \sum_{i=1}^m u_i e^T [P(\bar{A}_{i22} - K_i \bar{A}_{012} - K_0 \bar{A}_{i12}) \\
 & \quad + (\bar{A}_{i22} - K_i \bar{A}_{012} - K_0 \bar{A}_{i12})^T P] e \\
 & \quad - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m u_i u_j e^T [P(K_i \bar{A}_{j12}) \\
 & \quad + (K_i \bar{A}_{j12})^T P] e \quad (3.2)
 \end{aligned}$$

条件(i)～(iii)を満足するような $K_0, K_i (i=1, 2, \dots, m)$, P が存在すると仮定すれば、その K_0, K_i, P に対し

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} V(e) &= e^T [P(\bar{A}_{022} - K_0 \bar{A}_{012}) \\
 & \quad + (\bar{A}_{022} - K_0 \bar{A}_{012})^T P] e \\
 &= -e^T Q e < 0 \quad (3.3)
 \end{aligned}$$

したがって、(2.10)式はリアプノフ関数 $V(e) = e^T P e$ をもち、任意の入力 $u(\cdot)$ に対して $e=0$ は大域的漸近安定な平衡点となる。ゆえに、(2.8)式で表わされるシステム Σ_0 において $K_0, K_i (i=1, 2, \dots, m)$ を条件(i)～(iii)を満足するように選べば、 Σ_0 は Σ' の状態観測器となる。(証明終)

定理2で双線形システムに対する出力の1階微分の情報を用いた観測器の存在条件を、リアプノフの安定性の考えから導いた。すなわち、システム Σ' に対して定理2の条件(i)～(iii)を満たす $K_0, K_i (i=1, 2, \dots, m)$, P, Q が存在するとき、パラメータ行列 $K_0, K_i (i=1, 2, \dots, m)$ の値をそのように選べば、システム Σ_0 は推定誤差 e のノルムが入力 $u(\cdot)$ および初期状態 $\bar{x}_2(0), z(0)$ に無関係に漸近的に零に収束する。しかし、(2.10)式から明らかなように誤差 e 自身は入力に依存している。

この観測器の収束速度に関しては、つぎの系が成立する。

[系 1]

定理2の条件が成立するとき、観測器の収束速度は次式で評価される。

$$\begin{aligned}
 \|\bar{x}_2(t) - z(t)\| &\leq \|\bar{x}_2(0) - z(0)\| \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}} \\
 &\quad \cdot \exp \left[-\frac{\lambda_{\min}(Q)}{2\lambda_{\max}(P)} t \right] \quad (3.4)
 \end{aligned}$$

ここで、 $\lambda_{\min}(P), \lambda_{\max}(P)$ はそれぞれ P の最小固有値、最大固有値を表わす。

(証明)

定理2の条件が成立していると仮定する。 $V(e(t)) = e(t)^T P e(t)$ とすれば次式が成立する。

$$\lambda_{\min}(P) \|e(t)\|^2 \leq V(e(t)) \leq \lambda_{\max}(P) \|e(t)\|^2 \quad (3.5)$$

また、(3.3)式より $dV(e(t))/dt = -e(t)^T Q e(t)$ であるから

$$-\lambda_{\max}(Q) \|e(t)\|^2 \leq \frac{d}{dt} V(e(t)) \leq -\lambda_{\min}(Q) \|e(t)\|^2 \quad (3.6)$$

となる。(3.5), (3.6)式より次式が得られる。

$$\frac{d}{dt} V(e(t)) \leq -\frac{\lambda_{\min}(Q)}{\lambda_{\max}(P)} V(e(t)) \quad (3.7)$$

したがって、

$$V(e(t)) \leq V(e(0)) \exp \left[-\frac{\lambda_{\min}(Q)}{\lambda_{\max}(P)} t \right] \quad (3.8)$$

ととる。(3.5)式と(3.8)式より(3.6)式が得られる。

(証明終)

定理2で構成された観測器は出力の微分値を用いている。工学的見地からは微分値を避けることが望ましい。そこで以下には微分値を用いずに観測器が構成できる場合を調べる。

いま、システム Σ' に対して $K_i=0 (i=1, 2, \dots, m)$ として定理2の条件(i)～(iii)を満たす K_0, P, Q が存在する場合を考える。このときシステム Σ' の観測器 Σ_0 を $z^* = z - K_0 y$ で状態変換すると、つぎのシステム Σ_0^* となる。

$$\begin{aligned}
 \Sigma_0^*: \dot{z}^* &= \left[\bar{A}_{022} + \sum_{i=1}^m u_i \bar{A}_{i22} \right. \\
 & \quad \left. - K_0 \left(\bar{A}_{012} + \sum_{i=1}^m u_i \bar{A}_{i12} \right) \right] z^* \\
 & \quad + \left(\bar{A}_{022} + \sum_{i=1}^m u_i \bar{A}_{i22} \right) K_0 y \\
 & \quad - K_0 \left(\bar{A}_{011} + \sum_{i=1}^m u_i \bar{A}_{i11} \right) y \\
 & \quad - K_0 \left(\bar{A}_{012} + \sum_{i=1}^m u_i \bar{A}_{i12} \right) K_0 y \\
 & \quad + \left(\bar{A}_{021} + \sum_{i=1}^m u_i \bar{A}_{i21} \right) y + \bar{B}_2 u - K_0 \bar{B}_1 u \\
 w^* &= z^* + K_0 y \quad (3.9)
 \end{aligned}$$

ここで、 $e^* = \bar{x}_2 - w^*$ とおけば次式が成立する。

$$e^* = \left[\bar{A}_{022} + \sum_{i=1}^m u_i \bar{A}_{i22} - K_0 \left(\bar{A}_{012} + \sum_{i=1}^m u_i \bar{A}_{i12} \right) \right] e^* \quad (3.10)$$

システム(3.9)は出力の微分の項を含まない。したがって、つぎの定理が成立する。

《定理3》

システム Σ' に対して、 $K_i=0$ ($i=1, 2, \dots, m$) として定理2の条件(i)~(iii)を満たす行列 K_0 および正定対称行列 P, Q が存在すれば、出力の1階微分を含まない観測器 Σ_0^* が構成できる。この観測器の収束速度は

$$\| \bar{x}_2(t) - v_0^*(t) \| \leq \| \bar{x}_2(0) - v_0^*(0) \| \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}} \cdot \exp \left[-\frac{\lambda_{\min}(Q)}{2\lambda_{\max}(P)} t \right] \quad (3.11)$$

で評価される。

定理3で構成された観測器 Σ_0^* は、文献7)で与えられた観測器と一致している。したがって、本論文の構成法は文献7)を特別な場合として含む。

$\bar{A}_{112}=0$ という条件を満たす限られた1入力双線形システムに対して、文献6)で観測器が提案されている。しかし、 K_1 に相当する項が考慮されてなく、またリアプノフ関数、すなわち正定対称行列 P, Q が入力 $u(\cdot)$ に依存する時間関数にとられている。そのため大域的漸近安定な観測器の存在条件が入力 $u(\cdot)$ に依存する。したがって、入力関数 $u(\cdot)$ があらかじめわかるか、または入力値 $u(t)$ がある種の条件を満たさなければ文献6)による観測器は構成できない。なお、文献6)では大域的漸近安定な観測器を構成できなかったシステムに対して、4節の例3、例4において本論文の方法で観測器を構成する。

4. 例題

この節では、定理2で得た観測器の存在条件が文献7), 8)による観測器の存在条件よりゆるくなっていること、したがって従来の方法よりも広いクラスのシステムに対し観測器が構成可能であることを例により示す。文献8)の観測器の存在条件は定理1で与えられている。文献7)ではつぎの条件

$$(i) \quad P(S\bar{A}_{012} + \bar{A}_{022}) + (S\bar{A}_{012} + \bar{A}_{022})^T P = -Q \quad (4.1)$$

$$(ii) \quad P(S\bar{A}_{i12} + \bar{A}_{i22}) + (S\bar{A}_{i12} + \bar{A}_{i22})^T P = 0 \quad (4.2)$$

$$i=1, 2, \dots, m$$

を満たす行列 S および正定対称行列 P, Q が存在するとき、システム Σ' の観測器が存在するとなっている。

まず、例1は従来の観測器の存在条件のいずれかを満たさないシステムであり、例2はどの条件も一つ一つは満たしうが、全部を同時に満たすことはできないシステムである。

【例1】 つぎのシステムを考える。

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} a_{01} & 1 & 1 \\ a_{02} & -1 & 0 \\ a_{03} & 0 & -1 \end{bmatrix} x(t) + u(t) \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{12} & 1 & 0 \\ a_{13} & 0 & -1 \end{bmatrix} x(t)$$

$$y(t) = [1 \ 0 \ 0] x(t) \quad (4.3)$$

このシステムは(2.5)式の形をしている。すなわち、

$$\bar{A}_{012} = [1 \ 1], \quad \bar{A}_{112} = [0 \ 0]$$

$$\bar{A}_{022} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \bar{A}_{122} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

である。このシステムに対して、まず文献7)による観測器を適用する。 $\bar{A}_{112} = [0 \ 0]$ であるから S の選択に無関係に

$$S\bar{A}_{112} + \bar{A}_{122} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

であるので、(4.2)式はつぎのようになる。

$$P \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} P = 0 \quad (4.4)$$

この(4.4)式を満たす正定対称行列 P は存在しない。したがって文献7)による観測器は構成不可能である。つぎに文献8)による観測器を適用してみよう。

$$K_0 = \begin{bmatrix} k_{01} \\ k_{02} \end{bmatrix}, \quad K_1 = \begin{bmatrix} k_{11} \\ k_{12} \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

とおけば、定理1の条件(ii)はつぎのようになる。

$$\bar{A}_{122} - K_1 \bar{A}_{012} - K_0 \bar{A}_{112} = \begin{bmatrix} 1-k_{11} & -k_{11} \\ -k_{12} & -1-k_{12} \end{bmatrix} = 0 \quad (4.6)$$

したがって K_0, K_1 をどのように選んでも(4.6)式を満たすことができないので、文献8)による観測器も構成不可能である。ここで本論文の観測器を適用する。まず、 $\bar{A}_{112} = [0 \ 0]$ であるから K_1 に無関係に定理2の条件(ii)は成立する。また K_0, K_1 を(4.5)式のようにおけば定理2の条件(i), (ii)はつぎのようになる。

$$(i) \quad P \begin{bmatrix} -1-k_{01} & -k_{01} \\ -k_{02} & -1-k_{02} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1-k_{01} & -k_{02} \\ -k_{01} & -1-k_{02} \end{bmatrix} P = -Q \quad (4.7)$$

$$(ii) \quad P \begin{bmatrix} 1-k_{11} & -k_{11} \\ -k_{12} & -1-k_{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1-k_{11} & -k_{12} \\ -k_{11} & -1-k_{12} \end{bmatrix} P = 0 \quad (4.8)$$

この(4.7), (4.8)式を満たす K_0, K_1, P, Q の組は無数に存在する。たとえば、

$$K_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, K_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

と選べば (4.7), (4.8) 式を満たすので, つぎのシステムはシステム (4.3) の観測器の一つとなる.

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) = & \left\{ \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + u(t) \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\} z(t) \\ & + \left\{ \begin{bmatrix} a_{02} \\ a_{03} \end{bmatrix} + u(t) \begin{bmatrix} a_{12} - a_{01} \\ a_{13} + a_{01} \end{bmatrix} \right. \\ & \left. + u(t)^2 \begin{bmatrix} -a_{11} \\ a_{11} \end{bmatrix} \right\} y(t) + u(t) \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \dot{y}(t) \end{aligned} \quad (4.9)$$

[例 2]

$$P(S\bar{A}_{112} + \bar{A}_{122}) + (S\bar{A}_{112} + \bar{A}_{122})^T P = \begin{bmatrix} 2(p_{11}s_{11} + p_{12}s_{21}) & p_{11}s_{12} + p_{12}(s_{11} + s_{22}) + p_{22}s_{21} \\ p_{11}s_{12} + p_{12}(s_{11} + s_{22}) + p_{22}s_{21} & 2(p_{12}s_{12} + p_{22}s_{22}) \end{bmatrix} = 0$$

ゆえに (4.2) 式が成立するためには, 次式が満足されねばならない.

$$\begin{aligned} p_{11}s_{11} + p_{12}s_{21} &= 0 \\ p_{12}s_{12} + p_{22}s_{22} &= 0 \\ p_{11}s_{12} + p_{12}(s_{11} + s_{22}) + p_{22}s_{21} &= 0 \end{aligned} \quad (4.11)$$

この (4.11) 式を満たす S, P に対して

$$\begin{aligned} P(S\bar{A}_{012} + \bar{A}_{022}) + (S\bar{A}_{012} + \bar{A}_{022})^T P \\ = - (p_{12}s_{11} + p_{22}s_{21}) \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

となる. したがって, (4.2) 式を満たす S, P は存在するがそれらの S, P に対して (4.1) 式を満たす正定対称行列 Q は存在しない. ゆえに文献 7) による観測器は構成不可能である. つぎに文献 8) による観測器を適用する. まず定理 1 の条件 (iii) より

$$K_1 \bar{A}_{112} = K_1 = 0$$

となる. つぎに定理 1 の条件 (ii) より

$$\bar{A}_{122} - K_1 \bar{A}_{012} - K_0 \bar{A}_{112} = -K_0 = 0$$

となり $K_0 = K_1 = 0$ と決まる. このとき

$$\bar{A}_{022} - K_0 \bar{A}_{012} = \bar{A}_{022} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

となり安定行列ではない. したがって, 文献 8) による観測器も構成不可能である. ここで本論文の観測器を適用する.

$$K_0 = \begin{bmatrix} k_{011} & k_{012} \\ k_{021} & k_{022} \end{bmatrix}, K_1 = \begin{bmatrix} k_{111} & k_{112} \\ k_{121} & k_{122} \end{bmatrix}$$

とおけば, 定理 2 の条件 (i) ~ (iii) はつぎのようになる.

$$\begin{aligned} (i) \quad P \begin{bmatrix} 2k_{011} - k_{012} & k_{011} + k_{012} \\ 2k_{021} - k_{022} & k_{021} + k_{022} \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} 2k_{011} - k_{012} & 2k_{021} - k_{022} \\ k_{011} + k_{012} & k_{021} + k_{022} \end{bmatrix} P = -Q \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = & \begin{bmatrix} \bar{A}_{011} & \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\ \bar{A}_{021} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} x(t) + u(t) \begin{bmatrix} \bar{A}_{111} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \bar{A}_{121} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} x(t) \\ y(t) = & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) \end{aligned} \quad (4.10)$$

このシステムに対して, まず文献 7) による観測器を適用してみる.

$$S = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \quad (p_{11}, p_{22} > 0) \\ (p_{12}^2 < p_{11} p_{22})$$

とおけば, (4.2) 式はつぎのようになる.

$$\begin{aligned} (ii) \quad P \begin{bmatrix} 2k_{111} - k_{112} - k_{011} & k_{111} + k_{112} - k_{012} \\ 2k_{121} - k_{122} - k_{021} & k_{121} + k_{122} - k_{022} \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} 2k_{111} - k_{112} - k_{011} & 2k_{121} - k_{122} - k_{021} \\ k_{111} + k_{112} - k_{012} & k_{121} + k_{122} - k_{022} \end{bmatrix} P \\ = 0 \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$(iii) \quad P \begin{bmatrix} k_{111} & k_{112} \\ k_{121} & k_{122} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{111} & k_{121} \\ k_{112} & k_{122} \end{bmatrix} P = 0 \quad (4.14)$$

この (4.12) ~ (4.14) 式を満たす K_0, K_1, P, Q の組は無数に存在する. たとえば,

$$\begin{aligned} K_0 = & \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, K_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ Q = & \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

と選べば (4.12) ~ (4.14) 式を満たすので, つぎのシステムはシステム (4.10) の観測器の一つとなる.

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) = & \left\{ \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + u(t) \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} + u(t)^2 \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\} z(t) \\ & - \left\{ \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + u(t) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right\} \\ & \cdot \{ \bar{A}_{011} + u(t) \bar{A}_{111} \} y(t) + \{ \bar{A}_{021} + u(t) \bar{A}_{121} \} y(t) \\ & + \left\{ \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + u(t) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right\} \dot{y}(t) \end{aligned} \quad (4.15)$$

つぎの例 3 と例 4 は文献 6) で扱われたものである. しかし, 例 3 に対して与えられた観測器は $u(t) < 3, \forall t$ のときに大域的漸近安定になるのみであり, また例 4 には安定な観測器は与えられていない⁶⁾. 本論文の方法によって安定な観測器を構成する.

[例 3]

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = & \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x(t) + u(t) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = & \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) \end{aligned} \quad (4.16)$$

$\bar{A}_{112} = 0$ であるから定理 2 の条件 (iii) は常に満足され

ている。また、

$$\bar{A}_{022} - K_0 \bar{A}_{012} = -1 - 3K_0$$

$$\bar{A}_{122} - K_1 \bar{A}_{012} - K_0 \bar{A}_{112} = 1 - 3K_1$$

であるから、 $K_0 > -1/3$, $K_1 = 1/3$ と選べば定理2の条件(i)(ii)を満たす。ここで、 K_0 をパラメータとして観測器を構成するつぎのシステムとなる。

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) = & (-1 - 3K_0)z(t) \\ & - \left(K_0 - \frac{1}{3}u(t) \right) (u(t) + 2y(t) + u(t)y(t)) \\ & + \left(K_0 + \frac{1}{3}u(t) \right) \dot{y}(t) \end{aligned} \quad (4.17)$$

いま、 $e(t) = \bar{x}_2(t) - z(t)$ として誤差方程式をつくると

$$\dot{e}(t) = (-1 - 3K_0)e(t)$$

したがって、 $K_0 (> -1/3)$ の値を変えることにより、任意の速さで推定誤差を零に収束させることができる。

[例 4]

ボルテラモデルで宿主数 (H) だけが観測できるときに、寄生動物数 (P) を推定することを考える。すなわち、つぎのシステムに対する観測器を構成することである。

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{H}(t) \\ \dot{P}(t) \end{bmatrix} = & \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & -a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H(t) \\ P(t) \end{bmatrix} + H(t) \begin{bmatrix} 0 & -b_1 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H(t) \\ P(t) \end{bmatrix} \\ y(t) = & [1 \ 0] \begin{bmatrix} H(t) \\ P(t) \end{bmatrix} \quad a_1, a_2, b_1, b_2 > 0 \end{aligned} \quad (4.18)$$

$\bar{A}_{112} = -b_1 (< 0)$ であるから定理2の条件(iii)より $K_1 = 0$ と決まる。また、

$$\bar{A}_{022} - K_0 \bar{A}_{012} = -a_2 \quad (< 0)$$

$$\bar{A}_{122} - K_0 \bar{A}_{112} = b_2 + K_0 b_1$$

であるから、 $K_0 = -b_2/b_1$, $K_1 = 0$ とすれば定理2の条件(i)~(iii)を満たす P, Q が存在する。したがって観測器はつぎのように構成できる。

$$\dot{z}(t) = -a_2 z(t) + \frac{b_2}{b_1} (a_1 y(t) - \dot{y}(t)) \quad (4.19)$$

このとき観測器の収束速度は次式で評価される。

$$|P(t) - z(t)| \leq |P(0) - z(0)| \exp(-a_2 t) \quad (4.20)$$

また、このシステムは $K_1 = 0$ のとき観測器が存在するので、 $z^*(t) = z(t) - K_0 y(t)$ の変換により出力 $y(t)$ の1階微分の項を消去できる。定理3により出力の1階微分を含まない観測器はつぎようになる。

$$\dot{z}^*(t) = -a_2 z^*(t) + \frac{b_2}{b_1} (a_1 + a_2) y(t)$$

$$w^*(t) = z^*(t) - \frac{b_2}{b_1} y(t) \quad (4.21)$$

5. 結 言

本論文では、双線形システムの観測器の新しい構成法を報告した。すなわち、双線形システムの出力は常に1階微分可能であるという事実に注目して、入出力および出力の1階微分の情報を用いた観測器の構成法を考察した。観測誤差が入力に無関係に大域的漸近安定になるという視点により、これまでのものより広いクラスのシステムに対して簡単な構造の観測器が構成可能となった。またその事実をいくつかの例によって示した。

なお出力の微分値を用いなくてもよい観測器が構成できる条件も明確な形で与えた。定理2の条件のみしか満たしえないときには、観測器を構成するのに出力の微分情報が必要であり、またそれが得られる場合には本文で述べたように観測器は簡単な形で与えられる。出力の微分情報が許されない場合には本論文の構成法は適用できず、その場合には文献1)などを適用することになる。しかし、入力に依存する行列方程式をオンラインで解かなくてはならなくなり、現実にはそのような観測器は構成されえないと考えられる。

最後に日頃ご討論頂く中村嘉平教授に感謝します。

参 考 文 献

- 1) G. W. Johnson: A Deterministic Theory of Estimation and Control, IEEE Trans. on Automatic Control, **AC-14**, 380/384 (1969)
- 2) 古荘: 双線形系に対するオブザーバ, 第17回自動制御連合講演会前刷, 133/134 (1974)
- 3) 原, 古田: 双線形系の状態観測器, 計測自動制御学会論文集, **12-6**, 625/631 (1976)
- 4) S. Hara and K. Furuta: Minimal Order State Observers for Bilinear Systems, Int. J. on Control, **24**, 705/718 (1976)
- 5) 小林, 示村: 双線形システムのオブザーバに関する一考察, Mathematical Systems Theory シンポジウム資料, 35/40 (1976)
- 6) 林, 坂口, 宗像: Luenberger オブザーバの双線形系への拡張とその応用, 第6回制御理論シンポジウム資料 (1977)
- 7) Y. Funahashi: Stable State Estimator for Bilinear Systems, St. Louis Meeting of US-Japan Cooperative Research, Aug. (1977)
- 8) Y. Funahashi: A Class of State Observers for Bilinear Systems, International Journal of System Science, to appear