非線形制御系における外乱隔離可能条件の一般化†

石 島 辰太郎*

A Generalization of Noise Decoupling Conditions in Nonlinear Control Systems

Shintaro ISHIJIMA*

1. はじめに

線形制御系 (A, B) において, A 不変部分空間および (A, B) 不変部分空間の概念は, Decoupling 問題をはじめとする多くの問題で重要な役割を果たしている¹⁾. 著者らは, 先に文献 1) でこれらの概念が非線形制御系に対して自然な形で拡張できることを示し, 不変構造および不変可能構造の概念を導入し, 外乱の隔離可能性の問題に適用した. この小論の目的は, 文献 1) で加法的な状態フィードバック $(u_j = f_j(x) + v_j)$ に対して導かれた結果を, 非加法的な状態フィードバック $(u_j = f_j(x) + \sum_{k=1}^r g_{jk}(x)v_k)$ に対するものに拡張することにある.

2. 不変構造と F 不変構造 (不変可能構造)

対象とするシステム S は, 微分方程式

$$S; \dot{x}(t) = X_0(x(t)) + \sum_{j=1}^r X_j(x(t))u_j(t) \quad (1)$$

で記述されるものとする. 状態空間を R^n とし, $X_j, j=0, 1, \dots, r$ は R^n 上の解析ベクトル場とする. $T(R^n)$ を R^n の接バンドルとし, $\mathcal{L} \subseteq T(R^n)$ を可積分な接平面場とする. $\mathcal{L}$ の定義する R^n 上の葉層構造を同じ記号 $\mathcal{L}$ で表わし, $x \in R^n$ を通る $\mathcal{L}$ の葉を $L(x)$ と書く²⁾. $L(x_0)$ は適当な解析関数 $l(x)$ を用いて, $L(x_0) = \{x | l(x) = l(x_0)\}$ と局所的に表わされるが, このとき $l(x)$ を $\mathcal{L}$ の局所表現とよぶ. Ω を R で定義され, R^r に値をとる有界可測関数の集合とし, $u = (u_1, \dots, u_r)' \in \Omega$ を許容制御とする. 以下記述を簡単にするため, (1) 式の $x_0 \in R^n$ を初期点とする $u \in \Omega$ に対する解 $x(t, x_0, u)$ の存在と唯一性を仮定しておく. また, システム S は可到達, すなわち任意の $x \in R^n$ で, $\dim \{X_0, \dots, X_r\}_{LA}(x) = n$ が成立すると仮定する. ただし, $\{\}_{LA}$ は $\{\}$ 内の要素が生成するリー代数を表わすものとする.

【定義 1】 葉層構造 $\mathcal{L}$ はつぎの条件を満たすとき, S の不変構造であるという.

$$\forall t \in R, \forall u \in \Omega,$$

$$x(t, L(x_0), u) = L(x(t, x_0, u)) \quad (2)$$

不変構造 $\mathcal{L}$ は識別可能性 (Distinguishability) の問題と密接に関連している. 実際, $\mathcal{L}$ の局所表現を観測方程式とするシステムでは, $L(x_0)$ は x_0 と識別不可能な点の集合を与える¹⁾.

つぎに, 状態フィードバック

$$u_j(t) = f_j(x(t)) + \sum_{k=1}^r g_{jk}(x(t))v_k, \quad j \in r \triangleq \{1, \dots, r\} \quad (3)$$

を考える. ここで, $f = (f_1, \dots, f_r)'$, $G = (g_{jk})$ とし, これらは R^n 上で解析的であり, $\det G(x) \neq 0$ を満たすとする. (3) 式の状態フィードバックをシステム S に施したシステムを $S(f, G)$ で表わす.

【定義 2】 状態フィードバック (3) で, 葉層構造 $\mathcal{L}$ が $S(f, G)$ の不変構造とするものが存在するとき, $\mathcal{L}$ を S のフィードバック不変構造 (F 不変構造または不変可能構造) とよぶ.

〈補助定理 1〉¹⁾ 葉層構造 $\mathcal{L}$ が S の不変構造であるための必要十分条件は, $\mathcal{L}$ が $[X_j, \mathcal{L}] \subset \mathcal{L}, j=0, 1, \dots, r$ を満たすことであり, $\mathcal{L}$ がつぎの条件を満たせば, $\mathcal{L}$ は S の F 不変構造である.

$$[X_0, \mathcal{L}] \subset \mathcal{L} + \{X_k\}_1^r, [X_j, \mathcal{L}] \subset \mathcal{L} \quad j \in r \quad (4)$$

ただし, $[,]$ はリー積を表わし, $\{X_k\}_1^r$ は $X_1, \dots, X_r$ が生成する C^∞ 加群を表わす.

この論文の主な目的は, 補助定理 1 の後半の拡張であるつぎの定理を証明することである.

《定理 1》 葉層構造 $\mathcal{L}$ がシステム S の F 不変構造となるための必要十分条件は, その接平面場 $\mathcal{L}$ がつぎの条件を満たすことである.

$$[X_j, \mathcal{L}] \subset \mathcal{L} + \{X_k\}_1^r \quad j=0, 1, \dots, r \quad (5)$$

3. 定理 1 の証明

必要性は定義から明らかであるから省略し, 十分性のみ示す. $\det G(x) \neq 0$ という仮定から, $\hat{X}_j = \sum_{k=1}^r g_{jk} X_k, j=1, \dots, r$ とすると, $\{X_k\}_1^r = \{\hat{X}_k\}_1^r$ が成立

† Dynamical System Theory シンポジウムで発表 (昭 53・12)

* 東京都立工科短期大学 日野市旭が丘 6-6
(Received December 27, 1978)

するから、充分性の証明には

$$[X_j, \mathcal{L}] \subset \mathcal{L} + \{X_k\}_1^r \quad j \in r \quad (6)$$

のとき、あるマトリクス G ($\det G \neq 0$) が存在して

$$[\hat{X}_j, \mathcal{L}] \subset \mathcal{L} \quad (7)$$

となることを示せばよい。 $\mathcal{L}$ を α 次元の接平面場とし、 $\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_\alpha$ が $\mathcal{L}$ の基底となるような局所座標をとり、 $X_j, j \in r$ のこの座標のもとでの成分表示を $X_j = \sum_{k=1}^n \eta_j^k \partial/\partial x_k$ とする。マトリクス η を $\eta' = [(\eta^{\alpha+1})'; \dots; (\eta^r)']$, ただし $\eta^j = (\eta_1^j, \dots, \eta_r^j)$ とする。このとき、(6)式が成立するなら、次式を満たすマトリクス $A_l, l \in \alpha$ が存在する。

$$\frac{\partial \eta}{\partial x_i} + \eta A_l = 0 \quad l \in \alpha \quad (8)$$

(8)式から容易に次式を得る。

$$\eta \cdot \left\{ \frac{\partial A_l}{\partial x_k} - \frac{\partial A_k}{\partial x_l} + A_l A_k - A_k A_l \right\} = 0 \quad (9)$$

〈補助定理2〉 $(x_1, \dots, x_n)$ の関数マトリクス $A_l, l \in \alpha$ が与えられたとき、 $(\partial G/\partial x_i)G^{-1} = A_l, l \in \alpha$ ($\det G \neq 0$) を満たすマトリクス G が存在するための必要十分条件は

$$\frac{\partial A_l}{\partial x_k} - \frac{\partial A_k}{\partial x_l} + A_l A_k - A_k A_l = 0 \quad l, k \in \alpha \quad (10)$$

が成立することである。

(証明) 必要性は省略し、 G の構成法をもって証明にかえる。 $\Phi_\beta, \beta \in \alpha$ をつぎの線形微分方程式の解とする。

$$\frac{\partial \Phi_\beta}{\partial x_\beta} = A_\beta(O_{\beta-1})\Phi_\beta, \quad \Phi_\beta \Big|_{x_\beta=0} = \Phi_{\beta+1} \quad (11)$$

ただし、 $\Phi_\alpha|_{x_\alpha=0} = I$ とし $O_{\beta-1} = (0, \dots, 0, x_\beta, \dots, x_n)$ を表わすとする。この時、 $G = \Phi_1$ とすればよい。■

(9)式から、 $\Sigma_{ki} = \partial A_l/\partial x_k - \partial A_k/\partial x_l + A_l A_k - A_k A_l$ とすれば、 $\Sigma_{ki} = 0$ となるとは限らないが、つぎの定理が成立する。

〈補助定理3〉 (9)式が成立すれば、 $\hat{A}_l, l \in \alpha$ で

$$\frac{\partial \hat{A}_l}{\partial x_k} - \frac{\partial \hat{A}_k}{\partial x_l} + \hat{A}_l \hat{A}_k - \hat{A}_k \hat{A}_l = 0, \quad \eta A_l = \eta \hat{A}_l \quad (12)$$

を満たすものが存在する。

(証明) $\hat{A}_l$ の構成法を示す。いま $l, k \in \alpha-1$ に対して、 $\partial A_l/\partial x_k - \partial A_k/\partial x_l + A_l A_k - A_k A_l = 0$ が満たされているとする。 A_j をつぎの線形微分方程式の解とする。

$$\frac{\partial A_j}{\partial x_j} - A_j(O_{j-1})A_j + A_j A_j(O_{j-1}) - \Sigma_{ja}(O_{j-1}) = 0$$

$$A_j \Big|_{x_j=0} = A_{j+1} \quad j \in \alpha-1 \quad (13)$$

ただし、 $A_\alpha = 1|_{x_{\alpha-1}=0} = \Sigma_{\alpha-1, \alpha}(O_{\alpha-1})$ とする。 $\hat{A}_\alpha = A_\alpha + A_1$ とすれば、 $A_1, \dots, A_{\alpha-1}, \hat{A}_\alpha$ は(12)式を満たす。■

補助定理2および3から(8)式が成立すれば、マトリクス G ($\det G(x) \neq 0$) で

$$\frac{\partial \eta}{\partial x_i} G + \eta \frac{\partial G}{\partial x_i} = 0 \quad l \in \alpha \quad (14)$$

を満たすものが存在する。ゆえに、 $\hat{X}_j = \sum_{k=1}^r g_{kj} X_k$ とすれば $[\hat{X}_j, \mathcal{L}] \subset \mathcal{L}$ となる。以上で、定理2は証明されたことになる。■

4. 外乱の隔離可能性の問題への応用

システム S に外乱 $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_l)$ が加わるつぎの形のシステムを考える。

$$\dot{x} = X_0(x) + \sum_{j=1}^r X_j(x)u_j + \sum_{k=1}^l Y_k(x)\omega_k \quad (15)$$

$$y = h(x) \quad (16)$$

このとき、(3)式の形の状態フィードバックによって外乱 ω がこのシステムの入出力関係から隔離されるための必要十分条件は、つぎの定理で与えられる(外乱の隔離の定義は文献1)を参照されたい)。

《定理2》 上のシステムの外乱 ω が入出力関係から隔離できるための必要十分条件は、 S の F 不変構造 $\mathcal{L}$ で、 $Y_j \in \mathcal{L}, j=1, \dots, l$ かつ $dh \cdot \mathcal{L} = 0$ を満たすものが存在することである。

証明は、定理1と定義により明らかであるから省略する。

最後に、日頃ご教授頂いている早稲田大学 示村悦二郎教授に感謝致します。

参考文献

- 1) 石島辰太郎：非線形制御系における外乱の隔離可能性，計測自動制御学会論文集，14-1，8/13 (1978)
- 2) 田村一郎：葉層のトポロジー，岩波書店，96/179 (1976)
- 3) 石島辰太郎：非線形システムにおける入力の変換とその代数構造，Dynamical System Theory シンポジウム資料，87/90 (1978)
- 4) W. M. Wonham: Linear Multivariable Control—A Geometric Approach, Springer Verlag (1974)
- 5) 野村俊夫，古田勝久：非線形システムのフィードバックによる構造変化について，第17回 SICE 学術講演会予稿集，S4-3 (1978)