離散双線形システムの可到達性

稲垣 真人*・舟橋 康行*

Reachability of Discrete Bilinear Systems

Masato INAGAKI* and Yasuyuki FUNAHASHI*

This paper considers the reachability of discrete bilinear systems described by

$$x(t+1) = Ax(t) + Nx(t)u(t) + bu(t) \\ t=0, 1, 2, \dots,$$

where u is scalar control. This problem has a solution when the control is bounded or rank $[N, b]=1$.

In this paper there is no such limitation on the control. First, the properties of the set of states reachable in t steps from a nonzero initial state are investigated. Next, a sufficient condition for the existence of initial states, from which any state in R^n can be reached in n steps, is presented. As a result the control sequence that transfers the initial state to any desired state can be obtained in an explicit way.

1. はじめに

現代システム制御理論は、状態空間法に基づいて展開されており、重要な基礎概念の一つに、いわゆる“可制御性”の概念がある。この“可制御性”は正確には3種類に分けられる。すなわち、

(i) 原点にある状態を、任意の状態に移す有限長の入力が存在するかどうかという可到達性 (reachability),

(ii) 任意の状態を、原点に移す有限長の入力の存在に関する可制御性 (controllability),

(iii) 任意の状態を、任意の状態に移す有限長の入力が存在するかどうかという完全可制御性 (complete controllability),

などの概念である。定係数連続線形システムでは、これらの概念はすべて等価である¹⁾。しかし、定係数離散線形システムでは、可到達性と完全可制御性は等価であるが、可制御性とは等価でない。つまり、システムが可到達（または、完全可制御）なら可制御であ

るのに対し、逆は一般に成立しない²⁾。

ここで、双線形システムの“可制御性”に関する研究をふり返ってみる。連続双線形システムに対しては Rink と Mohler³⁾ が、システムの平衡点の性質の研究から、完全可制御の十分条件を与えている。実現問題を解く立場から、d'Alessandro ら⁴⁾は原点から到達可能な状態が生成する部分空間に関する条件を得ている。さらに、微分幾何学的手法を用いる立場から、数多くの研究が報告されている^{たとえば5)~7)}。

これに対して、離散双線形システムの“可制御性”の研究は数少ない。Isidori⁸⁾は、実現問題の立場から原点からの可到達性の条件を与えた。しかし、一般に可到達な状態の集合は線形空間とはならないので、彼の条件は、連続双線形システムに対する d'Alessandro らの条件と同様、可到達な状態が生成する部分空間に関するものにすぎない。また、制御の立場からの研究は、Tarn ら⁹⁾、Goka ら¹⁰⁾、山脇ら¹¹⁾によるものだけである。このうち、Tarn らは、入力の大きさが微小であるという制限のもとでの完全可制御の十分条件を与えている。そのため、つぎの離散双線形システム

$$x(t+1) = Ax(t) + u(t)Nx(t) + bu(t)$$

において、ある $l < +\infty$ に対して $\|A^l\|=1$ が成立するシステムに限られている。しかも、Heine-Borel の被覆定理を用いて軌道を接続するという定性的な議論をしているため、実際の入力系列は得られない。Goka らも、やはり完全可制御のための必要条件と十分条件を与えているが、考察しているシステムは、ある限られたクラスに属するものである。すなわち、上記の方程式において、 $\text{rank}[N, b]=1$ の制約条件を満たすシステムである。また、山脇らも、特別なクラスのシステムに限定して議論している。

本研究では、考察するシステムや、入力の大きさには上記のような制約をつけない時の可到達性を論じる。2節では、原点とは限らない初期状態から t 時間で到達可能な状態の集合の性質を調べる。3節では、システムの次元を n とする時、 n 時刻目で到達可能な

* 名古屋大学工学部 名古屋市千種区不老町

* Faculty of Engineering, Nagoya University, Nagoya
(Received August 22, 1977)

状態の集合が全空間となるような初期状態が存在するための条件を与える。その結果、任意の終端状態に移す入力系列を、明確な形で求めることができる。

2. 可到達性と可到達領域

以下では、1入力離散双線形システム BS を考える。

$$BS: x(t+1) = Ax(t) + u(t)Nx(t) + bu(t) \quad (2.1)$$

$$t=0, 1, 2, \dots$$

ここで、 $x(t) \in \mathbf{R}^n$, $u(t) \in \mathbf{R}$ で、 A, N, b はおのおの適当なサイズの実行列である。まず、可到達性の定義を与える。

【定義 2.1】 離散双線形システム BS において、初期状態 x_0 を、状態 x_f に移す有限長の入力系列 $\{u(t) | t=0, 1, \dots, L\}$ が存在する時、状態 x_f は x_0 から可到達であるという。

さて、以下の一連の記号を導入して(2.1)式を書きかえる。すなわち、

$$x_0 = x(0) \quad (2.2)$$

$$R_1(x_0) = Nx_0 + b$$

$$R_i(x_0) = [NA^{i-1}x_0 + b, AR_{i-1}(x_0), NR_{i-1}(x_0)] \quad (2.3)$$

$$U_1 = u(0), U_i = \begin{bmatrix} u(i-1) \\ U_{i-1} \\ u(i-1)U_{i-1} \end{bmatrix} \quad i=2, 3, \dots \quad (2.4)$$

とおくと、(2.1)式は

$$x(t) = A^t x_0 + R_t(x_0)U_t, \quad t=1, 2, \dots \quad (2.5)$$

と書くことができる。つぎに、 x_0 から t 時刻目で到達可能なすべての状態の集合とその次元を定義する。

【定義 2.2】 次式で与えられる集合を (x_0 からの) t 時刻可到達領域といい、 $K(t, x_0)$ で表わす。

$$K(t, x_0) = \{x(t) \in \mathbf{R}^n; x(t) = A^t x_0 + R_t(x_0)U_t, u(k) \in \mathbf{R}, 0 \leq k \leq t-1\} \quad (2.6)$$

【定義 2.3】 x_0 からの可到達領域 $K(t, x_0)$ の次元 $\dim K(t, x_0)$ とは、この集合が生成する線形多様体¹²⁾ $V(K)$ の次元を意味するものとする。すなわち、

$$\dim K(t, x_0) = \dim V(K) \quad (2.7)$$

ただし、

$$V(K) = \{x \in \mathbf{R}^n; x = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2, \alpha \in \mathbf{R}, x_1, x_2 \in K(t, x_0)\} \quad (2.8)$$

この時、 $K(t, x_0)$ の次元数はつぎの定理で決定される。

《定理 2.4》 ある固定された x_0 からの t 時刻可到達領域の次元数は、行列 $R_t(x_0)$ の階数に等しい。すなわち、

$$\dim K(t, x_0) = \text{rank } R_t(x_0) \quad (2.9)$$

(証明) t 時刻可到達領域 $K(t, x_0)$ が生成する線形多様体 $V(K)$ は、集合 $\{\bar{x} \in \mathbf{R}^n; \bar{x} = R_t(x_0)U_t, u(k) \in \mathbf{R}, 0 \leq k \leq t-1\}$ が生成する部分空間を $A^t x_0$ だけ平行移動したものである。したがって、定理の証明は、この部分空間の次元数が行列 $R_t(x_0)$ の階数に等しいことを示すことである。

今、ある x_0 を固定した時、行列 $R_t(x_0)$ の階数が q であったとする。そこで、行列 $R_t(x_0)$ から 1 次独立な列ベクトル $r_1, \dots, r_q$ と、それに対応する係数 $d_1, \dots, d_q$ を U_t から取り出し、つぎの 1 次結合を考える。

$$h = d_1 r_1 + d_2 r_2 + \dots + d_q r_q \quad (2.10)$$

この時、係数 $d_1, \dots, d_q$ はおのおの、 $\{u(0), u(1), \dots, u(t-1)\}$ の変数の 1 個、2 個の積、3 個の積、... で構成されている。また、この順序になっていると仮定して一般性を失わない。すなわち

$$d_i = u(k_1)u(k_2) \dots u(k_l), \quad 0 \leq k_1 < \dots < k_l \leq t-1, \quad i=1, 2, \dots, q \quad (2.11)$$

とおき、 d_i を定義する変数 $u(k)$ の個数を $|d_i|$ と書くことにすると、 $i < i'$ ならば $|d_i| \leq |d_{i'}|$ である。

さて、 $d_1, \dots, d_q$ はすべてが独立に値をとることは一般にできない。しかし、(2.10)式の形の q 本のベクトル $h_1, \dots, h_q$ が 1 次独立となるように $u(k)$, $k=0, \dots, t-1$ の値を選ぶことができれば、これら q 本のベクトルが生成する部分空間の次元数は q になる。すなわち、

$$h_j = d_{1j} r_1 + d_{2j} r_2 + \dots + d_{qj} r_q, \quad j=1, 2, \dots, q \quad (2.12)$$

とおけば

$$[h_1 \ h_2 \ \dots \ h_q] = [r_1 \ r_2 \ \dots \ r_q] \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1q} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{q1} & d_{q2} & \dots & d_{qq} \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

となるから、 $q \times q$ 行列 $D = [d_{ij}]$ が正則となるように $u(0), \dots, u(t-1)$ の値を選ぶことを示せばよい。ここで明らかに、 $d_{11} = \dots = d_{1q} = d_1$, $i=1, \dots, q$ である。 $d_j = u(k_1) \dots u(k_l)$ の時、 D の第 j 列 $[d_{1j}, \dots, d_{qj}]^T$ の各要素には

$$\begin{cases} u(k_1) = \dots = u(k_l) = 1 \\ \text{残りの } t-l \text{ 個の } u(k) = 0 \end{cases} \quad (2.14)$$

とおいた時の $d_1, \dots, d_q$ の値を上から順に代入する。この操作を j について $1 \sim q$ まで繰り返す。 $d_1, \dots, d_q$ の並び方から、各 $j=1, \dots, q$ について、 $i < i'$ ならば $|d_{i,j}| \leq |d_{i',j}|$ であるので、 $d_{i+1,j}, \dots, d_{q,j}$ を

定義する変数には, $u(k_1), \dots, u(k_l)$ 以外の $u(k)$ が必ず含まれる. したがって,

$$\begin{cases} d_{j,j}=1 \\ d_{j+1,j}=\dots=d_{q,j}=0 \end{cases} \quad j=1, 2, \dots, q \quad (2.15)$$

となる. すなわち, 行列 D は, 対角要素がすべて 1 の上三角行列となり, これは正則である. このようにして, ベクトル $h_1, \dots, h_q$ は互いに 1 次独立であるようにでき, これらのベクトルが生成する部分空間の次元数は q となる. (証明終)

(注意) 可到達性に関する Isidori らの結果^{4), 8)}によれば, n 次元双線形システムでは, 有限時間内での (原点からの) 可到達領域が生成する部分空間は, n 時刻までの可到達領域が生成する部分空間に一致することが示されている. これに対し, 定理 2.4 は, 各 t 時刻ごとにその可到達領域 $K(t, x_0)$ の次元が行列 $R_t(x_0)$ の階数に等しいことを主張するものである.

一般に, 行列 $R_t(x_0)$ の階数は x_0 の値に依存するが, ある x_0 に対して最大階数 $q \leq \min(n, 2^t - 1)$ をもつ時, そうならない x_0 の集合は代数多様体^{13), 14)}を形成する. したがって, $R_t(x_0)$ の性質として, つぎのように述べることができる.

[命題 2.5] t を固定した時, 行列 $R_t(x_0)$ の階数を最大にする $x_0 \in \mathbf{R}^n$ の集合は, $\mathbf{R}^n$ において開でかつ稠密である.

(注意) “開でかつ稠密”を“ほとんどすべて”と表現することもある¹⁴⁾.

この命題の系として, $R_t(x_0)$ の階数が n になるための一つの十分条件を与える.

[系 2.6] $n \leq 2^t - 1$ を満たす t に対して, $R_t(x_0)$ をつぎのように分解する.

$$R_t(x_0) = T_t(x_0) + P_t \quad (2.16)$$

ただし, $P_t = R_t(0)$.

この時, $\text{rank } P_t = n$ なら, ほとんどすべての x_0 に対して $\text{rank } R_t(x_0) = n$ である.

(証明) 命題 2.5 から明らかである. (証明終)

(注意) $\text{rank } P_t < n$ であっても, $\text{rank } R_t(x_0) = n$ がほとんどすべての x_0 について成り立つ場合がある. たとえば,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$x_0 = \begin{bmatrix} x_0^1 \\ x_0^2 \end{bmatrix}$$

という場合を考える. この時,

$$R_2(x_0) = T_2(x_0) + P_2$$

$$= \begin{bmatrix} x_0^2 & x_0^2 & x_0^1 \\ x_0^1 & x_0^1 & x_0^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

となり, $\text{rank } P_2 = 1 < 2$ であるが, $x_0^2 - x_0^1 \neq 0$ および $x_0^2 + x_0^1 + 2 \neq 0$ なら $\text{rank } R_2(x_0) = 2$ である.

3. n 時刻可到達領域 $K(n, x_0)$

線形システムと異なり, 双線形システムでは, $\text{rank } R_n(x_0) = n$ でも可到達領域 $K(n, x_0)$ は一般に全空間 $\mathbf{R}^n$ とはならず, 単に集合でしかない. これを例題で見てみよう.

[例 1] つぎのような双線形システムを考える.

$$\begin{aligned} x(t+1) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t)u(t) \\ &\quad + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ x_0 &= \begin{bmatrix} x_0^1 \\ x_0^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

このシステムに対して, 行列 $R_2(x_0)$ を計算すると,

$$R_2(x_0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_0^1 + 1 \\ 0 & x_0^1 + 1 & 0 \end{bmatrix}$$

となり, $x_0^1 \neq -1$ なら $\text{rank } R_2(x_0) = 2$ である. しかし, 可到達領域 $K(2, x_0)$ は, つぎのような集合に含まれる.

$$\begin{aligned} K(2, x_0) &\subset \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; y \neq -1\} \\ &\cup \{(0, -1) \in \mathbf{R}^2\}, \quad \forall x_0 \in \mathbf{R}^2 \end{aligned}$$

[例 2]

$$\begin{aligned} x(t+1) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)u(t) \\ &\quad + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ x_0 &= \begin{bmatrix} x_0^1 \\ x_0^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

という双線形システムにおいて, 行列 $R_2(x_0)$ は

$$R_2(x_0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ x_0^1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

である. したがって, x_0 がどのような値でも $\text{rank } R_2(x_0) = 2$ となる. しかし, 可到達領域 $K(2, x_0)$ は, つぎの集合である.

$$\begin{aligned} K(2, x_0) &= \left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2; y \leq \frac{1}{4}x^2 \right\}, \\ &\quad \forall x_0 \in \mathbf{R}^2 \end{aligned}$$

このように, n 次元双線形システムにおいては, n 時刻可到達領域 $K(n, x_0)$ は必ずしも全空間 $\mathbf{R}^n$ とはならない. 以下では, どのような場合に $K(n, x_0)$ が $\mathbf{R}^n$ と一致するかを考察する.

《定理 3.1》 $n \times (2^n - 1)$ 行列 $R_n(x_0)$ を, $n \times n$ 行列 $R_n^1(x_0)$ と $n \times (2^n - 1 - n)$ 行列 $R_n^2(x_0)$ とに分解する. すなわち,

$$R_n(x_0) = [\overbrace{R_n^1(x_0)}^n, \overbrace{R_n^2(x_0)}^{2n-1-n}] \quad (3.1)$$

この時、つぎの二つの条件

$$(i) \quad R_n^2(x_0) = 0 \quad (3.2)$$

$$(ii) \quad \text{rank } R_n^1(x_0) = n \quad (3.3)$$

を同時に満たす x_0 が存在するなら、双線形システム BS の n 時刻可到達領域 $K(n, x_0)$ は全空間 $\mathbf{R}^n$ と一致する。

(証明) (2.5)式から、 n 時刻の状態 $x(n)$ は

$$\begin{aligned} x(n) &= A^n x_0 + R_n(x_0) U_n \\ &= A^n x_0 + [R_n^1(x_0), R_n^2(x_0)] U_n \end{aligned} \quad (3.4)$$

である。 U_i の定義(2.4)から、 U_n の最初の n 成分は、 $u(n-1), \dots, u(1), u(0)$ である。したがって、(3.2)、(3.3)式を同時に満たす x_0 が存在する時、(3.4)式は

$$x(n) = A^n x_0 + R_n^1(x_0) U_n^1 \quad (3.5)$$

ただし、

$$U_n^1 = [u(n-1), \dots, u(0)] \quad (3.6)$$

となり、 $K(n, x_0)$ は $\mathbf{R}^n$ と一致する。(証明終)

(注意) $N=0$ の時、 x_0 の値に関係なく $R_n^2(x_0) = 0$ であり、 $R_n^1(x_0) = [b, Ab, \dots, A^{n-1}b]$ となる。すなわち、定理 3.1 は、線形システムの可到達性の条件となる。

つぎに、定理 3.1 の二つの条件を満たす x_0 が存在するための条件を求める。まず、条件(i)を考える。行列 $R_i(x_0)$ の定義(2.3)から、 $R_n^2(x_0)$ の各列ベクトルは、たとえば $A^{n-2}N^2x_0 + A^{n-2}Nb$ のように、 $H_j x_0 + h_j (j=1, \dots, 2^n-1-n)$ という形をしている。ここで、 H_j は $n \times n$ 行列を、 h_j は n 次元ベクトルを表わす記号である。これらの列ベクトルをつぎのように並べかえる。

$$\begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ \vdots \\ H_{2^n-1-n} \end{bmatrix} x_0 + \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_{2^n-1-n} \end{bmatrix}$$

このとき、明らかに

$$\begin{aligned} R_n^2(x_0) &= [H_1 x_0 + h_1, \dots, H_{2^n-1-n} x_0 + h_{2^n-1-n}] \\ &= 0 \end{aligned}$$

と、

$$\begin{bmatrix} H_1 \\ \vdots \\ H_{2^n-1-n} \end{bmatrix} x_0 + \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_{2^n-1-n} \end{bmatrix} = 0 \quad (3.7)$$

とは等価である。したがって、(3.2)式を満たす x_0 が存在するかどうかという問題は、(3.7)式を満たす x_0 が存在するかどうかという問題に帰着される。この問題に対しては、つぎの補題が成立する。

[補題 3.2] x_0 に関するつぎの方程式

$$\begin{bmatrix} H_1 \\ \vdots \\ H_{2^n-1-n} \end{bmatrix} x_0 + \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_{2^n-1-n} \end{bmatrix} = 0$$

を満足する $x_0 \in \mathbf{R}^n$ が存在するための必要十分条件は、

$$\text{rank} \begin{bmatrix} H_1 \\ \vdots \\ H_{2^n-1-n} \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} H_1 & h_1 \\ \vdots & \vdots \\ H_{2^n-1-n} & h_{2^n-1-n} \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

である。さらに、このとき、 x_0 はつぎのように表現できる。

$$x_0 = -H^+ h + (I_n - H^+ H) z \quad (3.9)$$

ただし、

$$H = \begin{bmatrix} H_1 \\ \vdots \\ H_{2^n-1-n} \end{bmatrix}, \quad h = \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_{2^n-1-n} \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

で、 H^+ は H の擬似逆行行列であり、 z は任意の n 次元ベクトルである。

この補題は、連立1次方程式に関するよく知られた結果¹⁵⁾から直ちに証明できる。

今、 $R_n^2(x_0) = 0$ が解をもつ時、その解は(3.9)式のように表わせた。したがって、この x_0 を $R_n^1(x_0)$ に代入した時、その階数が n となるような n 次元ベクトル z が存在すれば、その x_0 からの n 時刻可到達領域 $K(n, x_0)$ は全空間 $\mathbf{R}^n$ と一致する。以上をまとめると、つぎの定理を得る。

《定理 3.3》 n 次元双線形システム BS において、

$$(i) \quad \text{rank } H = \text{rank} [H, h] \quad (3.11)$$

かつ

$$(ii) \quad \text{rank } R_n^1(-H^+ h + (I_n - H^+ H) z) = n \quad (3.12)$$

となる n 次元ベクトルが存在する時、(3.9)式を満たす x_0 に対して n 時刻可到達領域 $K(n, x_0)$ は全空間 $\mathbf{R}^n$ と一致する。ここで、 H と h は、(3.10)式で定義した行列で、 H^+ は H の擬似逆行行列である。

$R_n^2(x_0) = 0$ の解(3.9)の集合は、

$$-H^+ h + \text{Null } H \quad (3.13)$$

とも表わせる。この集合は、線形多様体であり、 V_L と書こう。また、命題 2.5 から、 $\text{rank } R_n^1(x_0) = n$ となる x_0 が存在すれば、そのような x_0 の集合は、 $\mathbf{R}^n$ の中で開でかつ稠密である。逆にいえば、 $R_n^1(x_0)$ の階数を n としない x_0 の集合は、代数多様体 V_A を形成する。この時、定理 3.3 の二つの条件を幾何学的に表現すると、つぎの系のように述べることができる。

[系 3.4] n 次元双線形システム BS において、つぎの式で定義される集合が空集合でないとする。

$$X_0 = V_L - (V_L \cap V_A) \quad (3.14)$$

この時、 X_0 に属する点 x_0 を初期状態とする n 時刻可到達領域 $K(n, x_0)$ は、全空間 $\mathbf{R}^n$ と一致する。ここで、 V_A は、 $R_n^1(x_0)$ の階数を n としない代数多様体を表わす。

(証明) 定理 3.3 の条件 (i) が成立することと、 V_L が空集合でないことは等価である。さらに、 V_A は $R_n^1(x_0)$ の階数を n にしない x_0 の集合である。したがって、(3.14) 式で定義される集合 X_0 が空でないなら、 X_0 の要素を初期状態とする $K(n, x_0)$ は $\mathbf{R}^n$ と一致する。 (証明終)

また、初期状態 x_0 が集合 X_0 に属する時、任意の終端状態へ移す入力系列は、つぎのようにして得られる。

[系 3.5] 定理 3.3 の条件が満たされるとする。この時、(3.14) 式で定義される集合 X_0 に属す初期状態 x_0 を、任意の終端状態 x_f へ移す入力系列は、次式で一意的に求まる。

$$\begin{bmatrix} u(n-1) \\ u(n-2) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix} = [R_n^1(x_0)]^{-1} [x_f - A^n x_0], \quad x_0 \in X_0 \quad (3.15)$$

(証明) 定理 3.3 の条件 (3.11), (3.12) が満たされる時、 $x_0 \in X_0$ に対しては、 $R_n^2(x_0) = 0$ かつ $\text{rank } R_n^1(x_0) = n$ である。したがって、(3.5), (3.6) 式において、 $x(n) = x_f$ とおけば入力系列が求まる。

(証明終)

4. 例 題

次式で表わされる 1 入力離散双線形システムを考える。

$$\begin{aligned} x(t+1) &= \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x(t) u(t) \\ &\quad + \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} u(t) \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$x_0 = \begin{bmatrix} x_0^1 \\ x_0^2 \end{bmatrix}$$

このシステムでは、行列 H, h はおのこの

$$H = N^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad h = Nb = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

であるから、定理 3.3 の条件 (i) が成立する。したがって $R_2^2(x_0) = 0$ とする x_0 が存在する。実際、 $z = [z^1, z^2]^T$ を任意のベクトルとすれば

$$x_0 = [-2, z^2]^T \quad (4.3)$$

で与えられる。

つぎに、条件 (ii), (3.12) 式を調べる。(4.3) 式で

記述される x_0 を $R_2^1(x_0)$ に代入すると、

$$\begin{aligned} R_2^1(x_0) &= [NAx_0 + b, ANx_0 + Ab] \\ &= \begin{bmatrix} 2z^2 - 2 & 2 \\ 3 - 2z^2 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.4)$$

となる。この時、 $\text{rank } R_2^1(x_0) = 2$ となる 2 次元ベクトルは存在する。実際、 $z^2 \neq 4/3$ を満たす z なら良い。このように、このシステムでは、2 時刻可到達領域 $K(2, x_0)$ が 2 次元平面 $\mathbf{R}^2$ と一致するような x_0 が存在する。このような x_0 の集合を具体的に表わすと、つぎのようになる。

$$X_0 = \left\{ [-2, x_0^2]^T \in \mathbf{R}^2; x_0^2 \in \mathbf{R}, x_0^2 \neq \frac{4}{3} \right\} \quad (4.5)$$

つぎに、集合 X_0 上の点を、原点に移す入力系列を求める。たとえば、 $x_0 = [-2, 1]^T$, $x_f = [0, 0]^T$ とする。(3.15) 式から、求める入力系列は

$$\{u(0), u(1)\} = \{1; -2\} \quad (4.6)$$

である。

5. おわりに

本稿では、1 入力離散双線形システムの可到達性を考察した。まず、 t 時刻可到達領域 $K(t, x_0)$ の次元が、入力の係数行列 $R_t(x_0)$ の階数に等しいことを証明し、つぎに、行列 $R_t(x_0)$ の階数を最大にする x_0 は、 $\mathbf{R}^n$ において開でかつ稠密な集合上にあることを示した。また、線形システムとは異なり、可到達領域 $K(t, x_0)$ は、一般に線形空間にならない。しかし、初期状態 x_0 を限定すれば、 n 時刻可到達領域 $K(n, x_0)$ が、全空間 $\mathbf{R}^n$ と一致することを示した。さらに、そのような x_0 が存在するための条件を与えた。その結果、任意の終端状態に移す入力系列を明確な形で表わすことができた。

最後に、日頃ご討論頂く中村嘉平教授に感謝します。

参 考 文 献

- 1) R. E. Kalman, P. L. Falb and M. A. Arbib: Topics in Mathematical System Theory, McGraw-Hill. (1969)
- 2) 西村, 長田: 線形離散システムの制御および観測について, システムと制御, **18-8**, 483/489 (1974)
- 3) R. E. Rink and R. R. Mohler: Completely Controllable Bilinear Systems, SIAM J. Control, **6-3**, 477/486 (1968)
- 4) P. d'Alessandro, A. Isidori and A. Ruberti: Realization and Structure Theory of Bilinear Dynamical Systems, SIAM J. Control, **12-2**, 517/535 (1974)
- 5) R. W. Brockett: System Theory on Group Manifolds and Coset Spaces, SIAM J. Control, **10-2**, 265/284 (1972)
- 6) H. J. Sussmann and V. Jurdjevic: Controllability

- of Nonlinear Systems, J. Differential Equations, **12**, 95/116 (1972)
- 7) A. J. Krener: A Generalization of Chow's Theorem and Bang-Bang Theorem to Nonlinear Control Problems, SIAM J. Control, **12**-1, 43/51 (1974)
- 8) A. Isidori: Direct Construction of Minimal Bilinear Realization from Nonlinear Input-Output Maps, IEEE Trans. on Automatic Control, **AC-18**-6, 626/631 (1973)
- 9) T. J. Tarn, D. L. Elliott and T. Goka: Controllability of Discrete Bilinear Systems with Bounded Control, IEEE Trans. on Automatic Control, **AC-18**-3, 298/301 (1973)
- 10) T. Goka, T. J. Tarn and J. Zaborsky: On the Controllability of a Class of Discrete Bilinear Systems, Automatica, **9**, 615/622 (1973)
- 11) 山脇, 馬場: 双線形離散システムの可制御, 第15回 SICE 学術講演会予稿集, 513/514 (1976)
- 12) D. G. Luenberger: Optimization by Vector Space Methods, John-Wiley & Sons (1969)
- 13) W. M. Wonham: Linear Multivariable Control; a Geometric Approach, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, 101 (1974)
- 14) M. W. Hirsch and S. Smale: Differential Equations Dynamical Systems and Linear Algebra, Academic Press (1974)
- 15) 児玉, 須田: 制御工学者のためのマトリクス理論(26), システムと制御, **17**-10, 621/629 (1973)
-