有色雑音を含む2階線形システムの モーメント安定†

杉 本 末 雄*・伊 東 一 文*・杉 山 博*

On the Moment Stability of the Second Order Linear Systems
with Colored Noise Coefficients

Sueo SUGIMOTO*, Kazufumi Iro* and Hiroshi SUGIYAMA*

The second order moment stability problems for second order linear stochastic systems with colored noise coefficients are studied. Namely, the proposed system equations are $\ddot{y}_0 + 2\zeta\nu_0\dot{y}_0 + [\nu_0^2 + \varepsilon x(t)]y_0 = 0$ and $\ddot{y}_0 + [2\zeta\nu_0 + \varepsilon x(t)]\dot{y}_0 + \nu_0^2 y_0 = 0$, where $x(t)$ are the solution processes through the n -th order shaping filter with Gaussian white noise inputs.

After the joint Markov models are constructed by Ito's stochastic differential equations with coupling the coefficients processes as state variables, the exact second order moment equations regarding with $y_0(t)$ -processes are derived in iteration formulas by applying the Ito's differential rule.

Finally, under small ε assumption for the coefficients processes, the approximate necessary and sufficient conditions up to the order of ε^3 are obtained via perturbation approach. It is shown that the conditions can be expressed by the power spectrum density functions of the $x(t)$ -processes and only two spectrum point of $x(t)$, 0 and $2\nu_0\sqrt{1-\zeta^2}$ are related to the obtained stability conditions.

1. 緒 言

係数に確率過程を含む微分方程式で記述される線形システムの安定問題^{1),2)}を考察する。確率過程が正規性白色雑音（あるいは十分広いスペクトル帯域をもつ正規過程）の場合は、伊藤形の確率微分方程式（あるいは、Wong-Zakai³⁾の補正項を考慮し、等価な伊藤形の確率微分方程式）により数学モデルを構成し、2次モーメントの安定、および、ほとんどすべての見本過程の安定（以後、概安定と略称する）のための必要十

分条件の導出については多くの研究がみられる⁴⁾⁻⁶⁾。

しかし実在する力学的システムに印加する雑音過程は有色性を帯びていることに注目すれば、有色雑音を含むシステムの安定性の問題を考察することは重要である。この方面での研究では、係数の確率過程を、定常、エルゴード性の仮定のもとで、概安定のための十分条件を導出したもの^{7),8)}、また、システムの構造を限定したうえで、Lie-代数を適用して、モーメントの意味での安定問題を考察したもの^{9),10)}などがある。

本研究では、つぎの基本的な2階線形システムの2次モーメントの安定問題を考察する。すなわち、対象とするシステムは、つぎの2階常微分方程式で記述されているとする。

$$\ddot{y}_0(t) + 2\zeta\nu_0\dot{y}_0(t) + [\nu_0^2 + \varepsilon_0 x(t)]y_0(t) = 0 \quad (1.1)$$

および、

$$\ddot{y}_0(t) + [2\zeta\nu_0 + \varepsilon_0 x(t)]\dot{y}_0(t) + \nu_0^2 y_0(t) = 0 \quad (1.2)$$

ここに、 $|\zeta| < 1$ とし、また $x(t)$ は正規性有色雑音過程であり、正規性白色雑音を入力とする n 次の線形フィルタ (Shaping Filter) の解過程とする。

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} x^{(1)} + a_n x = \sigma \dot{B}(t) \quad (1.3)$$

ここに、 $\dot{B}(t)$ は、単位分散強度をもつ正規性白色雑音であり、平均値 0、相関関数 $\phi_B(\tau) = \delta(\tau)$ ；ディラックのデルタ関数、である。本研究では、(1.1)、(1.2)式に対する2次モーメントの漸化式を導出する。また、この漸化式に対して ε_0 が微小であると仮定した場合に、摂動法を適用することにより2次モーメントの固有値を求め、近似的な意味での2次モーメントの安定条件を導出する。

(1.1)、(1.2)式に対して、 $x(t)$ を正規性白色雑音とした場合の概安定^{11),12)}、2次モーメントの安定^{4),5)}のための必要十分条件は、すでに求められている。また(1.1)式に対して、 $x(t)$ を定常確率過程の仮定のもと

† 第19回自動制御連合講演会で発表 (昭51・11)

* 大阪大学工学部 吹田市大字山田上

* Faculty of Engineering, Osaka University, Suita
(Received January 19, 1978)

で ε_0 を微小とした場合のモーメントの意味での安定問題が考察され、近似的な条件が導出されている^{(13)~(15)}。Wedig⁽¹⁶⁾は(1.1)式に対して、有色雑音 $x(t)$ が 1 階 (Low Pass Filter) および、2 階 (Band Pass Filter) の線形フィルタの解過程の場合 (すなわち、(1.3)式で $n=1, 2$ の場合) の 2 次モーメントの安定問題を考察している。

2. マルコフモデルへの展開

(1.1), (1.3)式を考察する。(1.2)式は、(1.1)式の場合とほとんど同様にして議論を進めることが可能であり、大略を 5 節に示す。

(1.1)式に対して、

$$\hat{y}(t) \triangleq e^{c_0 t} y_0(t) \quad (2.1)$$

なる確率過程 $\hat{y}(t)$ を定義すれば、1 階導関数の係数は消去でき、

$$\ddot{\hat{y}}(t) + [\nu^2 + \varepsilon_0 x(t)] \hat{y}(t) = 0 \quad (2.2a)$$

ここに、

$$\nu \triangleq \nu_0 \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (2.2b)$$

また、(1.3)式の固有多項式の解を $\{\omega_i, i=1, \dots, n\}$ とし $\omega_i \neq \omega_j, i \neq j$ かつ実数部 $\text{Re}\{\omega_i\} < 0$ と仮定する。この時(1.3)式は安定な線形フィルタとなり、 $x(t)$ 過程は、十分時間が経過すれば、周知のようにつぎのパワースペクトル密度をもつ。

$$S_x(\omega) = \sigma^2 \left| \frac{1}{\prod_{j=1}^n i\omega - \omega_j} \right|^2 = \sigma^2 \left| \frac{1}{\sum_{j=0}^n a_j(i\omega)^{n-j}} \right|^2 \quad (2.3)$$

$a_0 \triangleq 1$

ここで、(2.1), (1.3)式に対して、相似変換を行う。(2.1)式に対して、

$$\begin{aligned} \hat{y}(t) &\triangleq y_1(t) + y_2(t) \\ \dot{\hat{y}}(t) &\triangleq i\nu(y_1 - y_2) \end{aligned} \quad (2.4)$$

とすれば、

$$\dot{y}_1 = i\nu \left[y_1 + \frac{\varepsilon}{2} x(t)(y_1 + y_2) \right] \quad (2.5a)$$

$$\dot{y}_2 = -i\nu \left[y_2 + \frac{\varepsilon}{2} x(t)(y_1 + y_2) \right]$$

$$\varepsilon \triangleq \varepsilon_0 / \nu^2 \quad (2.5b)$$

を得る。また(1.3)式のコンパニオン行列 A に対角化を行う。すなわち、

$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \omega_1 & & 0 \\ & \omega_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \omega_n \end{bmatrix},$$

$$A \triangleq \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & & -a_1 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

ここに、 T は Vandermonde 行列であり、

$$T \triangleq \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \omega_1 & \omega_2 & \dots & \omega_n \\ \omega_1^2 & \omega_2^2 & \dots & \omega_n^2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \omega_1^{n-1} & \omega_2^{n-1} & \dots & \omega_n^{n-1} \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

で与えられる。したがって(1.3)式は、

$$\begin{aligned} \dot{z} &= T^{-1}ATz + T^{-1}e_n \dot{B}, \quad e_n = [00 \dots 01]^T \\ x &= \sum_{k=1}^n z_k \end{aligned} \quad (2.8)$$

と等価となる。ここで(1.1)式の 2 次モーメントの安定問題は、(2.1), (2.4)式に留意し、(2.5), (2.8)式を考察すればよい。(2.8)式は白色雑音を含むことから、安定問題は、つぎの伊藤形の確率微分方程式の解の 2 次モーメントの挙動を調べることに帰着する。

$$\begin{aligned} dy_1 &= i\nu \left[y_1 + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{j=1}^n z_j (y_1 + y_2) \right] dt \\ dy_2 &= -i\nu \left[y_2 + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{j=1}^n z_j (y_1 + y_2) \right] dt \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$dz_j = \omega_j z_j dt + \left(\frac{\Delta n_j}{\Delta \tau} \right) dB(t), \quad j=1, \dots, n$$

ここに $\Delta n_j, \Delta \tau$ はおのおの(2.7)式、Vandermonde 行列 T の (n, j) 要素の余因子行列式、および行列式である。また、(2.9)式は非線形システムを構成していることがわかる。

3. 2 次モーメントの漸化式

(2.9)式の解過程は、 $(y_1, y_2, z_1, \dots, z_n)$ と結合してマルコフ過程であり、 $y_1(t), y_2(t)$ 過程に関しては 2 次モーメントとなっている、つぎのモーメントを定義する。

$$m_{k_1, k_2, \dots, k_n} \triangleq \begin{bmatrix} E(y_1^{k_1} z_1^{k_1} \dots z_n^{k_n}) \\ E(y_1 y_2 z_1^{k_1} \dots z_n^{k_n}) \\ E(y_2^2 z_1^{k_1} \dots z_n^{k_n}) \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

$k_j, j=1, \dots, n$ は非負の整数、 $E(\cdot)$ は $(\cdot)$ の期待値を示す。ここで、(2.9)式へ伊藤の連鎖則⁽¹⁷⁾を適用すれば、非負の整数、 $l, m(l+m \leq 2)$ に対して、

$$\begin{aligned} d(y_1^l y_2^m z_1^{k_1} \dots z_n^{k_n}) &= \mathcal{L}[y_1^l y_2^m z_1^{k_1} \dots z_n^{k_n}] dt \\ &+ \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial z_j} (y_1^l y_2^m z_1^{k_1} \dots z_n^{k_n}) \frac{\Delta n_j}{\Delta \tau} dB(t) \end{aligned} \quad (3.2)$$

ここに $\mathcal{L}$ は微分生成作用素⁽¹⁷⁾である。上式両辺に期待値演算を施し、 $E[dB(t)] = 0$ であることから、簡単

な計算の結果、つぎの漸化式を得る。非負(注1)の整数 $\{k_i, i=1, \dots, n\}$ に対して、

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\nu} \dot{m}_{k_1, \dots, k_n} \\ &= A_{k_1, \dots, k_n} m_{k_1, \dots, k_n} + \varepsilon R \sum_{j=1}^n m_{k_1, \dots, k_j+1, \dots, k_n} \\ &+ \frac{1}{4\nu \Delta T^2} \left[\sum_{j=1}^n k_j(k_j-1) \Delta_{nj}^2 m_{k_1, \dots, k_j-2, \dots, k_n} \right. \\ &+ \left. \sum_{j>l} 2k_j k_l \Delta_{nj} \Delta_{nl} m_{k_1, \dots, k_j-1, \dots, k_l-1, \dots, k_n} \right] \end{aligned} \quad (3.3a)$$

ここにマトリクス $A_{k_1, \dots, k_n}$ および R は、

$$A_{k_1, \dots, k_n} \triangleq \begin{bmatrix} i + \eta_{k_1, \dots, k_n} & 0 & 0 \\ 0 & \eta_{k_1, \dots, k_n} & 0 \\ 0 & 0 & -i + \eta_{k_1, \dots, k_n} \end{bmatrix} \quad (3.3b)$$

$$\eta_{k_1, \dots, k_n} \triangleq \sum_{j=1}^n k_j \frac{\omega_j}{2\nu} \triangleq \sum_{j=1}^n k_j \eta_j \quad (3.3c)$$

$$R \triangleq \frac{i}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad (3.3d)$$

とする。上式(3.3)は、線形逐次微分方程式(無限次元の同次線形微分方程式)であるので、つぎの一般的な解を仮定する。

$$m_{k_1, \dots, k_n} \triangleq c_{k_1, \dots, k_n} \exp(2\nu \lambda t) \quad (3.4)$$

上式(3.4)を(3.3)式に代入すれば、

$$\begin{aligned} & (A_{k_1, \dots, k_n} - \lambda I) c_{k_1, \dots, k_n} \\ &+ \varepsilon R \sum_{j=1}^n c_{k_1, \dots, k_j-1, \dots, k_n} \\ &+ \frac{\sigma^2}{4\nu \Delta T^2} \left[\sum_{j=1}^n k_j(k_j-1) \Delta_{nj}^2 c_{k_1, \dots, k_j-2, \dots, k_n} \right. \\ &+ \left. \sum_{j>l} 2k_j k_l \Delta_{nj} \Delta_{nl} c_{k_1, \dots, k_j-1, \dots, k_l-1, \dots, k_n} \right] = 0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

が成立する。上式は、無限次元の同次連立方程式によって表現できる。たとえば、簡単に $n=1$ の場合は、

$$\begin{bmatrix} A_2 - \lambda I & \varepsilon R & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & A_1 - \lambda I & \varepsilon R & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

この時、固有値 λ は左辺の行列式を零とおくことにより、無限次元の代数方程式の解であることを示してい

る。したがって、厳密な解を求めることは不可能である。近似解を求めるために、 ε が十分小として、次節では摂動法を適用し、近似的に固有値 λ を評価し、2次モーメントの安定のための条件を算出する。

4. 摂動法の適用

(3.5)式の近似解 λ を求めるために、 λ および、 $c_{k_1, \dots, k_n}$ が ε について正則、すなわち、つぎのベキ級数展開が可能と仮定する(注2)。

$$\lambda \triangleq \lambda^{(0)} + \varepsilon \lambda^{(1)} + \varepsilon^2 \lambda^{(2)} + \dots + \varepsilon^r \lambda^{(r)} + \dots \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} c_{k_1, \dots, k_n} &\triangleq c^{(0)}_{k_1, \dots, k_n} + \varepsilon c^{(1)}_{k_1, \dots, k_n} + \dots \\ &+ \varepsilon^r c^{(r)}_{k_1, \dots, k_n} + \dots \end{aligned}$$

この時、(4.1)式を(3.5)式に代入し、 ε のおのおののベキ数について整理すると、次式が成立する。

$$\begin{aligned} \varepsilon^r: & [\lambda^{(0)} I - A_{k_1, \dots, k_n}] c^{(r)}_{k_1, \dots, k_n} \\ &+ \sum_{j=0}^{r-1} \lambda^{(r-j)} c^{(j)}_{k_1, \dots, k_n} \\ &= R \sum_{j=1}^n c^{(r-1)}_{k_1, \dots, k_j+1, \dots, k_n} \\ &+ \frac{\sigma^2}{4\nu \Delta T^2} \left[\sum_{j=1}^n k_j(k_j-1) \Delta_{nj}^2 c^{(r)}_{k_1, \dots, k_j-2, \dots, k_n} \right. \\ &+ \left. \sum_{l<m} 2k_l k_m \Delta_{nl} \Delta_{nm} c^{(r)}_{k_1, \dots, k_l-1, \dots, k_m-1, \dots, k_n} \right] \end{aligned} \quad (4.2)$$

ここで、われわれの目的は、 $y(t)$ 過程の2次モーメントの挙動を調べることにある。(3.1)式に注目すれば、 $k_1=k_2=\dots=k_n=0$ の時の固有値 λ 、すなわち $m_0, \dots, 0$ の挙動を調べることにある。(4.2)式より、以下、逐次 $\lambda^{(r)}$ を求める。

特に $\varepsilon=0$ の時、(3.5)式あるいは(4.2)式より、 $\lambda^{(0)}$ はつぎの三つの固有値をもつ。

$$[\text{I}] \quad \lambda^{(0)} = \eta_0, \dots, 0 = 0$$

$$[\text{II}] \quad \lambda^{(0)} = \eta_0, \dots, 0 + i = i$$

$$[\text{III}] \quad \lambda^{(0)} = \eta_0, \dots, 0 - i = -i$$

[I]~[III] の場合について、(4.2)式より逐次 $\lambda^{(r)}$ 、 $r=1, 2, \dots$ を算出する。

ここで、以下の議論のため、記号の簡単化を行う。 $A_{k_1, \dots, k_n}$ 、 $C_{k_1, \dots, k_n}$ に対して、

$$A_j: 1 \triangleq A_{0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0} \quad (k_j=1 \text{ 他の添字は } 0)$$

$$A_j: 1, l: 1 \triangleq A_{0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0} \quad \begin{matrix} (j) \\ (l) \end{matrix}$$

(注2) このようなベキ級数展開の可能性および収束性に関する議論は $n=1$ の場合は行われており、ベキ級数の収束のための十分条件も導出されている¹⁹⁾。しかし一般の場合 ($n \geq 2$) は同様な議論は困難である。したがってここではあくまで十分小なる ε に対して展開が許されると仮定する。

(注1) m の添字 k_j が一つでも負の場合は、 $m_{k_1, \dots, k_j, \dots, k_n} = 0$ と定義する

($k_j=1, k_l=1$, 他の添字は0)

$A_{j:2}$ も同様に $k_j=2$, 他の添字は0, $c_{k_1, \dots, k_n}$ についても同様とする。

[I] $\lambda^{(0)}=0$ の場合

(4.2)式において, $r=0$ の場合

i) $k_1=k_2=\dots=k_n=0$ の時

$$(\lambda^{(0)}I - A_{0, \dots, 0})c^{(0)}_{0, \dots, 0}=0 \quad (4.3)$$

が成立することにより,

$$c^{(0)}_{0, \dots, 0} = \begin{bmatrix} 0 \\ a_1 \\ 0 \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

ここに, a_1 はシステムの初期条件により定まる定数であり, 一般性を失わず1とする。

ii) $k_j=1, k_i=0, i \neq j$

$$(\lambda^{(0)}I - A_{j:1})c^{(0)}_{j:1}=0, \quad j=1, \dots, n \quad (4.5)$$

が成立し,

$$c^{(0)}_{j:1}=0, \quad j=1, \dots, n \quad (4.6)$$

iii) $k_j=2, k_i=0, i \neq j$

$$(\lambda^{(0)}I - A_{j:2})c^{(0)}_{j:2} = \frac{\sigma^2 \Delta_{nj}^2}{2\nu \Delta^2 T} c^{(0)}_{0, \dots, 0} \quad (4.7)$$

および, $l \neq m$ に対して,

$$\begin{aligned} (\lambda^{(0)}I - A_{l:1, m:1})c^{(0)}_{l:1, m:1} \\ = \frac{\sigma^2 \Delta_{nl} \Delta_{nm}}{2\nu \Delta^2 T} c^{(0)}_{0, \dots, 0} \end{aligned} \quad (4.8)$$

が成立し, (4.4)式より,

$$c^{(0)}_{j:2} = \frac{\sigma^2 \Delta_{nj}^2}{2\nu \Delta^2 T} \frac{1}{2\eta_j} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.9a)$$

$$c^{(0)}_{l:1, m:1} = \frac{\sigma^2 \Delta_{nl} \Delta_{nm}}{2\nu \Delta^2 T} \cdot \frac{1}{\eta_l + \eta_m} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.9b)$$

iv) $k_j, k_l, k_m=1, j \neq l \neq m; k_i=0, i \neq j, l, m$

$$\begin{aligned} (\lambda^{(0)}I - A_{j:1, l:1, m:1})c^{(0)}_{j:1, l:1, m:1} \\ = \frac{\sigma^2}{4\nu \Delta^2 T} 2(\Delta_{nm} \Delta_{nl} c^{(0)}_{j:1} + \Delta_{nj} \Delta_{nm} c^{(0)}_{l:1} \\ + \Delta_{nj} \Delta_{nl} c^{(0)}_{m:1}) \end{aligned} \quad (4.10)$$

(4.6)式より, 上式右辺は0となり,

$$c^{(0)}_{j:1, l:1, m:1}=0 \quad (4.11)$$

ここで, $r=1$ の場合を考察する。

v) $k_i=0, i=1, \dots, n$ に対して,

$$\begin{aligned} (\lambda^{(0)}I - A_{0, \dots, 0})c^{(1)}_{0, \dots, 0} + \lambda^{(1)}c^{(0)}_{0, \dots, 0} \\ = R \sum_{j=1}^n c^{(0)}_{j:1} \end{aligned} \quad (4.12)$$

(4.4), (4.6)式と, 上式両辺のベクトル第2成分を比較することにより,

$$\lambda^{(1)}=0 \quad (4.13)$$

を得る。したがって

$$(\lambda^{(0)}I - A_{l:1})c^{(1)}_{l:1}=R \left(\sum_{j=1}^n c^{(0)}_{l:1, j:1} \right) \quad (4.14)$$

が成立し, (4.9)式より,

$$\begin{aligned} c^{(1)}_{l:1} &= -A^{-1}_{l:1} R \left(\sum_{j=1}^n c^{(0)}_{l:1, j:1} \right) \\ &= \frac{i}{2} \begin{bmatrix} \frac{1}{i+\eta_l} \\ 0 \\ \frac{1}{i-\eta_l} \end{bmatrix} \sum_{j=1}^n \frac{\sigma^2 \Delta_{nl} \Delta_{nj}}{2\nu \Delta^2 T} \frac{1}{\eta_l + \eta_j} \quad (4.15) \\ & \quad l=1, \dots, n \end{aligned}$$

vi)

$$\begin{aligned} (\lambda^{(0)}I - A_{j:1, l:1})c^{(1)}_{j:1, l:1} + \lambda^{(1)}c^{(0)}_{j:1, l:1} \\ = R \left(\sum_{m=1}^n c^{(0)}_{j:1, m:1, k:1} \right) \end{aligned} \quad (4.16)$$

が成立し, (4.11), (4.13)式より

$$c^{(1)}_{j:1, l:1}=0, \quad j, l=1, \dots, n \quad (4.17)$$

また, $r=2$ の場合を考察すれば,

vii)

$$\begin{aligned} (\lambda^{(0)}I - A_{0, \dots, 0})c^{(2)}_{0, \dots, 0} + \lambda^{(2)}c^{(0)}_{0, \dots, 0} \\ + \lambda^{(1)}c^{(1)}_{0, \dots, 0} = R \left(\sum_{l=1}^n c^{(1)}_{l:1} \right) \end{aligned} \quad (4.18)$$

が成立し, (4.4), (4.6), (4.13), (4.15)式より, 上式両辺ベクトル第2成分を比較することにより,

$$\lambda^{(2)} = R \left(\sum_{j=1}^n c^{(1)}_{j:2} \right) \text{第2成分}$$

したがって

$$\lambda^{(2)} = \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n \frac{1}{8} \left[\frac{1}{\eta_l + i} + \frac{1}{\eta_l - i} \right] \frac{\sigma^2 \Delta_{nl} \Delta_{nj}}{2\nu \Delta^2 T} \frac{1}{\eta_l + \eta_j} \quad (4.19)$$

上式(4.19)は行列式の演算により, 簡単化でき(付録を参照),

$$\lambda^{(2)} = \frac{\sigma^2}{8} \left(\frac{1}{2\nu} \right)^{2n-1} \frac{1}{\prod_{j=1}^n \eta_j^2 + 1} = \frac{\nu}{4} S_x(2\nu) \quad (4.20)$$

を得る。

viii) $k_l=1, k_j=0, j \neq l$ の時

$$\begin{aligned} (\lambda^{(0)}I - A_{l:1})c^{(2)}_{l:1} + \lambda^{(2)}c^{(0)}_{l:1} + \lambda^{(1)}c^{(1)}_{j:1} \\ = R \left(\sum_{j=1}^n c_{j:1, l:1} \right) \end{aligned} \quad (4.21)$$

が成立し, (4.6), (4.3), (4.7)式より

$$c^{(2)}_{l:1}=0, \quad l=1, 2, \dots, n \quad (4.22)$$

最後に, $r=3$ の場合を考察する。(4.2)式より

ix)

$$\begin{aligned} (\lambda^{(0)}I - A_{0, \dots, 0})c^{(3)}_{0, \dots, 0} + \lambda^{(3)}c^{(0)}_{0, \dots, 0} \\ + \lambda^{(2)}c^{(1)}_{0, \dots, 0} + \lambda^{(1)}c^{(2)}_{0, \dots, 0} = R \sum_{j=1}^n c^{(2)}_{j:1} \end{aligned} \quad (4.23)$$

が成立する。(4.4), (4.13), (4.22)式より, 両辺ベクトル第2成分を比較することにより

$$\lambda^{(3)}=0 \quad (4.24)$$

【II】, 【III】の場合も【I】の場合と同様にして, 以下のように固有値 $\lambda^{(r)}$, $r=1, 2, 3$ を算出できる.

【II】 $\lambda^{(0)}=i$ の場合

$$\lambda^{(1)}=0$$

$$\lambda^{(2)}=\frac{1}{4} \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n \left(\frac{1}{2(\eta_l - i)} + \frac{1}{\eta_l} \right) \frac{1}{\eta_l + \eta_j} \frac{\sigma^2 \Delta_{nj} \Delta_{nl}}{2\nu \Delta^2 T} \quad (4.25)$$

$$\lambda^{(3)}=0$$

【III】 $\lambda^{(0)}=-i$ の場合

$$\lambda^{(1)}=0$$

$$\lambda^{(2)}=\frac{1}{4} \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n \left(\frac{1}{2(\eta_l + i)} - \frac{1}{\eta_l} \right) \frac{1}{\eta_l + \eta_j} \frac{\sigma^2 \Delta_{nj} \Delta_{nl}}{2\nu \Delta^2 T} \quad (4.26)$$

$$\lambda^{(3)}=0$$

【II】, 【III】の場合での固有値 $\lambda^{(2)}$ の実数部は一致し, 付録と類似の計算により,

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\lambda^{(2)}) &= \frac{\sigma^2}{8} \left(\frac{1}{2\nu} \right)^{2n-1} \left[\frac{1}{2 \prod_{j=1}^n \eta_j^2 + 1} - \frac{1}{\prod_{j=1}^n \eta_j^2} \right] \\ &= \frac{\nu}{4} \left[\frac{1}{2} S_x(2\nu) - S_x(0) \right] \end{aligned} \quad (4.27)$$

を得る. ここで【I】~【III】の固有値 $\lambda^{(2)}$ の実数部を比較することにより, 最大の固有値の実数部は【I】の場合となる. したがって, (2.1), (2.4)式の線形変換, (2.2b), (2.5b)式および(3.4)式の関係に留意すれば, (1.1)式, y_0 過程の2次モーメントの安定のための必要十分条件は, 近似的な意味で以下の不等式である.

$$\frac{\varepsilon_0^2}{2\nu_0^2(1-\zeta^2)} S_x(2\nu_0\sqrt{1-\zeta^2}) - 2\zeta\nu_0 + o(\varepsilon_0^3) < 0 \quad (4.28)$$

この結果は Two-Time 摂動法を用いて平均化の手法を適用した文献 14) の結果と一致している.

5. (1.2) 式の2次モーメントの安定条件

前節 2.~4. の議論と同じ手続きにより, (1.2)式の2次モーメントの安定条件を導出する. 2節と同じ状態変数の変換(2.1), (2.4), (2.7)式により, つぎのマルコフモデルを構成できる.

$$\begin{aligned} dy_1 &= i\nu \left\{ y_1 + \varepsilon \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n z_j [-\zeta\nu(y_1 + y_2) \right. \\ &\quad \left. + i\nu(y_1 - y_2)] \right\} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dy_2 &= -i\nu \left\{ y_1 + \varepsilon \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n z_j [-\zeta\nu(y_1 + y_2) \right. \\ &\quad \left. + i\nu(y_1 - y_2)] \right\} dt \end{aligned}$$

$$dz_j = \omega_j z_j dt + \frac{\Delta_{nj}}{\Delta T} dB(t) \quad j=1, \dots, n \quad (5.1)$$

また, $y_1(t), y_2(t)$ 過程については2次モーメントである, (3.1)式のモーメントに対して, (3.3)式に対応してつぎのモーメントの漸化式を得る.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\nu} m_{k_1, \dots, k_n} &= A_{k_1, \dots, k_n} m_{k_1, \dots, k_n} + \varepsilon Q \sum_{j=1}^n m_{k_1, \dots, k_{j+1}, \dots, k_n} \\ &\quad + \frac{\sigma^2}{4\nu \Delta^2 T} \left[\sum_{j=1}^n k_j(k_j-1) \Delta^2_{nj} m_{k_1, \dots, k_{j-2}, \dots, k_n} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j < l} 2k_j k_l \Delta_{nj} \Delta_{nl} m_{k_1, \dots, k_{j-1}, \dots, k_{l-1}, \dots, k_n} \right] \end{aligned} \quad (5.2a)$$

ここに, $A_{k_1, \dots, k_n}$ 式(3.3b)で定義されたものと同じであり, また,

$$Q \triangleq \frac{i}{2} \begin{bmatrix} -\zeta\nu_0 + i\nu & -\zeta\nu_0 - i\nu & 0 \\ \frac{1}{2}(\zeta\nu_0 - i\nu) & i\nu & \frac{1}{2}(-\zeta\nu_0 - i\nu) \\ 0 & \zeta\nu_0 - i\nu & \zeta\nu_0 + i\nu \end{bmatrix} \quad (5.2b)$$

また, 4節と同様に摂動法を適用し, (4.1)式と同様に ε についてベキ級数展開し, (5.2)式に代入し ε のおおののベキ数について整理すれば, (4.2)式に対応して次式を得る.

$$\begin{aligned} \varepsilon^r: [\lambda^{(0)} I - A_{k_1, \dots, k_n}] c^{(r)}_{k_1, \dots, k_n} &+ \sum_{j=0}^{r-1} \lambda^{(r-j)} c^{(j)}_{k_1, \dots, k_n} \\ &= Q \sum_{j=1}^n c^{(r-1)}_{k_1, \dots, k_{j+1}, \dots, k_n} \\ &\quad + \frac{\sigma^2}{4\nu \Delta^2 T} \left[\sum_{j=1}^n k_j(k_j-1) \Delta^2_{nj} c^{(r)}_{k_1, \dots, k_{j-2}, \dots, k_n} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j < l} 2k_j k_l \Delta_{nj} \Delta_{nl} c^{(r)}_{k_1, \dots, k_{j-1}, \dots, k_{l-1}, \dots, k_n} \right] \end{aligned} \quad (5.3)$$

$\lambda^{(0)}$ については, 0, $\pm i$ の場合であり, おおのの場合について4節と同じ手続きにより, 逐次固有値 $\lambda^{(r)}$ を求めると以下の結果を得る.

【I】 $\lambda^{(0)}=0$ の場合

$$\lambda^{(1)}=0$$

$$\lambda^{(2)} = \frac{\sigma^2 \nu}{4} \left[\frac{\nu_0^2}{\prod_{j=1}^n \omega_j^2 + (2\nu)^2} + \frac{\nu^2}{\prod_{j=1}^n \omega_j^2} \right]$$

$$= \frac{\nu}{4} [\nu_0^2 S_x(2\nu) + \nu^2 S_x(0)] \quad (5.4)$$

$$\lambda^{(3)} = 0$$

【Ⅱ】 $\lambda^{(0)} = i$ の場合

$$\lambda^{(1)} = 0$$

$$\lambda^{(2)} = \frac{\sigma^2}{16\nu\Delta\tau} \left(\frac{-1}{2\nu} \right)^{n-1} \left[\sum_{j=1}^n \left\{ \frac{\nu_0^2 - 2\xi^2\nu_0^2}{\eta_j^2} + \frac{\nu_0^2}{2(\eta_j^2 + 1)} \right\} \right. \\ \left. + i \sum_{j=1}^n \left\{ \frac{2\xi\nu_0\nu}{\eta_j^2} + \frac{\nu_0^2}{2(\eta_j^2 + 1)\eta_j} \right\} \right] \quad (5.5)$$

$$\lambda^{(3)} = 0$$

【Ⅲ】 $\lambda^{(0)} = -i$ の場合

$$\lambda^{(1)} = 0$$

$$\lambda^{(2)} = \frac{\sigma^2}{16\nu\Delta\tau} \left(-\frac{1}{2\nu} \right)^{n-1} \left[\sum_{j=1}^n \frac{\nu_0^2 - 2\xi^2\nu_0^2}{\eta_j^2} \right. \\ \left. + \frac{\nu_0^2}{2(\eta_j^2 + 1)} + i \sum_{j=1}^n \left\{ \frac{2\xi\nu_0\nu}{\eta_j^2} + \frac{\nu_0^2}{2(\eta_j^2 + 1)\eta_j} \right\} \right] \quad (5.6)$$

$$\lambda^{(3)} = 0$$

【Ⅱ】、【Ⅲ】での $\lambda^{(2)}$ 、(5.5)、(5.6) 式の実数部は一致し

$$\operatorname{Re}(\lambda^{(2)}) = \frac{\sigma^2\nu}{4} \left[\frac{\nu_0^2}{2 \prod_{j=1}^n \{\omega_j^2 + (2\nu)^2\}} + \frac{\nu_0^2 - 2\xi^2\nu_0^2}{\prod_{j=1}^n \omega_j^2} \right] \quad (5.7)$$

で与えられる。

(5.5)、(5.7) 式を比較すれば、 $\lambda^{(2)}$ の実数部の最大の場合は【Ⅰ】の場合であり、4節の議論と同様に、(1.2) 式、 η_0 過程の2次モーメントの安定のための必要十分条件は、

$$\varepsilon^2 2\nu\lambda^{(2)} - 2\xi\lambda_0 + o(\varepsilon^3) < 0$$

となる。したがって

$$\frac{\varepsilon_0^2}{2} \left(\frac{1}{1-\xi^2} S_x(2\nu_0\sqrt{1-\xi^2}) + S_x(0) \right) \\ - 2\xi\nu_0 + o(\varepsilon_0^3) < 0 \quad (5.8)$$

を得る。

6. 結 言

本研究では、有色雑音過程を含む2階線形システムの2次モーメントの安定問題を考察した。伊藤の確率微分方程式により、結合マルコフ過程を構成することにより、2次モーメントの漸化式を導出した。また摂動法の適用により、 ε^3 のオーダーまでの2次モーメントの安定条件、(4.28)、(5.8) 式を算出した。固有値 $\lambda^{(r)}$ 、 $r \geq 4$ の算出は原理的に可能であるが、結果は煩雑なものとなり、簡単な定式化は困難である。また(4.28) 式は、Wedig の結果 ($n \leq 2$) の一般化となっている。また、 $r \leq 3$ の近似内では、求めた安定条件

(4.28)、(5.8) 式は係数過程 $x(t)$ のパワースペクトル密度の2点 0 、 $2\nu_0\sqrt{1-\xi^2}$ の点スペクトルのみが、2次モーメントの安定性に影響を与えていることを示している。

終りに臨み、日頃、ご指導、ご鞭達および有益など討論を賜わっている、京都工芸繊維大学 砂原善文教授、ニューヨーク工科大学 F. Kozin 教授に深謝の意を表します。

参 考 文 献

- 1) F. Kozin: A Survey of Stability of Stochastic Systems, Automatica, 5-1 95/112 (1969)
- 2) 中溝高好: 確率システムの制御と安定性, 計測と制御, 15-6, 514/527 (1976)
- 3) E. Wong: Stochastic Processes in Information and Dynamical Systems, McGraw-Hill (1971)
- 4) J.L. Bogdanoff and F. Kozin: Moment of the Output of Linear Random Systems, J. Acoust. Soc. Am., 34-8, 1063/1066 (1962)
- 5) T.T. Soong: Random Differential Equations in Science and Engineering, Academic Press (1973)
- 6) R. Z. Khasiminskii: Necessary and Sufficient Conditions for the Asymptotic Stability of Linear Stochastic Systems, Th. Prob. Appl., 12-1, 144/147 (1967)
- 7) F. Kozin: On Almost Sure Stability of Linear Systems with Random Coefficients, J. Math. Phys., 42-1, 59/67 (1963)
- 8) E.F. Infante: On the Stability of Some Linear Nonautonomous Random Systems, ASME Trans., J. Appl. Mech., 90-1, 7/11 (1968)
- 9) A.S. Willsky, S.I. Marcus, and D.N. Martin: On the Stochastic Stability of Linear Systems Containing Colored Multiplicative Noise, IEEE Trans. on Automatic Control, AC-20-5, 711/713 (1975)
- 10) J.L. Willems and D. Aeyels: Moment Stability of Linear Stochastic Systems with Solvable Lie Algebras, IEEE Trans. on Automatic Control, AC-21-2, 285/285 (1976)
- 11) F. Kozin and S. Prodromou: Necessary and Sufficient Conditions for Almost Sure Sample Stability of Linear Ito Equations, SIAM J. Appl. Math., 2104, 571/605 (1971)
- 12) R.R. Mitchell and F. Kozin: Sample Stability of Second Order Linear Differential Equations with Wide Band Noise Coefficients, SIAM J. Appl. Math., 27-4, 571/605 (1974)
- 13) R.L. Stratonovich: Topics in the Theory of Random Noise, I, II, Gordon and Breach (1963)
- 14) G. Papanicolaou and J.B. Keller: Stochastic Differential Equations with Applications to Random Harmonic Oscillators and Wave Propagation in Random Media, SIAM J., Appl. Math., 21-2, 287/305 (1971)
- 15) G.L. Blankenship: Lie Theory and the Moment Stability Problems in Stochastic Differential Equations, Proc. IFAC 1975 Cambridge Mass.
- 16) W. Wedig: Region of Instability for a Linear Systems with Random Inputs, Lecture Note in Math. No. 294, Stability of Stochastic Dynamical

Systems, 160/173, Springer-Verlag (1972)

17) 砂原善文：確率制御過程論，養賢堂（1971）

18) 佐武一郎：行列と行列式，裳華房（1957）

《付 録》

(4.19)式より(4.20)式を導く．このためにつぎの補題を準備する．

〔補題〕 Vandermonde 行列，(2.7)式の行列式 Δ_T および (n, j) 要素の余因子行列式 Δ_{nj} に関して，以下の等式が成立する．

$$\text{i) } \Delta_T = \prod_{j < l}^n \omega_l - \omega_j = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{j < l}^n \omega_j - \omega_l$$

$$\Delta_{nj} = (-1)^{n+j} \prod_{l < m}^n \omega_m - \omega_l \quad (\text{A.1})$$

ii) 任意の $j(1 \leq j \leq n)$ に対して，

$$\sum_{l=1}^n \Delta_{nl} \prod_{m \neq l}^n (\eta_j + \eta_m) = \left(\frac{1}{2\nu} \right)^{n-1} \sum_{l=1}^n \Delta_{nl} \prod_{m \neq l}^n \omega_j + \omega_m$$

$$= \left(-\frac{1}{2\nu} \right)^{n-1} \Delta_T \quad (\text{A.2})$$

$$(\text{A.4})\text{式} = \begin{vmatrix} \omega_2 - \omega_1 & \omega_3 - \omega_1 & \cdots & \omega_n - \omega_1 \\ \omega_2^2 - \omega_1^2 & \omega_3^2 - \omega_1^2 & \cdots & \omega_n^2 - \omega_1^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_2^{n-2} - \omega_1^{n-2} & \omega_3^{n-2} - \omega_1^{n-2} & \cdots & \omega_n^{n-2} - \omega_1^{n-2} \\ (\omega_1 - \omega_2) \prod_{m \neq 1, 2}^n \omega_j + \omega_m & (\omega_1 - \omega_3) \prod_{m \neq 1, 3}^n \omega_j + \omega_m & \cdots & (\omega_1 - \omega_n) \prod_{m \neq 1, n}^n \omega_j + \omega_m \end{vmatrix}$$

ここで， $(n-2)$ 行までのおのおのの行に対して，その前の行に ω_1 を掛けたものを引き，各列の共通因子 $\omega_1 - \omega_m$ ， $m=2, \dots, n$ を行列式の外へくりだせば，次式を得る．

(A.4)式

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \omega_1 & \omega_2 & \cdots & \omega_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_1^{n-3} & \omega_2^{n-3} & \cdots & \omega_n^{n-3} \\ \prod_{m \neq 1, 2}^n \omega_j + \omega_m & \prod_{m \neq 1, 3}^n \omega_j + \omega_m & \cdots & \prod_{m \neq 1, n}^n \omega_j + \omega_m \end{vmatrix}$$

$$\times (-1) \prod_{j > 1}^n \omega_j - \omega_1$$

以上の操作を繰返せば，最終的に，

$$\sum_{l=1}^n \Delta_{nl} \prod_{m \neq l}^n \omega_j + \omega_m$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \omega_j + \omega_n & \omega_j + \omega_{n-1} \end{vmatrix} (-1)^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \prod_{j > k}^n \omega_j - \omega_k$$

$$= (-1)^{n-1} \prod_{j > k}^n \omega_j - \omega_k$$

iii) の証明は ii) の証明とほとんど同じであり省略する．

ここで(4.19)式より(4.20)式を誘導する．

$$\text{iii) } \sum_{l=1}^n \Delta_{nl} \prod_{\substack{j > k \\ j, k \neq l}}^n \omega_j + \omega_k \prod_{m \neq l}^n \eta_m^2 + 1$$

$$= (-1)^{n-1} \left(\frac{1}{2\nu} \right)^{2(n-1)} \sum_{j < k}^n \omega_k^2 - \omega_j^2 \quad (\text{A.3})$$

(証明) i) は略す¹⁸⁾．ii) は i) を用いて

$$\sum_{l=1}^n \Delta_{nl} \prod_{m \neq l}^n \omega_j + \omega_m$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \omega_1 & \omega_2 & \cdots & \omega_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_1^{n-2} & \omega_2^{n-2} & \cdots & \omega_n^{n-2} \\ \prod_{m \neq 1}^n \omega_j + \omega_m & \prod_{m \neq 2}^n \omega_j + \omega_m & \cdots & \prod_{m \neq n}^n \omega_j + \omega_m \end{vmatrix} \quad (\text{A.4})$$

上式，右辺の行列式の第1列目を各列より引けば第1行目は $(1 \ 0 \ 0 \cdots 0)$ となり，小行列式に展開すれば次式が成立する．

$$\nearrow \sum_{j, l=1}^n \frac{1}{8} \left[\frac{1}{\eta_l + i} + \frac{1}{\eta_l - i} \right] \frac{\sigma^2 \Delta_{nj} \Delta_{nl}}{2\nu \Delta_T} \frac{1}{\eta_l + \eta_j}$$

$$= \sum_{l=1}^n \frac{\sigma^2 \Delta_{nl}}{16\nu \Delta_T} \left(\frac{2\eta_l}{\eta_l^2 + 1} \right) \sum_{j=1}^n \frac{\Delta_{nj}}{\eta_l + \eta_j}$$

$$= \sum_{l=1}^n \frac{\sigma^2 \Delta_{nl}}{16\nu \Delta_T} \left(\frac{2\eta_l}{\eta_l^2 + 1} \right) \left[\frac{\sum_{j=1}^n \Delta_{nj} \prod_{m \neq j}^n \eta_l + \eta_m}{\prod_{m=1}^n \eta_l + \eta_m} \right]$$

$$= \sum_{l=1}^n \frac{\sigma^2 \Delta_{nl}}{16\nu \Delta_T} \frac{1}{(\eta_l^2 + 1)} \frac{1}{\prod_{m \neq l}^n \eta_l + \eta_m} \left(-\frac{1}{2\nu} \right)^{n-1}$$

$$(\because \text{補題 ii)})$$

$$= \sum_{l=1}^n \frac{\sigma^2 \Delta_{nl}}{16\nu \Delta_T} \frac{(-1)^{n-1}}{\eta_l^2 + 1} \frac{\prod_{\substack{m > k \\ m, k \neq l}}^n \omega_m + \omega_k}{\prod_{m > k}^n \omega_m + \omega_k}$$

$$= \sum_{l=1}^n \frac{\sigma^2 \Delta_{nl}}{16\nu \Delta_T} \left(\prod_{\substack{j > k \\ j, k \neq l}}^n \omega_j + \omega_k \right) \left(\prod_{m \neq l}^n \eta_m^2 + 1 \right) (-1)^{n-1}$$

$$= \frac{\sigma^2 \left(\frac{1}{2\nu} \right)^{2n-1}}{8} \frac{1}{\prod_{j=1}^n \eta_j^2 + 1} \quad (\because \text{補題 iii)})$$