超低高度人工衛星の平方根フィルタによる 実時間軌道推定法[†]

岡 沼 徹*

Real-Time Trajectory Estimation of the Lowest-Flying Earth Satellite
by a Square Root Filter

Toru OKANUMA*

The real-time trajectory estimation of the lowest-flying earth satellite by a square root filter is discussed in this paper. A perigee altitude of this satellite, which is attained by firing an on-off capable solid rocket motor, is 100~150 km, therefore a real-time trajectory estimation is required for monitoring the altitude.

This filter is a non-linear square root filter which uses tracking radar data of an earth station and is designed to suppress to a minimum the divergence in filtering by a special device. The capability of this filter is examined by a precise simulation program.

As a result of the simulation, it is shown that the estimation error of perigee altitude is less than 1 km and the computation time of this filter suits to a real-time operation.

1. ま え が き

人工衛星の運用管制やミッション解析において衛星の軌道推定は重要な分野であり、日本でもすでにベイズの重み付き最小2乗法などによる高精度な軌道推定プログラムがある¹⁾。他方、衛星のミッションの多様化に伴い実時間で軌道推定を行う必要が生じてくる。その具体的な対象として、航空宇宙技術研究所が提唱し昭和60年代に実用化が計画されている超低高度人工衛星がある²⁾。この衛星は on-off 可能な固体ロケットモータの逆噴射で近地点高度を 100~150 km に下げ、この領域の大気層の調査を行う目的をもつもので、このような超低高度の衛星による探査は諸外国でも類をみない。衛星が超低高度を飛行する場合、空気

抗力の影響のため短時間での軌道高度減衰による衛星の落下や空力加熱による損傷が生じる³⁾。そのため近地点高度低下のための固体ロケットモータ噴射後の近地点高度の推定や超低高度飛行中の高度の推定を実時間でを行い、必要に応じて軌道高度増加のための固体ロケットモータ噴射を行わなければならない。

カルマンフィルタを採用した実時間の軌道推定はロケットや人工衛星の一部ですでに行われている^{4), 5)}。著者はカルマンフィルタの計算打ち切り誤差から生じる推定誤差共分散行列の非対称化・非正定値化を防ぐため平方根フィルタを採用し、不確定な外乱加速度をシステム誤差として取り扱いフィルタの発散(推定誤差共分散行列から求められる推定誤差が小さくなるにもかかわらず、推定値と真値の差である実際の誤差が大きくなるようなことで、推定誤差共分散行列が実際の誤差を正しく反映していない現象)を避けるようにして、地上局のトラッキングレーダデータを用いる実時間軌道推定方式を構成した。この推定方式をプログラムに組み込み、精密なシミュレータを用いて超低高度人工衛星の実際に計画中の実時間軌道推定のシミュレーション実験を行った。軌道推定精度は近地点高度誤差を 1 km 以内におさめることができ、計算時間も実時間で十分可能であり、本推定方式の有効性を確かめることができた。

2. 軌道推定のアルゴリズム

2.1 非線形平方根フィルタ

軌道推定に用いる平方根フィルタの設定条件は衛星の軌道運動方程式およびトラッキングレーダデータの観測方程式が非線形であること、レーダデータの取得ごとに推定状態変数(慣性空間での衛星の位置・速度ベクトル)を更新することである。非線形性の取扱い観測方程式を事前の最適推定状態変数のまわりに線

[†] 第 21 回宇宙科学技術連合講演会で一部発表(昭 52・10)

* 三菱電機(株) 鎌倉市上町屋 325

* Mitsubishi Electric Corp., Kamakura

(Received June 2, 1978)

形近似し、状態方程式を観測更新処理後の最適推定状態変数のまわりに線形近似して線形平方根フィルタ⁶⁾を適用することで処理する。この方法によれば前もって基本となる状態変数の履歴を用意する必要がなく、レーダデータ取得ごとに実時間で最適推定状態変数を求めることができる。

つぎにフィルタの構成に必要な状態方程式、観測方程式を述べる。

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_i, \mathbf{u}_i, t_i, t_{i+1}), \quad \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_I \quad (1)$$

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{g}(\mathbf{x}_i, t_i) + \mathbf{w}_i \quad (2)$$

添字 i はステップ数を示し、 $t_i, \mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i, \mathbf{u}_i, \mathbf{w}_i, \mathbf{x}_I$ はおのおの i ステップでの時刻、6次元状態ベクトル(地心慣性座標系での衛星の位置・速度ベクトルの6成分)、3次元観測ベクトル(range, elevation, azimuthからなるトラッキングレーダ観測量の3成分)、3次元システム誤差ベクトル(地心慣性座標系での衛星に働く不確定な外乱加速度ベクトルの3成分)、3次元観測誤差ベクトル(range, elevation, azimuthの観測誤差の3成分)および初期状態ベクトルである。(1)、(2)式がおのおのの状態方程式、観測方程式である。なお、ステップ i は1から始まるものとする。

誤差ベクトルの統計的性質はつぎのように表わされる。

$$E[\mathbf{w}_i] = 0, \quad E[\mathbf{w}_i \mathbf{w}_j^T] = \delta_{ij} \mathbf{W}_i \quad (3)$$

$$E[\mathbf{u}_i] = 0, \quad E[\mathbf{u}_i \mathbf{u}_j^T] = \delta_{ij} \mathbf{U}_i \quad (4)$$

E は期待値をとる演算を示し、右肩の T は転置を、 δ_{ij} はクロネッカのデルタを示す。 $\mathbf{W}_i$ は対角行列とする。 $\mathbf{x}_{1/0}$ を初期ステップ $i=1$ での事前の推定状態ベクトルとすると、 $\mathbf{x}_{1/0}, \mathbf{u}_i, \mathbf{w}_j$ はすべて互いに無関係とする。

一般に平方根フィルタはカルマンフィルタの推定誤差共分散行列の平方根行列に関して行列計算を行うので、つぎの二つの行列演算を導入する⁶⁾。

$n \times n$ 対称行列 $\mathbf{J}$ の $n \times n$ 平方根行列 $\mathbf{S} = \mathbf{J}^{1/2}$ は行列 $\mathbf{J}$ の Cholesky 分解の下三角行列であると定義する。すなわち、 $\mathbf{S}\mathbf{S}^T = \mathbf{J}^{1/2}(\mathbf{J}^{1/2})^T = \mathbf{J}$ である。

$n \times m$ 行列 $\mathbf{A} (n > m)$ を $m \times m$ 上三角行列 $\mathbf{B}$ と $(n-m) \times m$ 零行列に分解する直交行列 $\mathbf{T}$ として Householder 作用素から生成される三角化行列 $\mathbf{T}$ を用いる。すなわち、

$$\mathbf{T}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

ここで具体的なフィルタの構成に必要なパラメータをつぎのように表わす。 $\mathbf{x}_{i/i}, \mathbf{J}_{i/i}$ をおのおの j ステップまでの観測に基づく i ステップでの6次元最適推定状態ベクトル、 6×6 推定誤差共分散行列とする。

したがって $\mathbf{J}_{i/j} = E[(\mathbf{x}_{i/j} - \mathbf{x}_i) \cdot (\mathbf{x}_{i/j} - \mathbf{x}_i)^T]$ である⁷⁾。 3×6 行列 $\mathbf{M}_i$ を $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_{i/i-1}$ での(2)式のテイラー展開の1次の項からなる観測感度行列とする。すなわち、

$$\mathbf{M}_i = \left. \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x} = \mathbf{x}_{i/i-1}} \quad (5)$$

6×6 行列 $\mathbf{P}_i$ を $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_{i/i}, \mathbf{u}_i = 0$ での(1)式の $\mathbf{x}_i$ に関するテイラー展開の1次の項からなる感度行列(推定論の一般的表記法では遷移行列である)とする。すなわち、

$$\mathbf{P}_i = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x} = \mathbf{x}_{i/i}, \mathbf{u}_i = 0} \quad (6)$$

6×3 行列 $\mathbf{Q}_i$ を $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_{i/i}, \mathbf{u}_i = 0$ での(1)式の $\mathbf{u}_i$ に関するテイラー展開の1次の項からなる感度行列とする。すなわち、

$$\mathbf{Q}_i = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{x} = \mathbf{x}_{i/i}, \mathbf{u}_i = 0} \quad (7)$$

以上の(1)式から(7)式の準備のもとで平方根フィルタはつぎのように表わされる。ここで観測入力後は述のようにスカラーとしているため、添字 j でもって3次元観測ベクトル $\mathbf{y}_i$ の第 j 要素との対応を示す。 $\mathbf{m}_{ji}$ は $\mathbf{M}_i$ の第 j 行からなる横ベクトルである。 $\mathbf{S}_{i/i}$ は 6×6 行列である。

$$\mathbf{S}_{i/i-1} \mathbf{S}_{i/i-1}^T = \mathbf{J}_{i/i-1} \quad (8)$$

$$\mathbf{b}_{ji} = \mathbf{S}_{i/i-1}^T \mathbf{m}_{ji}^T \quad (9)$$

$$\mathbf{a}_{ji} = (\mathbf{b}_{ji}^T \mathbf{b}_{ji} + \mathbf{w}_{ji})^{-1} \quad (10)$$

$$\mathbf{d}_{ji} = \{1 + (\mathbf{a}_{ji} \mathbf{w}_{ji})^{1/2}\}^{-1} \quad (11)$$

$$\mathbf{c}_{ji} = \mathbf{a}_{ji} \mathbf{S}_{i/i-1} \mathbf{b}_{ji} \quad (12)$$

$$\mathbf{x}_{i/i} = \mathbf{x}_{i/i-1} + \mathbf{c}_{ji} \{y_{ji} - g_j(\mathbf{x}_{i/i-1}, t_i)\} \quad (13)$$

$$\mathbf{S}_{i/i} = \mathbf{S}_{i/i-1} - \mathbf{d}_{ji} \mathbf{c}_{ji} \mathbf{b}_{ji}^T \quad (14)$$

$$\mathbf{S}_{i/i} \mathbf{S}_{i/i}^T = \mathbf{J}_{i/i} \quad (15)$$

$$\mathbf{x}_{i+1/i} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{i/i}, 0, t_i, t_{i+1}) \quad (16)$$

$$\mathbf{T} \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{i/i}^T \mathbf{P}_i^T \\ (\mathbf{U}_i^{1/2})^T \mathbf{Q}_i^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{i+1/i}^T \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$\mathbf{S}_{i+1/i} \mathbf{S}_{i+1/i}^T = \mathbf{J}_{i+1/i} \quad (18)$$

(9)式から(14)式までが i ステップでの観測に基づく観測更新処理部分である。(16)式から(17)式までが i ステップから $i+1$ ステップへの時間更新処理部分である。(8)、(15)、(18)式は推定誤差共分散行列との関係を示す。観測更新処理は計算機の占有記憶領域の減少と計算時間の短縮および行列演算に伴う計算誤差の増加を防ぐため観測入力をスカラーとしている。そのため3次元観測ベクトル $\mathbf{y}_i$ の各第 j 要素ごとに(9)式から(14)式までの観測更新処理を繰り返して行う。この場合第 j 要素の観測更新処理で算出された $\mathbf{x}_{i/i}, \mathbf{S}_{i/i}$ をつぎの第 $j+1$ 要素での観測更新処理の

$\mathbf{x}_{i/i-1}, \mathbf{S}_{i/i-1}$ に用いる。それに伴い $\mathbf{M}_i$ も再計算する。スカラー観測更新処理は観測誤差の成分が互いに無相関であるから可能である。 $w_{ji}, y_{ji}, q_j(\mathbf{x}_{i/i-1}, t_i)$ はそれぞれ観測誤差共分散行列 $\mathbf{W}_i$ の第 j 対角項, 観測ベクトル $\mathbf{y}_i$ の第 j 成分, $\mathbf{g}(\mathbf{x}_{i/i-1}, t_i)$ の第 j 成分である。

2.2 状態方程式と観測方程式の構成

地球周回人工衛星の軌道運動はつぎの微分方程式で表わされる⁸⁾。

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\mu r^{-3} \mathbf{r} + \mathbf{p} \quad (19)$$

$\mathbf{r}$ は地心を原点とする衛星の位置ベクトル, μ は地球重力定数 ($398600.9 \text{ km}^3/\text{s}^2$), r は $\mathbf{r}$ の大きさ, $\mathbf{p}$ は摂動力 (地球偏平重力項, 空気抗力, 月・太陽の引力, 太陽輻射圧) の加速度を示す。超低高度人工衛星の場合, 摂動力 $\mathbf{p}$ のなかで地球偏平重力項のうちの 2 次の Zonal 項⁹⁾ および空気抗力が支配的である (付録 1 参照)。空気抗力加速度は大気に相対的な衛星速度の 2 乗と大気密度の積に比例するが, 大気密度は日変化・太陽活動・地磁気変化などで変化し正確な値は求められず, 空気抗力加速度には不確定性が残る⁹⁾。他方, 軌道推定を実時間で行うときの使用計算機の制約から軌道運動の方程式は簡単なほうが好ましい。そのため (19) 式の摂動力加速度 $\mathbf{p}$ は地球偏平重力項の 2 次の Zonal 項のみの加速度 $\mathbf{p}_0$ とし, その他の摂動力加速度は不確定な外乱加速度 $\mathbf{u}$ として, つぎの微分方程式を状態方程式の基礎式とする。また 3. のケース [2] で確かめられるように $\mathbf{u}$ の導入によりフィルタの発散を避けることが可能になる。

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\mu r^{-3} \mathbf{r} + \mathbf{p}_0 + \mathbf{u} \quad (20)$$

状態ベクトル $\mathbf{x}_i$ は地心慣性座標系で表わした時刻 t_i での衛星の位置・速度ベクトルの 6 成分からなる。(8)~(18)式からなるフィルタを構成するために, 一般には (20) 式から状態方程式 (1) を陽に求め後述の観測方程式を含めた (1)~(7) 式を用いるが, (1) 式を導くときの離散化の誤差, その後の線形化の誤差を少なくするため, ここでは以下のように (20) 式とその変分方程式から直接 (6) 式の $\mathbf{P}_i$, (7) 式の $\mathbf{Q}_i$ および (16) 式を計算し, (1) 式を直接には用いない。不確定な外乱加速度 $\mathbf{u}$ は推定時間間隔 $[t_i, t_{i+1}]$ が短くその間での変化が小さいことから, (20) 式で微分方程式のパラメータ (定数) とみなせ, (1) 式のような取扱いができて, その統計的性質は (4) 式で与えられることが経験的に知られる。したがって時刻 t_i で $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_{i/i}$, $\mathbf{u}_i = 0$ として (20) 式を数値積分して (16) 式の $\mathbf{x}_{i+1/i}$ を計算すると同時に, (20) 式の初期値に関する変分方程式とパラメータ $\mathbf{u}$ に関する変分方程式を数値積分し

ておのおの感度行列 $\mathbf{P}_i, \mathbf{Q}_i$ を計算する (付録 2 参照)⁹⁾。

観測ベクトル $\mathbf{y}_i$ は時刻 t_i での地上局のトラッキングレーダの range (衛星・レーダ間の直距離) R_i , elevation (局所水平面からの衛星仰角) E_i , azimuth (局所水平面以北方向から東回りに測った衛星方位角) A_i の 3 成分からなる。地心慣性座標系での衛星の位置を (r_{1i}, r_{2i}, r_{3i}) とし, トラッキングレーダの経度を λ , 緯度を δ , 地心からの距離を h とすると観測方程式はつぎのように表わされる。

$$\begin{aligned} \lambda_i &= \lambda + \omega_e(t_i - t_1) \\ \begin{bmatrix} s_{1i} \\ s_{2i} \\ s_{3i} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos \delta \cos \lambda_i & \cos \delta \sin \lambda_i & \sin \delta \\ -\sin \lambda_i & \cos \lambda_i & 0 \\ -\sin \delta \cos \lambda_i & -\sin \delta \sin \lambda_i & \cos \delta \end{bmatrix} \\ &\quad \cdot \begin{bmatrix} r_{1i} - h \cos \delta \cos \lambda_i \\ r_{2i} - h \cos \delta \sin \lambda_i \\ r_{3i} - h \sin \delta \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} R_i &= (s_{1i}^2 + s_{2i}^2 + s_{3i}^2)^{1/2} + w_{1i} \\ E_i &= \arcsin \{s_{1i}(s_{1i}^2 + s_{2i}^2 + s_{3i}^2)^{-1/2}\} + w_{2i} \\ A_i &= \arctan (s_{2i}s_{3i}^{-1}) + w_{3i} \end{aligned} \quad (22)$$

ω_e は地球自転角速度 ($0.729211586 \cdot 10^{-4} \text{ rad/s}$) であり, w_{1i}, w_{2i}, w_{3i} は range, elevation, azimuth の観測誤差である。(5) 式の感度行列 $\mathbf{M}_i$ は (21), (22) 式から計算する (付録 3 参照)。

2.3 初期状態の推定

衛星が地上局のトラッキングレーダの捕捉範囲に現われて軌道推定をはじめるとき, 初期の事前推定状態ベクトル $\mathbf{x}_{1/0}$, 事前推定誤差共分散行列 $\mathbf{J}_{1/0}$ を用意しなければならない。 $\mathbf{x}_{1/0}$ を求めるために, 捕捉開始付近の τ_1, τ_2, τ_3 時刻での 3 組のレーダ観測ベクトルから (21), (22) 式を用いて地心慣性座標系での衛星位置ベクトル ρ_1, ρ_2, ρ_3 を計算し, 衛星運動方程式のテイラー展開の 4 次までの項の採用および加速度の二体問題⁸⁾ 近似で $\dot{\rho}_2$ を次式で計算し, $\rho_2, \dot{\rho}_2$ から二体問題で逆算して $\mathbf{x}_{1/0}$ を計算する。

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_2 &= -(\xi_1 + \eta_1 \|\rho_1\|^{-3})\rho_1 + \{\xi_1 - \xi_2 + (\eta_1 - \eta_2)\|\rho_2\|^{-3}\} \\ &\quad \cdot \rho_2 + (\xi_2 + \eta_2 \|\rho_3\|^{-3})\rho_3 \\ \xi_1 &= (\tau_3 - \tau_2)^2(\tau_2 - \tau_1)^{-1}(\tau_3 - \tau_2)^{-1}(\tau_3 - \tau_1)^{-1} \\ \xi_2 &= (\tau_2 - \tau_1)^2(\tau_2 - \tau_1)^{-1}(\tau_3 - \tau_2)^{-1}(\tau_3 - \tau_1)^{-1} \\ \eta_1 &= \frac{\mu(\tau_3 - \tau_2)}{12}, \quad \eta_2 = \frac{\mu(\tau_2 - \tau_1)}{12} \end{aligned} \quad (23)$$

$\mathbf{J}_{1/0}$ は (23) 式から計算される事前推定状態ベクトル $\mathbf{x}_{1/0}$ の推定誤差の統計量として与えられるが, 現在のところ 3. で述べるようなシミュレーションを数多く行いそこで得られる経験値を採用している。

3. シミュレーション実験

2. で構成した軌道推定方式をプログラムに組み込み、大形計算機 IBM 370/168 を用いて超低高度人工衛星の実時間軌道推定のシミュレーションをつぎのような方法で行った。(A) 真の衛星軌道を数値積分で精密に生成する。(B) 真の衛星軌道から地上局のトラッキングレーダ観測量 (range, elevation, azimuth) を計算し、レーダ観測誤差 (経験的に正規分布とみなせる) を正規乱数とし、レーダ観測量に付加して軌道推定の入力観測ベクトルを算出する。(C) 観測ベクトルを入力として 2. で構成した軌道推定方式により各ステップでの最適推定状態ベクトル $x_{i/i}$ 、推定誤差共分散行列 $J_{i/i}$ を計算する。(D) 同一ステップでの (C) の最適推定状態ベクトル $x_{i/i}$ と (A) の真の衛星軌道状態ベクトル x_i の差から推定精度を求める。

プログラムの中での計算はすべて倍精度 (64 ビット) で行われ、(A) および (C) のフィルタ内の数値積分はともに予測子・修正子法の一つである 8 次の Cowell-Adams-Moulton 法 (スターターは Runge-Kutta 法) を採用している。(C) のフィルタのプログラム内部で用いられる状態変数は地心慣性直交座標系で表わされた衛星の位置・速度ベクトルであり数値積分もこの状態変数で行われる。なお、入出力の座標系は後述のように他の形式でも可能である。

軌道推定シミュレーションはパラメータをかえて数多く行ったが、ここではそのうちの典型的な 2 ケースについて述べる。ケース [1] は高度 1,000 km の円軌道から固体ロケットモータの逆噴射により近地点高度を 110 km に低下した後の最初のレーダ捕捉での軌道推定シミュレーションであり、ケース [2] は近地点 (高度 105 km) 付近の超低高度飛行中の軌道推定シミュレーションである。両ケースに共通な定数、初期値、条件はつぎのとおりである。衛星重量 250 kg、表面積 1.54 m²、空気抗力係数 2、真の軌道を生成するときの摂動力として地球偏平重力項のうちの 4 次の Zonal 項までと 3 次の Sectorial 項までの重力および空気抗力を使用し、大気密度は米国標準大気モデルおよび外圏温度 1200°K の高層大気モデルによる静的層状モデルの密度とした³⁾。地上局の経度 λ は 131.02 deg (東経)、緯度 δ は 30.56 deg (北緯)、地心からの距離 h は 6378.289 km とし、トラッキングレーダの観測誤差は平均がすべて 0、標準偏差が range 10 m, elevation 0.1 deg, azimuth 0.1 deg の正規分布とした。レーダ観測量の取得時間間隔すなわち推定ステップ時間間隔は 1 秒の等間隔とし、elevation 5 deg

以上をトラッキングレーダの捕捉可能範囲 (衛星可視範囲) とし、各ケースの推定開始時刻 t_1 は衛星が可視範囲に入った直後として推定時間は可視範囲時間内とした。観測誤差共分散行列 W_i は range, elevation, azimuth の順に対角要素を 10² m², 10⁻² deg², 10⁻² deg² とし、初期の事前推定誤差共分散行列 $J_{1/0}$ は 2. 3 の方法をシミュレーションにあてはめて経験的に得られたつぎの値とした：軌道 6 要素で表わされる対角行列とし、長半径、離心率、軌道傾斜角、昇交点赤経、近地点引数、真近点離角の順に対角要素を 10⁴ km², 10⁻², 10⁰ deg², 10² deg², 10² deg², 10² deg² とする。なおここで扱う軌道 6 要素はケプラーの古典的接触要素を意味し⁸⁾、長半径を a 、離心率を e 、軌道傾斜角を i 、昇交点赤経 (推定開始時刻のグリニッジ子午線方向を慣性空間の基準軸として測る) を Ω 、近地点引数を ω 、真近点離角を f と表わす。高度 l は地球を回転楕円体 (扁平率 1/298.255) として、衛星地心間を結ぶ線分と地表の交点から衛星までの距離とする。

ケース [1] の推定開始時刻 t_1 での真の衛星軌道は $a=6913.0$ km, $e=0.063$, $i=69.99852$ deg, $\Omega=129.12237$ deg, $\omega=269.86109$ deg, $f=103.25177$ deg であり、初期状態推定のため 0, 10, 20 秒でのレーダ観測量を用いた。推定時間は 600 秒間である。衛星高度 l が 600 km 以上であることから大気密度が十分小さく空気抗力による外乱加速度すなわちシステム誤差は無視可能で $U_i=0$ とした。

Fig. 1~Fig. 6 は軌道 6 要素で表わした各ステップ i での推定誤差 E-T (最適推定状態ベクトル $x_{i/i}$ から真の衛星軌道状態ベクトル x_i を差し引いた該当成分の値) と推定誤差共分散行列 $J_{i/i-1}$, $J_{i/i}$ の該当対角項の平方根すなわち標準偏差 COVM をプロットした図である。COVM は同一時刻で順に $J_{i/i-1}$, $J_{i/i}$ の該当対角項の平方根をプロットしたグラフのため階段状になっている。各図の右端の値は最終時刻でのそれぞれの値を示す。いずれも推定開始後 4~5 分で真値へ収束し以後の真値への追従性も良い。

軌道推定終了時刻 t_n ($n=601$) での最適推定状態ベクトル $x_{n/n}$ に基づいて時刻 t_n 以後の衛星の軌道状態、特に高度 l の変化を予測しなければならないが、 $x_{n/n}$ には推定誤差共分散行列 $J_{n/n}$ で示される推定誤差が含まれているため、高度 l の予測にも誤差 (真の衛星軌道高度と予測高度との差) が生じてくる。この予測誤差を計算するため、2.1 のフィルタの時間更新処理で遷移行列 P_i を用いて推定誤差共分散行列を更新するのと同じように、 $J_{n/n}$ を遷移行列を用いて時間更新して予測高度誤差の標準偏差を求めた。Fig. 7 は $x_{n/n}$,

Fig. 1 Error of semi major axis a Fig. 4 Error of right ascension of ascending node Q Fig. 2 Error of eccentricity e Fig. 5 Error of argument of perigee ω Fig. 3 Error of inclination i Fig. 6 Error of true anomaly f

$J_{n/n}$ に基づく予測高度 l と予測高度誤差の標準偏差の時間変化の履歴を求めた図である。

この図から5回の最低高度点での予測高度誤差の標準偏差は1 km 以内に収まっている。Fig. 7はNMNLが予測高度 l を、COVM が予測高度誤差の標準偏差を示している。

ケース [2] の推定開始時刻 t_1 での真の衛星軌道は $a = 6913.0$ km, $e = 0.063$, $i = 69.99852$ deg, $Q = 120.0$ deg, $\omega = 35.0$ deg, $f = 351.5$ deg であり、初期状態推定のため0, 20, 40秒でのレーダ観測量を用いた。推定時間は170秒間である。衛星高度 l が105~108 km であることから空気抗力によるシステム誤差が存在

Fig. 7 History of altitude l

し、その不確定加速度が約 10^{-4} km/s² であるから U_i は対角項を 10^{-8} km²/s⁴ とする対角行列 ($U_i = \{10^{-8}\}$ で表示する) とした。

Fig. 8 Error of altitude l Fig. 9 Error of altitude l

Fig. 8, Fig. 9 は各ステップ i での高度の推定誤差 $E-T$ ($x_{i/i}$ からの推定高度より x_i からの真の高度を差し引いた値) と $J_{i/i}$ を高度に変換した推定誤差分散の平方根すなわち標準偏差 $COVM$ をプロットした図である。Fig. 8 は $U_i = \{10^{-8}\}$ の場合であり、Fig. 9 はシステム誤差の影響を調べるため $U_i = 0$ の場合である。これらの図からシステム誤差としてフィルタのモデル化の誤差 (空気抗力をフィルタの状態方程式から省略していること) に相当する不確定外乱加速度を取り入れることによりモデル化の誤差が補償されてフィルタの発散が防がれていることがわかる。また Fig. 8 で高度推定誤差は 1 km 以内に十分抑えられている。

軌道推定に要した計算時間はケース [1] の場合約 30 秒で、ケース [2] の場合約 9 秒であり実時間で推定可能なことがわかる。

なお、数多くのシミュレーションからつぎのようなことがいえることもわかった。衛星と地上局の相対的關係から、軌道の同じ付近を観測しても地上局の可視範囲の端を衛星が通過する (レーダデータの elevation が小さい) 場合より、地上局の上空を通過する場合のほうが観測性の良いことから推定精度が良くなる。レーダデータを取得する地上局が 1 局 (ケース [1], [2] の地上局) の場合より、2 局 (ケース [1],

[2] と経度が 140.30 deg, 緯度が 35.21 deg, 地心距離が 6378.396 km の地上局の 2 局) の場合のほうが推定精度が良くなる。レーダデータ取得時間間隔が 10 秒と 1 秒の場合を比較して 1 秒のほうが推定精度が良い。ケース [2] のような超低高度の近地点付近の軌道推定を除いて (衛星と地上局の相対関係が変わらなければ), 慣性空間における軌道の形 (特に近地点高度) の違いによる推定精度の変化はあまりみられなかった。

4. あとがき

平方根フィルタを用いた超低高度人工衛星の実時間軌道推定方式を構成し、シミュレーション実験により推定精度の検討を行った。超低高度人工衛星の場合、軌道推定精度に対する要求条件は、近地点高度の推定誤差をある範囲 (1 km 程度) 内に抑えることであり、ここで構成した軌道推定方式は十分にこの条件を満足し、またフィルタの計算時間も短く実時間処理が可能であることがわかった。さらに平方根フィルタの使用および不確定な外乱加速度をシステム誤差として取り扱うことにより、簡単な状態方程式のモデルを用いてフィルタの発散を防ぐことができることもわかった。

本研究は、航空宇宙技術研究所より受託した超低高度人工衛星 (DAS) の概念設計の一部としてなされたものであり、本研究に対して終始適切ご指導をいただいた航空宇宙技術研究所 長洲秀夫氏、五代富文氏、森 英彦氏、ほか関係の方々、および三菱電機 (株) 鎌倉製作所 尾原弘晃氏、開発本部計算機研究部 立花康夫氏に深く感謝いたします。

参考文献

- 1) 忽滑谷他: 高精度な人工衛星の軌道決定法, 電子通信学会宇宙航空エレクトロニクス研究会資料, SANE 74-15 (1974)
- 2) 五代, 長洲: 超低高度軌道変換衛星の計画, 第 21 回宇宙科学技術連合講演会講演集, 2-A-5 (1977)
- 3) 大坪, 五代, 長洲: 超低高度人工衛星 DAS の軌道に関する初期解析, 航空宇宙技術研究所報告, TR-507 (1977)
- 4) 田辺, 志甫: カルマン・フィルタとその応用, 日本航空宇宙学会誌, 20-216, 28/37 (1972)
- 5) R. F. Brammer: Real-Time Shipboard Orbit Determination Using Kalman Filtering Techniques, IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems, AES-10-4, 492/496 (1974)
- 6) P. G. Kaminski, A. E. Bryson Jr and S. F. Schmidt: Discrete Square Root Filtering; A Survey of Current Techniques, IEEE Trans. on Automatic Control, AC-16-6, 727/735 (1971)
- 7) D. G. Luenberger: Optimization by Vector Space Methods, John Wiley & Sons (1969)
- 8) R. H. Battin: Astronautical Guidance, McGraw-Hill

(1964)

9) ポントリャーギン：常微分方程式，共立出版（1968）

《付 録》

《付録 1》

摂動力のなかで地球偏平重力項のうちの2次のZonal項および空気抗力による加速度 $\mathbf{p}$ はつぎのように表わされる。 $\mathbf{p}=(p_1, p_2, p_3)^T$ ， $\mathbf{r}=(r_1, r_2, r_3)^T$ （地心慣性直交座標系の成分表示）とし， J_2 を2次のZonal項の係数（ $1.082628 \cdot 10^{-3}$ ）， R を地球平均赤道半径（6378.142 km）， W を衛星重量， S を衛星表面積， C_d を衛星空気抗力係数， ρ_h を高度 h に対する大気密度， ω_e を地球自転角速度（ $0.729211586 \cdot 10^{-4}$ rad/s）， f を地球偏平率（1/298.255）とすると，

$$p_j = \frac{\mu r_j}{r^3} \cdot \frac{3}{2} J_2 \left(\frac{R}{r} \right)^2 (5 \sin^2 \varphi - e_j) - \frac{\rho_h C_d S}{2W} v_1 v_{1j} \quad (j=1 \sim 3) \quad (\text{A.1})$$

ただし

$$\begin{aligned} e_1 &= e_2 = 1, \quad e_3 = 3 \\ v_{11} &= \dot{r}_1 + \omega_e r_2, \quad v_{12} = \dot{r}_2 - \omega_e r_1, \quad v_{13} = \dot{r}_3 \\ v_1 &= (v_{11}^2 + v_{12}^2 + v_{13}^2)^{1/2}, \quad r = (r_1^2 + r_2^2 + r_3^2)^{1/2} \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

$$h = r - R(1-f) \left\{ 1 - (2f - f^2) \frac{r_1^2 + r_2^2}{r^2} \right\}^{-1/2}$$

$$\sin \varphi = \frac{r_3}{r}$$

《付録 2》

(20)式とその変分方程式から(6)式の $\mathbf{P}_i$ ，(7)式の $\mathbf{Q}_i$ および(16)式を具体的に計算して求める手順について述べる。

(20)式の運動方程式は付録1を参照してつぎのように表わせる。

$$\ddot{r}_j = -\frac{\mu r_j}{r^3} \left\{ 1 - \frac{3}{2} J_2 \left(\frac{R}{r} \right)^2 (5 \sin^2 \varphi - e_j) \right\} + u_j \quad (j=1 \sim 3) \quad (\text{A.3})$$

u_j は微分方程式のパラメータ（定数）である。 $\mathbf{x}_{i+1/i} = (x_{j+1/i})^T_{j=1,6}$ ， $\mathbf{u} = (u_j)^T_{j=1,3}$ として，(A.3)式の初期条件は $t=t_i$ で $r_j = x_{j1/i}$ ， $\dot{r}_j = x_{j31/i}$ ， $u_j = 0$ （ $j=1 \sim 3$ ）なることである。

変分方程式を扱うため(A.3)式をつぎのようにも書き表わしておく。

$$\ddot{r}_j = f_j(r_1, r_2, r_3, u_j) \quad (j=1 \sim 3) \quad (\text{A.3}')$$

$\mathbf{P}_i$ を求めるための(A.3)式の初期値に関する変分方程式は，

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} & p_{15} & p_{16} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} & p_{25} & p_{26} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} & p_{35} & p_{36} \end{bmatrix}$$

なる18個の独立変数に対して

$$\begin{bmatrix} \ddot{p}_{1k} \\ \ddot{p}_{2k} \\ \ddot{p}_{3k} \end{bmatrix} = \mathbf{F} \begin{bmatrix} p_{1k} \\ p_{2k} \\ p_{3k} \\ \dot{p}_{1k} \\ \dot{p}_{2k} \\ \dot{p}_{3k} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial r_1} & \frac{\partial f_1}{\partial r_2} & \frac{\partial f_1}{\partial r_3} & \frac{\partial f_1}{\partial \dot{r}_1} & \frac{\partial f_1}{\partial \dot{r}_2} & \frac{\partial f_1}{\partial \dot{r}_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial r_1} & \frac{\partial f_2}{\partial r_2} & \frac{\partial f_2}{\partial r_3} & \frac{\partial f_2}{\partial \dot{r}_1} & \frac{\partial f_2}{\partial \dot{r}_2} & \frac{\partial f_2}{\partial \dot{r}_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial r_1} & \frac{\partial f_3}{\partial r_2} & \frac{\partial f_3}{\partial r_3} & \frac{\partial f_3}{\partial \dot{r}_1} & \frac{\partial f_3}{\partial \dot{r}_2} & \frac{\partial f_3}{\partial \dot{r}_3} \end{bmatrix} \quad (k=1 \sim 6) \quad (\text{A.4})$$

と表わされる18元2階線形微分方程式である。係数行列 $\mathbf{F}$ は(A.3)式から計算されるが， $\partial f_i / \partial \dot{r}_n$ （ $l=1 \sim 3$ ， $n=1 \sim 3$ ）は明らかに0である。

(A.4)式の初期条件は $t=t_i$ で 6×6 行列 $\begin{bmatrix} \mathbf{P} \\ \mathbf{P} \end{bmatrix}$ が単位行列に等しいことである。

$\mathbf{Q}_i$ を求めるための(A.3)式のパラメータに関する変分方程式は，

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{bmatrix}$$

なる9個の独立変数に対して

$$\begin{bmatrix} \ddot{q}_{1k} \\ \ddot{q}_{2k} \\ \ddot{q}_{3k} \end{bmatrix} = \mathbf{F} \begin{bmatrix} q_{1k} \\ q_{2k} \\ q_{3k} \\ \dot{q}_{1k} \\ \dot{q}_{2k} \\ \dot{q}_{3k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_{1k} \\ \delta_{2k} \\ \delta_{3k} \end{bmatrix} \cdot 1 \quad (k=1 \sim 3) \quad (\text{A.5})$$

と表わされる9元2階線形微分方程式である。 δ_{ij} はクロネッカのデルタである。 $\mathbf{F}$ は(A.4)式と同じである。(A.5)式の初期条件は $t=t_i$ で 6×3 行列 $\begin{bmatrix} \mathbf{Q} \\ \mathbf{Q} \end{bmatrix}$ が零行列に等しいことである。

$\mathbf{P}_i, \mathbf{Q}_i$ ，(16)式の左辺の $\mathbf{x}_{i+1/i}$ を求めるために(A.3)，(A.4)，(A.5)式からなる連立微分方程式をおのの初期条件のもとで解く（数値積分する）。この時係数行列 $\mathbf{F}$ の要素が(A.3)式の解を用いて定められるので，(A.4)，(A.5)式は(A.3)式と同時に解かれなければならない。(A.3)，(A.4)，(A.5)式の $t=t_{i+1}$ での解を $r_{j1}, \dot{r}_{j1}$ （ $j=1 \sim 3$ ）， $\mathbf{P}_1, \dot{\mathbf{P}}_1, \mathbf{Q}_1, \dot{\mathbf{Q}}_1$ とすると

$$P_i = \begin{bmatrix} P_1 \\ \vdots \\ P_i \\ \vdots \\ P_6 \end{bmatrix}, \quad Q_i = \begin{bmatrix} Q_1 \\ \vdots \\ Q_i \\ \vdots \\ Q_6 \end{bmatrix},$$

$$x_{i+1/i} = (r_{11} \ r_{21} \ r_{31} \ \dot{r}_{11} \ \dot{r}_{21} \ \dot{r}_{31})^T$$

と与えられる。

〈付録3〉

観測感度行列 M_i は具体的につぎのように表わされ

る。 $x = (x_j)^T_{j=1,6}$, $x_{i/i-1} = (x_{ji/i-1})^T_{j=1,6}$ とすると,

(21)式で $r_{ji} = x_{ji/i-1}$ ($j=1\sim3$) であり, 3×6 行列

M_i の l 行 n 列要素を m_{ln} として,

$$m_{1n} = \frac{s_{1i} \frac{\partial s_{1i}}{\partial x_n} + s_{2i} \frac{\partial s_{2i}}{\partial x_n} + s_{3i} \frac{\partial s_{3i}}{\partial x_n}}{(s_{1i}^2 + s_{2i}^2 + s_{3i}^2)^{1/2}}$$

$$m_{2n} = \frac{(s_{2i}^2 + s_{3i}^2) \frac{\partial s_{1i}}{\partial x_n} - s_{1i} s_{2i} \frac{\partial s_{2i}}{\partial x_n} - s_{1i} s_{3i} \frac{\partial s_{3i}}{\partial x_n}}{(s_{1i}^2 + s_{2i}^2 + s_{3i}^2)(s_{2i}^2 + s_{3i}^2)^{1/2}}$$

(A. 6)

$$m_{3n} = \frac{s_{3i} \frac{\partial s_{2i}}{\partial x_n} - s_{2i} \frac{\partial s_{3i}}{\partial x_n}}{s_{2i}^2 + s_{3i}^2} \quad (n=1\sim6)$$

ただし

$$\frac{\partial s_{1i}}{\partial x_1} = \cos \delta \cos \lambda_i, \quad \frac{\partial s_{1i}}{\partial x_2} = \cos \delta \sin \lambda_i,$$

$$\frac{\partial s_{1i}}{\partial x_3} = \sin \delta, \quad \frac{\partial s_{2i}}{\partial x_1} = -\sin \lambda_i, \quad \frac{\partial s_{2i}}{\partial x_2} = \cos \lambda_i,$$

$$\frac{\partial s_{2i}}{\partial x_3} = 0,$$

$$\frac{\partial s_{3i}}{\partial x_1} = -\sin \delta \cos \lambda_i, \quad \frac{\partial s_{3i}}{\partial x_2} = -\sin \delta \sin \lambda_i,$$

$$\frac{\partial s_{3i}}{\partial x_3} = \cos \delta, \quad \frac{\partial s_{ji}}{\partial x_n} = 0 \quad (j=1\sim3, n=4\sim6)$$

(A. 7)