時間システムの過去決定性の特徴づけ

高原 康彦*・池庄司 英 臣**

Characterization of the Past-Determinacy of Time Systems

Yasuhiko TAKAHARA* and Hideomi IKESHOJI**

1. はじめに

数理的一般システム理論では、システムの入出力関係、すなわちシステムの行動 (behavior) を第一義的なものと考え、システムをある入力集合 X と出力集合 Y の積集合の部分集合、すなわち $S \subset X \times Y$ として定義する。この立場では、状態表現は S の関数的表現にすぎず第二義的なものである。したがって、システムの性質を定式化しようとする場合、状態表現を用いしないで、 S 自身のもつ性質 (= 構造) としてそれを定式化しようとする。過去決定性は、ある時刻までシステムの入出力を観測すれば、そのシステムの“状態”が確定しその後のシステムの挙動が予測可能になるということ、状態表現を表面にださずにシステムの行動、すなわち S レベルの概念として定式化しようとしたものであり、M. D. Masarovic によるものである。

過去決定性は時間システムにおける重要な概念の一つであり、それに関する研究はいくつかなされている^{1), 2), 3)}。しかし、いかなる性質を満足する時間システムが過去決定的となるかは、線形時間システムなどについてはある程度わかっていたが、一般の時間システムについては完全にはわかっていなかった。今回、一般の時間システムに対して、過去決定性の一つの特徴づけが得られたのでそれを報告する。

以下ここで使用する記号の簡単な説明をしておく。詳細は参考文献 2) を参照されたい。 T を最小要素をもつ線形順序集合とする。任意の集合 A, B に対し関係 $S \subset A^T \times B^T$ を A, B 上の T -時間システムとよぶ。ただし、 $\mathcal{D}(S) = \{x | (\exists y)((x, y) \in S)\}$ は以下に述べる入力の完全性を満足するとする。 S は適当な $X \subset A^T, Y \subset B^T$ をとり $S \subset X \times Y$ とみなせる。 X, Y をそれぞれ入力集合、出力集合とよぶ。簡単のため $\mathcal{D}(S) = X, \mathcal{R}(S) = \{y | (\exists x)((x, y) \in S)\} = Y$ とする。時間軸 T の部分集合 $T^i, \bar{T}^i, T_i$ を $T^i = \{t' | t' < t\}$, $\bar{T}^i = \{t' | t' \leq t\}$, $T_i = \{t' | t' \leq t\}$ で定義し、 $x \in X$ の restriction $x|T^i, x|\bar{T}^i, x|T_i$ をそれぞれ $x^i, \bar{x}^i, x_i$

と書く。 y についても同様である。また集合、ベクトルに対しても同様の記法を用いる。たとえば $X_i = \{x | x \in X\}$, $(x, y)^i = (x^i, y^i)$, $S^i = \{(x, y)^i | (x, y) \in S\}$ である。 $\{y | (x, y) \in S\}$ を $S(x)$ と書く。入力 x に対応する出力の全体である。 $x, x' \in A^T$ に対し、 $x^i \cdot x_i'$ を T^i で x^i と一致し T_i で x_i' と一致する A^T の要素とする。 y についても同様である。 S を時間システムという場合、 $\mathcal{D}(S) \subset A^T$ に対していつでも $(\forall x, x' \in \mathcal{D}(S))(\forall t \in T)(x^i \cdot x_i' \in \mathcal{D}(S))$ が成立する (入力の完全性) ものとする。

2. 過去決定性の特徴づけ

時間システム $S \subset A^T \times B^T$ が t から過去決定的²⁾であるとは、 S が t に関するつぎの二つの条件を満足することである (定義)。

- (i) $(\forall (x, y), (\forall (x', y') \in S)(\forall t \geq t)((x, y)^i = (x', y')^i \ \& \ x^i = x'^i \Rightarrow y^i = y'^i)$
- (ii) $(\forall (x^i, y^i) \in S^i)(\forall x_i' \in X_i)(\exists y_i' \in Y_i)((x^i \cdot x_i', y^i \cdot y_i') \in S)$

過去決定性を特徴づけるとは、上の (i), (ii) に相当する条件をシステムの行動 (behavior) レベルで明らかにすることである。本小論では上の条件 (i), (ii) をつぎの二つの条件で特徴づける。

- (α) $(\forall x, x' \in X)(\forall t \geq t)(x^i = x'^i \Rightarrow S(x)|\bar{T}^i = S(x')|\bar{T}^i)$
- (β) $(\forall x \in X)(\forall y, y' \in S(x))(y^i = y'^i \Rightarrow y = y')$

条件 (α) は、 t から先で S が強い意味で前因果的⁴⁾であることを意味し、条件 (β) はどのような入力 x に対してもそれに対応する出力 y, y' は時刻 t までの観察で $y = y'$ か否かを決定できること、すなわちある種の可観測性を意味する。

まず条件 (α), (β) の必要性を示す。

【命題 1】 条件 (i), (ii) が成立すれば条件 (α) が成立する。

(証明) $t \geq t$ に対して $x, x' \in X$ が $x^i = x'^i$ を満足するとする。任意の $y \in S(x)$ をとる。 $(x, y) \in S$ だから当然 $(x^i, y^i) \in S^i$ であるが、条件 (ii) によると x_i' に対してもある y_i' があり $(x^i \cdot x_i', y^i \cdot y_i') \in S$ となる。 $y = y^i \cdot y_i'$ とおくと $x^i \cdot x_i' = x'^i \cdot x_i' = x'$ で

* 東京工業大学工学部 東京都目黒区大岡山 2-12-1

** 広島大学工学部 広島市千田町 3-8-2

(Received October 14, 1978)

あるから $(x', y') \in S$ である。ここで $(x, y)^i = (x' y')^i$ かつ $x^i = x'^i$ となることに注意すれば、条件 (i) より $y^i = y'^i$ を得る。つまり $y^i = y'^i \in S(x') | \bar{T}^i$ となる。ここで $y \in S(x)$ は任意にとったのだから $S(x) | \bar{T}^i \subset S(x') | \bar{T}^i$ となる。まったく同様に、逆の包含関係も示せる。すなわち $S(x) | \bar{T}^i = S(x') | \bar{T}^i$ である。 ■

【命題 2】 条件 (i) が成立すれば条件 (β) が成立する。

(証明) 任意の $y, y' \in S(x)$ をとる。もちろん $(x, y) \in S$, $(x, y') \in S$ であり、 $y^i = y'^i$ なら $(x, y)^i = (x, y')^i$ である。さらに、 $x^i = x^i$ は任意の t に対して成立するから $t \geq i$ なる任意の t に対して $y^t = y'^t$ となる。つまり $y = y'$ である。 ■

つぎに条件 (α), (β) の十分性を示す。

【命題 3】 条件 (α), (β) が成立すれば条件 (i) が成立する。

(証明) $(x, y), (x', y') \in S$ が $(x, y)^i = (x', y')^i$ かつ $t \geq i$ なる t に対して $x^t = x'^t$ を満足するとする。条件 (α) より $S(x) | \bar{T}^i = S(x') | \bar{T}^i$ となるから $y \in S(x')$ で $y^i = y'^i$ なるものが存在する。ところが $y', y \in S(x')$ であり、 $y'^i (= y^i) = y^i$ であるから条件 (β) より $y = y'$ となる。すなわち、 $y^i (= y'^i) = y'^i$ である。 ■

【命題 4】 条件 (α) が成立すれば条件 (ii) が成立する。

(証明) 任意の $(x^i, y^i) \in S^i$ をとる。 S^i の定義よりある $(\bar{x}, \bar{y}) \in S$ があり $(\bar{x}, \bar{y})^i = (x^i, y^i)$ となる (注 1)。また任意の x_i' に対して入力完全性より $x^i \cdot x_i' \in X$ である。 $\bar{x} = x^i \cdot x_i'$ とおくと $\bar{x}^i (= x^i) = \bar{x}^i$ であるから、条件 (α) より $S(x) | \bar{T}^i = S(\bar{x}) | \bar{T}^i$ となる。したがって $\bar{y} \in S(\bar{x})$ に対してある $y \in S(\bar{x})$ があり $\bar{y}^i = y^i$ となる。もちろん $y^i = y^i$ である。したがって、 y は $y = y^i \cdot y_i (= y^i \cdot y_i) = y^i \cdot y_i$ と書ける。この y_i が (ii) で存在を示すべき y_i' である。 ■

3. 条件 (α), (β) の考察

本節では、条件 (α), (β) のもつ意味を S_i の“初期”状態表現²⁾との関連において簡単にふれてみる。

時間システム $S \subset A^T \times B^T$ に対し、関係 (relation) $\rho_i \subset (S^i \times X_i) \times Y_i$ をつぎのように定義する。

$$((s^i, x_i), y_i) \in \rho_i \iff (x^i \cdot x_i, y^i \cdot y_i) \in S$$

ただし $s^i = (x^i, y^i)$

一般の時間システム S に対して、 ρ_i は関係としていつでも定まる。しかし ρ_i の domain $\mathcal{D}(\rho_i)$ が $\mathcal{D}(\rho_i)$

$= S^i \times X_i$ となるか、あるいはなかったとしても ρ_i を $S^i \times X_i \rightarrow Y_i$ の関数とみなせるかは一般にはわからない。参考文献 2) によれば、 S が i から過去決定的であることは、

ρ_i が $S^i \times X_i \rightarrow Y_i$ の関数とみなせ、 S^i を“初期”状態オブジェクトとみなすと、 ρ_i は S_i の強い意味で因果的な“初期”状態表現になる。

ことと同値である。当然のことながら、条件 (α), (β) とも同値となるはずである。上の命題に対する (α), (β) の十分性についてだけ簡単にふれてみる。条件 (β) によると、 $((s^i, x_i), y_i) \in \rho_i \ \& \ ((s^i, x_i), y_i') \in \rho_i \Rightarrow y_i = y_i'$ が出る。また条件 (α) から $\mathcal{D}(\rho_i) = S^i \times X_i$ がでてくる (命題 4 の証明参照)。よって ρ_i は $S^i \times X_i \rightarrow Y_i$ とみなせる。さらに条件 (α), (β) により ρ_i は強い意味で因果的となる (命題 3 の証明参照)。 ρ_i が関数とみなせれば、それは S_i の“初期”状態表現となる (注 2) から、 ρ_i は S_i の強い意味で因果的な“初期”状態表現となる。 ρ_i の具体的な構成に関しては、たとえば参考文献 3) を参照されたい。

4. おわりに

命題 1~4 で、条件 (α), (β) が時間システムの過去決定性の特徴づけることを示した。条件 (α), (β) は扱いやすい。たとえば線形性の仮定があると、(α), (β) はつぎの (α'), (β') と同値になる (注 3)。

$$(α') \quad (\forall x \in X) (\forall t \geq i) (x^t = 0^t \Rightarrow S(x) | \bar{T}^t = S(0) | \bar{T}^t)$$

$$(β') \quad (\forall y \in S(0)) (y^i = 0^i \Rightarrow y = 0)$$

このように条件 (α), (β) は、時間システムのいろいろな構造 (線形性、定常性²⁾など) となじみやすく、過去決定性の判定条件として有用である。

参考文献

- 1) 高原康彦：過去決定システムの性質について，計測自動制御学会論文集，9-3，299/303 (1973)
- 2) M. D. Masarovic, et al.: General Systems Theory; Mathematical Foundations, Academic Press (1975)
- 3) 高原康彦：基本線形システムの表現理論とその性質，計測自動制御学会論文集，13-6，533/538 (1977)
- 4) 高原康彦，他：出力完備性をもつ時間システムの因果性，計測自動制御学会論文集，14-3，230/235 (1978)
- 5) 高原康彦：システム工学の理論，日刊工業新聞社 (1974)

(注 2) $(x_i, y_i) \in S_i$ ならある $(\bar{x}, \bar{y}) \in S$ があり、 $(\bar{x}, \bar{y})^i = (x_i, y_i)$ となるから $s^i = (\bar{x}, \bar{y})^i$ とおけば $((s^i, x_i), y_i) \in \rho_i$ となる。また逆にある $s^i \in S^i$ があり $((s^i, x_i), y_i) \in \rho_i$ なら $(x_i, y_i) \in S_i$ である。したがって、もし ρ_i を関数とみなせるなら、 ρ_i は S_i の“初期”状態表現となる。

(注 3) たとえば $(α') \Rightarrow (α)$ を示す。 $x^i = x'^i$ なら $(x - x')^i = 0^i$ ゆえ $S(x - x') | \bar{T}^i = S(0) | \bar{T}^i$ 。いま $\hat{y} \in S(x - x')$ で $\hat{y}^i = 0^i$ なるものをとると、 $\forall y \in S(x)$ に対し、 $y - \hat{y} \in S(x')$ かつ $(y - \hat{y}) | \bar{T}^i = \hat{y}^i$ となるから $S(x) | \bar{T}^i \subset S(x') | \bar{T}^i$ 。逆も同様ゆえ $S(x) | \bar{T}^i = S(x') | \bar{T}^i$ 。

(注 1) x^i を単に X^i の要素とみている。 y^i についても同様である。 x^i などと書く場合、二つの見方があるから注意されたい。