非同次双線形システムによる実現問題[†]

稲垣 眞人*・舟橋 康行*

Realization of Inhomogeneous Bilinear Systems

Masato INAGAKI* and Yasuyuki FUNAHASHI*

This paper considers an inhomogeneous bilinear realization in case of unknown initial state. This problem was first studied by Tarn and Nonoyama. However, their existence condition of inhomogeneous realization is found to be insufficient. Hence, a complete condition is given in this paper.

And their condition of inhomogeneous bilinear realization depends on the factorization of the generalized Hankel matrix into specific factors. This is difficult to check. In this paper, the criteria for judging whether a given matrix has the specific factorization or not are obtained. As a result an existence condition of inhomogeneous bilinear realization is given. The condition is independent of the specific factorization, hence is easy to use for practical purposes.

1. はじめに

システム理論の分野で、システムの外部記述（入出力写像）が与えられた時、それに対する内部記述（状態微分または差分方程式）を求める問題は、一般に実現問題と呼ばれる。このうち、非線形入出力写像をいわずに双線形システムで実現する双線形実現問題は、Ho-Kalmanの線形実現理論の拡張として、Isidoriらによって基本的に解決された^{1)~3)}。ただし、Isidoriらは、初期状態を0-状態または平衡状態に限って理論を展開した。これに対して、最近 Tarn and Nonoyamaは、初期状態が未知である場合の双線形実現問題を考察した⁴⁾。一般に、非同次双線形システムは、状態空間の次元を1だけ増すことで同次化できる。また、離散時間双線形システムでは、その入出力写像は、ある種の行列の無限系列と同一視できる。これは、線形システムにおける Markov パラメータに相当する。

Tarn らはまず、行列の有限系列と無限系列に対する同次双線形実現問題を解決し、それに基づいて非同次双線形実現の存在条件を導いた。

ところが、有限系列、無限系列に対する非同次実現の十分条件は不完全であるので、本稿では新たな条件を与える。また、Tarn らの条件は、一般化 Hankel 行列が特殊な形の行列の積に分解されることに直接依存しているので実行が困難である。本稿では、一般化 Hankel 行列が特殊な形に分解できるか否かの判定法と、分解できる時、その見つけ方を与える。その結果、非同次実現の存在条件がより具体的な形で得られた。

2. 準備

この節では、双線形実現理論に関する概念、記号などを定義する。一般に、 n 次元離散時間非同次双線形システムは、つぎの差分方程式で記述される。

$$\begin{cases} x(t+1) = Ax(t) + \sum_{i=1}^r u_i(t) N_i x(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \quad t=0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (2.1)$$

ここで、 $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^r$, $y(t) \in \mathbb{R}^s$ で、 A , N_i , B , C はおのおの適当な次元の実行列である。

$B = [b_1, \dots, b_r] \neq 0$ の時、非同次双線形システム(2.1)は、つぎの $n+1$ 次元同次双線形システムに変換できる。

$$\begin{cases} z(t+1) = Fz(t) + \sum_{i=1}^r u_i(t) G_i z(t) \\ y(t) = Hz(t), \quad t=0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (2.2)$$

ただし、

$$\begin{aligned} z(t) &= \begin{bmatrix} x(t) \\ 1 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad G_i = \begin{bmatrix} N_i & b_i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ H &= [C \quad 0], \quad t=0, 1, 2, \dots \\ &\quad i=1, 2, \dots, r \end{aligned} \quad (2.3)$$

【定義 2.1】 $\{Y_j\}_{j=1}^\infty$ は、 $z(0)$, F , G_i , H から帰納的に定義される $s \times (r+1)^{j-1}$ 行列 Y_j の無限系列である。

[†] 第7回制御理論シンポジウムで発表（昭53・5）

第17回計測自動制御学会学術講演会で発表（昭53・8）

* 名古屋大学工学部 名古屋市中種区不老町

* Faculty of Engineering, Nagoya University, Nagoya
(Received May 23, 1978)

$$R_1 = z(0), \quad R_i = [FR_{i-1}, G_i R_{i-1}, \dots, G_r R_{i-1}] \\ i=2, 3, \dots \quad (2.4)$$

$$Y_j = HR_j, \quad j=1, 2, \dots$$

【定義 2.2】 $\tilde{u}_j$ は, $u(t)$, $t=0, 1, \dots$, から帰納的に定義される $(r+1)^{j-1}$ 次元ベクトルである.

$$\tilde{u}_1 = 1, \quad \tilde{u}_j = [\tilde{u}_{j-1} \\ \tilde{u}_{j-1} \otimes u(j-2)], \quad j=2, 3, \dots \quad (2.5)$$

ここで, $\otimes$ は tensor 積を表わす.

以上の定義により, 初期状態が $z(0)$ であるときの同次双線形システム(2.2)の入出力関係式は,

$$y(t) = Y_{t+1} \tilde{u}_{t+1}, \quad t=0, 1, 2, \dots \quad (2.6)$$

となる. そこで, 実現問題をつぎのように定式化する.

【実現問題】 $s \times (r+1)^{j-1}$ 行列の任意の無限系列 $\{Y_j\}_{j=1}^\infty$ が与えられた時, 同次(非同次)双線形実現問題とは, 状態空間の次元 n を見つけ, かつすべての $j=1, 2, \dots$ に対して(2.4)式を満たす係数行列 $z(0)$ F, G_i, H ((2.3)式を満たす $x(0), A, N_i, b_i, C$) を決定することである.

Remark⁰: 線形システムの場合と異なり, 行列系列 $\{Y_j\}_{j=1}^\infty$ を得るには, 多重実験に依らねばならない. しかし, Y_j の多重線形性により, 要素が 0, 1 だけから成る入力系列を与えれば得られる.

ここで, 実現問題を解く時に必要な基本概念と, 重要な結果を述べる.

【定義 2.3】 与えられた入出力写像に対して, 双線形システム(2.1)が最小非同次 ($B=0$ の時は同次) 双線形実現と呼ばれるのは, その状態空間が, $x(0)$ から可到達なすべての状態で生成される線形多様体 ($B=0$ の時は線形空間) と一致し, かつ可識別となる時である. このとき, 状態空間の次元 n は, 同一の入出力写像を与えるすべての非同次 ($B=0$ の時は同次) 双線形システムの中で, 最小の次元数である.

結果⁰: (2.4)式で定義した R_i を用いて,

$$R_{n+1} = [R_1, \dots, R_{n+1}] \quad (2.7)$$

とおく. このとき, $(n+1)$ 次元同次双線形システム(2.2)の状態空間が, $z(0)$ から可到達な状態で生成されるための必要十分条件は, $\text{rank } R_{n+1} = n+1$ である. また, つぎのような行列 O_{n+1} を定義する.

$$O_1 = H, \quad O_i = \begin{bmatrix} O_{i-1}F \\ O_{i-1}G_1 \\ \vdots \\ O_{i-1}G_r \end{bmatrix} \quad i=2, 3, \dots \\ O_{n+1} = \begin{bmatrix} O_1 \\ \vdots \\ O_{n+1} \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

このとき, 双線形システム(2.2)の状態空間が可識別であるための必要十分条件は, $\text{rank } O_{n+1} = n+1$ である. 以上のことから, R_{n+1} , O_{n+1} はおのおの可到達行列, 可識別行列と呼ばれる.

Remark: Isidori らや Tarn らは, O_{n+1} を可観測行列 (observability matrix) と呼んでいるが^{1)~4)}, 可観測性が 1 組の入出力データからの初期状態可決定性に関する概念であることを考慮すれば, 可識別行列 (distinguishability matrix) と呼ぶほうが適切であろう⁵⁾.

3. 一般化 Hankel 行列

線形実現理論の場合と同じく, 双線形実現理論において重要な役割を果たす一般化 Hankel 行列を定義し, 非同次双線形実現 (IBR) の基礎となる補題を述べる.

【定義 3.1】 $s \times (r+1)^{j-1}$ 行列の無限系列 $\{Y_j\}_{j=1}^\infty$ が与えられた時, 無限次元一般化 Hankel 行列 $\mathcal{H}$ は以下のようにして定義される.

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \cdots \\ H_{21} & H_{22} \cdots \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

ただし,

$$H_{1j} = Y_j, \quad H_{ij} = \begin{bmatrix} H^{1-i-1, j+1} \\ \vdots \\ H^{r+1-i-1, j+1} \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} i=2, 3, \dots \\ j=1, 2, \dots \end{matrix} \quad (3.2)$$

である. ここで, $H^{l-i-1, j+1}$, $l=1, 2, \dots, r+1$, は $H_{i-1, j+1}$ の列を $r+1$ 等分割して得られる. すなわち,

$$H^{l-i-1, j+1} = [H^{1-i-1, j+1}, H^{2-i-1, j+1}, \dots, H^{r+1-i-1, j+1}] \quad (3.3)$$

また, $\mathcal{H}$ の部分行列

$$\mathcal{H}_{\mu, \nu} = \begin{bmatrix} H_{11} & \cdots & H_{1\nu} \\ \vdots & & \vdots \\ H_{\mu 1} & \cdots & H_{\mu \nu} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

は, $s((r+1)^\mu - 1)/r \times ((r+1)^\nu - 1)/r$ 行列で, 有限次元一般化 Hankel 行列と呼ばれる.

双線形実現理論では, $\mathcal{H}_{\mu+1, \nu}$ から定義される $r+1$ 個の部分行列が, 特に重要な役割を果たす. すなわち,

$$\mathcal{H}_{\mu+1, \nu} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \cdots H_{1\nu} \\ H_{12}^1 & H_{13}^1 & H_{1, \nu+1}^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ H_{12}^{r+1} & H_{13}^{r+1} & H_{1, \nu+1}^{r+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ H_{\mu 2}^1 & H_{\mu 3}^1 & H_{\mu, \nu+1}^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ H_{\mu 2}^{r+1} & H_{\mu 3}^{r+1} \cdots H_{\mu, \nu+1}^{r+1} \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

と表わす時, $\mathcal{H}_{\mu, \nu}^{(i)}$ は(3.6)式のように, 肩に i のついた行ブロックで構成され, $\mathcal{H}_{\mu, \nu}$ と同じ次元をもつ.

$$\mathcal{H}_{\mu, \nu}^{(i)} = \begin{bmatrix} H_{12}^i & H_{13}^i & \cdots & H_{1, \nu+1}^i \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ H_{\mu 2}^i & H_{\mu 3}^i & \cdots & H_{\mu, \nu+1}^i \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

この行列は、 $\mathcal{H}_{\mu, \nu+1}$ から定義できる。すなわち、

$$\mathcal{H}_{\mu, \nu+1} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12}^1 & \cdots & H_{12}^{r+1} & \cdots & H_{1, \nu+1}^1 & \cdots & H_{1, \nu+1}^{r+1} \\ H_{21} & H_{22}^1 & \cdots & H_{22}^{r+1} & \cdots & H_{2, \nu+1}^1 & \cdots & H_{2, \nu+1}^{r+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ H_{\mu 1} & H_{\mu 2}^1 & \cdots & H_{\mu 2}^{r+1} & \cdots & H_{\mu, \nu+1}^1 & \cdots & H_{\mu, \nu+1}^{r+1} \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

と表わす時、 $\mathcal{H}_{\mu, \nu}^{(i)}$ は肩に i のついた列ブロックから構成される。

つぎの補題は、Hankel 行列 $\mathcal{H}_{\mu, \nu}$ の主要な性質であり、同次、非同次双線形実現理論の基礎となるものである。

[補題 3.2]⁴⁾ $s \times (r+1)^{j+1}$ 行列の有限系列 $\{Y_1, \dots, Y_{\mu+\nu}\}$ から同次双線形システム $\{z(0), F, G_i, H\}$ が実現できるための必要十分条件は、

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\mu, \nu} &= \mathcal{O}_{\mu} R_{\nu}, \quad \mathcal{H}_{\mu, \nu}^{(i)} = \mathcal{O}_{\mu} F^i R_{\nu}, \\ \mathcal{H}_{\mu, \nu}^{(i)} &= \mathcal{O}_{\mu} G_{i-1} R_{\nu}, \quad i=2, 3, \dots, r+1 \end{aligned} \quad (3.8)$$

である。ここで、 $R_{\nu}, \mathcal{O}_{\mu}$ はおのおの (2.7), (2.8) 式で定義される行列である。

さらに、非同次実現の理論では、以下の一連の記号が必要となる。まず、各正整数 $j=1, 2, \dots$ に対して、

$$\lambda_i^j = \frac{(r+1)^j - 1}{r} + j \quad (3.9)$$

を定める。ただし、 i は各 j について、 $(r+1)^j \geq j$ を満たす非負整数である。このとき、

$$\mathcal{O}^+ = [\overset{s}{\underset{r}{\overbrace{0, 0, X, \dots, 0, X, \dots, X}}}^T \quad (3.10)$$

は、以下の構造の列ベクトルである。すなわち、各 j について λ_i^j 番目の行ブロック (各行ブロックは s 次元列ベクトル) はすべて等しく、特に λ_i^1 番目は s 次元 0 ベクトルである。また、

$$R^+ = [1, 1, 0, \dots, 1, 0, \dots, 0] \quad (3.11)$$

は、 λ_i^1 番目の要素が 1 で、その他は 0 であるような行ベクトルである。

$\mathcal{O}^+, R^+$ の次元を明確にする時は、たとえば $\mathcal{O}_{\mu}^+, R_{\nu}^+$ と書き、おのおの $s((r+1)^p - 1)/r$ 次元列ベクトル、 $((r+1)^p - 1)/r$ 次元行ベクトルである。したがって、 $\mathcal{O}_{\mu}^+$ が上記の構造をもつ時、 $1 \leq p \leq \mu$ なる p に対して、 $\mathcal{O}_{\mu}^+$ の最初の $s((r+1)^p - 1)/r$ 次元列ベクトルも $\mathcal{O}^+$ の構造をもつ。 R_{ν}^+ に関しても同様のことが成立する。

4. 非同次双線形実現の存在条件

この節では、前節までの準備をもとにして、非同次双線形実現 (IBR) の存在条件を与える。

4.1 実現条件

まず、同次双線形実現 (HBR) の条件を述べる。

[定義 4.1] 行列系列 $\{Y_j\}_{j=1}^{\infty}$ から構成された一般化 Hankel 行列 $\mathcal{H}$ が、有限の長さ (μ, ν) をもつとは、つぎの条件が満たされることをいう。

$$\text{rank } \mathcal{H}_{\mu+i, \nu+j} = \text{rank } \mathcal{H}_{\mu, \nu} \quad i, j=0, 1, 2, \dots \quad (4.1)$$

[命題 4.2]⁴⁾ 任意の $s \times (r+1)^{i-1}$ 行列の無限系列 $\{Y_j\}_{j=1}^{\infty}$ に対して、有限次元同次双線形実現が存在するための必要十分条件は、一般化 Hankel 行列 $\mathcal{H}$ が有限の長さをもつことである。さらに、 $\text{rank } \mathcal{H} = n$ ならば、 n 次元の最小同次双線形実現が存在する。

つぎに、非同次双線形実現の存在条件を調べる。最初に、有限系列に対する実現可能性の条件を与える。

[補題 4.3] もし、ある正整数 μ, ν が存在して、以下の条件 (i), (ii) が満たされるならば、有限系列 $\{Y_1, \dots, Y_{\mu+\nu}\}$ に対する非同次双線形実現が存在する。

$$(i) \quad \text{rank } \mathcal{H}_{\mu, \nu} = \text{rank } \mathcal{H}_{\mu+1, \nu} = \text{rank } \mathcal{H}_{\mu, \nu+1} \quad (4.2)$$

$$(ii) \quad \mathcal{H}_{\mu, \nu}, \mathcal{H}_{\mu+1, \nu}, \mathcal{H}_{\mu, \nu+1} \text{ の分解を、それぞれ} \\ \mathcal{H}_{\mu, \nu} = \mathcal{O}_{\mu} R_{\nu}, \quad \mathcal{H}_{\mu+1, \nu} = \mathcal{O}_{\mu+1} R_{\nu}, \\ \mathcal{H}_{\mu, \nu+1} = \mathcal{O}_{\mu} R_{\nu+1} \quad (4.3)$$

とする時、 $\mathcal{O}_{\mu+1}, R_{\nu+1}$ は

$$\mathcal{O}_{\mu+1} = [\tilde{\mathcal{O}}_{\mu+1} \mathcal{O}_{\mu+1}^+], \quad R_{\nu+1} = \begin{bmatrix} \tilde{R}_{\nu+1} \\ R_{\nu+1}^+ \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

という構造をもつ。ここで、 $\mathcal{O}_{\mu}, R_{\nu}$ はフルランクの行列であり、 $\mathcal{O}_{\mu+1}^+, R_{\nu+1}^+$ はおのおの (3.10), (3.11) 式で定義されるベクトルである。

(証明) 命題 3.2 と命題 4.2 により、条件 (i) が成り立つ時、 $\{Y_1, \dots, Y_{\mu+\nu}\}$ に対して、HBR $\{z(0), F, G_i, H\}$ が存在して、(3.8) 式を満たす。

前節で述べたように、行列 $\mathcal{H}_{\mu, \nu}^{(i)}$ は、 $\mathcal{H}_{\mu+1, \nu}, \mathcal{H}_{\mu, \nu+1}$ の双方から定義できることに注目すれば、(4.3) 式から

$$\mathcal{H}_{\mu, \nu}^{(i)} = \mathcal{O}_{\mu}^{(i)} R_{\nu} = \mathcal{O}_{\mu} R_{\nu}^{(i)}, \quad i=1, 2, \dots, r+1 \quad (4.5)$$

と、2通りに表記できる。したがって、条件 (ii) が成立すれば、 $\mathcal{O}_{\mu}, R_{\nu}$ は $\mathcal{O}_{\mu+1}, R_{\nu+1}$ の部分行列であることと、 $\mathcal{O}_{\mu+1}^+, R_{\nu+1}^+$ の定義から、

$$\mathcal{O}_{\mu} = [\tilde{\mathcal{O}}_{\mu} \mathcal{O}_{\mu}^+], \quad \mathcal{O}_{\mu}^{(i)} = [\tilde{\mathcal{O}}_{\mu}^{(i)} \mathcal{O}_{\mu}^+] \quad (4.6)$$

$$R_{\nu} = \begin{bmatrix} \tilde{R}_{\nu} \\ R_{\nu}^+ \end{bmatrix}, \quad R_{\nu}^{(i)} = \begin{bmatrix} \tilde{R}_{\nu}^{(i)} \\ R_{\nu}^+ \end{bmatrix}, \quad R_{\nu}^{(i)} = \begin{bmatrix} \tilde{R}_{\nu}^{(i)} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$i=2, 3, \dots, r+1$$

となる。したがって、(4.5), (4.6) 式から

$$\tilde{O}_\mu^{(i)} \tilde{R}_\nu = \tilde{O}_\mu \tilde{R}_\nu^{(i)}, \quad O_\mu^{(i)} R_\nu = \tilde{O}_\mu^{(i)} \tilde{R}_\nu^{(i)} \quad (4.7)$$

$$i=2, 3, \dots, r+1$$

を得る. $\tilde{R}_\nu, R_\nu$ は共にフルランクの行列だから,

$$A = \tilde{R}_\nu^{(i)} \tilde{R}_\nu^T [\tilde{R}_\nu \tilde{R}_\nu^T]^{-1}$$

$$[N_{i-1}, b_{i-1}] = \tilde{R}_\nu^{(i)} R_\nu^T [R_\nu R_\nu^T]^{-1}, \quad (4.8)$$

$$i=2, 3, \dots, r+1$$

とおけば, (4.5)~(4.8)式から

$$\mathcal{H}_{\mu,\nu}^{(i)} = O_\mu \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} R_\nu$$

$$\mathcal{H}_{\mu,\nu}^{(i)} = O_\mu \begin{bmatrix} N_{i-1} & b_{i-1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} R_\nu, \quad (4.9)$$

$$i=2, 3, \dots, r+1$$

となる. また, $z(0)$ は R_ν の最初の列, H は O_μ の上から s 本の行であるから, 特に, $\tilde{R}_\nu$ の最初の列を $x(0)$, $\tilde{O}_\mu$ の上から s 本の行を C とおけば, (4.6)式から

$$z(0) = \begin{bmatrix} x(0) \\ 1 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

となる. このように, (4.9)式を(3.8)式と比較すると, $z(0)$, F , G_i , H は(2.3)式の構造をしていることがわかる. すなわち, $\{Y_1, \dots, Y_{\mu+\nu}\}$ に対して, IBR $\{x(0), A, N_i, C\}$ が存在する. (証明終)

Remark: 補題 4.3 と Tarn らの条件⁴⁾(付録参照)とを比較すると, 後者は以下の点で不完全である. すなわち, たとえ Hankel 行列 $\mathcal{H}_{\mu,\nu}$ が, (A.1)式のように分解できても, (4.3)式における $O_{\mu+1}, R_{\nu+1}$ が(4.4)式の構造をしている保証はない.

つぎの例題は, $\mathcal{H}_{\mu,\nu}$ は(A.1)式の分解をもつが, $O_{\mu+1}, R_{\nu+1}$ は O^+ , R^+ というベクトルをもたない例である.

【例題】 つぎの行列系列を考える.

$$Y_1 = [1], \quad Y_2 = [0 \ 1 \ 0]$$

$$Y_3 = [1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0], \quad Y_4 = \begin{bmatrix} 27 \\ 0 \dots 0 \end{bmatrix}$$

この系列から得られる Hankel 行列を計算すると, $\text{rank } \mathcal{H}_{2,2} = \text{rank } \mathcal{H}_{3,2} = \text{rank } \mathcal{H}_{2,3} = 4$ であり,

$$\mathcal{H}_{2,2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= [\tilde{O}_2 \ O_2^+] \begin{bmatrix} \tilde{R}_2 \\ R_2^+ \end{bmatrix}$$

と分解できるので, Tarn らによれば, 上記の系列に対して 3 次の IBR が存在することになる. ところが, 明らかに $\mathcal{H}_{2,3}$ には R^+ の構造の行は存在しない. さらに, 後の 4.2 節で考察するように, $\mathcal{H}_{3,2} = O_3 R_2$ というどのような分解に対しても, O_3 は O^+

の構造の列をもたない. したがって, 上記の系列に対して 3 次の IBR は存在しない.

無限系列に対する非同次双線形実現の存在条件は, つぎの定理で与えられる.

《定理 4.4》 $s \times (r+1)^{r-1}$ 行列の無限系列 $\{Y_j\}_{j=1}^\infty$ に対して, 有限次元同次双線形実現が存在し, かつその最小実現より 1 次元低い非同次双線形実現が存在するための必要十分条件は, 無限次元一般化 Hankel 行列 $\mathcal{H}$ が有限の長さ (μ, ν) をもち, かつこの正整数 μ, ν に対して, 補題 4.3 の条件(ii)が成立することである. さらに, $\text{rank } \mathcal{H} = n+1$ ならば, n 次元の最小非同次双線形実現が存在する.

(証明) (必要性) IBR $\{x(0), A, N_i, b_i, C\}$ を(2.3)式によって HBR $\{z(0), F, G_i, H\}$ に変換すれば, $\mathcal{H}$ O_μ, R_ν の各定義から明らかである.

(十分性) 命題 4.2 から, HBR $\{z(0), F, G_i, H\}$ が存在する. さらに, 補題 4.3 の証明から, この HBR は IBR $\{x(0), A, N_i, b_i, C\}$ に等価である.

したがって, HBR の最小次元が $n+1$ ならば, IBR のそれは n である. (証明終)

Remark: 無限系列の実現可能性に関する Tarn らの条件⁴⁾では, 一般化 Hankel 行列 $\mathcal{H}_{\mu,\nu}$ だけの分解

$$\mathcal{H}_{\mu,\nu} = [\tilde{O}_\mu \ O_\mu^+] \begin{bmatrix} \tilde{R}_\nu \\ R_\nu^+ \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

に注目し, $\mathcal{H}_{\mu+1,\nu}, \mathcal{H}_{\mu,\nu+1}$ の分解を考慮に入れない点で, 有限系列の場合と同様不十分である.

4.2 Hankel 行列の分解可能性の判定

定理 4.4 からわかるように, 与えられた行列系列に対して, 非同次双線形実現が存在するためには, $\mathcal{H}_{\mu+1,\nu}, \mathcal{H}_{\mu,\nu+1}$ が(4.3), (4.4)式のような分解をもたねばならない. しかし, この分解の可能性は $\tilde{R}$ の選び方に依存する. すなわち, $\tilde{R}$ のある選び方に対して分解できないからといって, 上記の分解が存在しないとはいえない. そこで, 以下では $\mathcal{H}_{\mu+1,\nu}, \mathcal{H}_{\mu,\nu+1}$ が(4.3), (4.4)式の分解をもつか否かの判定条件を, 一般的な形で考察する.

無限次元 Hankel 行列が有限の長さ (μ, ν) をもち, そのランクを $n+1$ とする. すなわち, 定義 4.1 より,

$$\text{rank } \mathcal{H}_{\mu+i,\nu+j} = \text{rank } \mathcal{H}_{\mu,\nu} = n+1, \quad i, j=0, 1, \dots \quad (4.12)$$

今, $p \geq \mu, q \geq \nu$ を満たす p, q に対して, $\mathcal{H}_{p,q}$ の任意の分解を

$$\mathcal{H}_{p,q} = O_p R_q \quad (4.13)$$

で表わす. ここで, O_p, R_q はフルランク $n+1$ の行列である. R_q の λ_i^{-1} 番目の列を ρ_i と書き,

$$R_q = [\rho_0 : \rho_1, R_1^* : \dots : \rho_{q-1}, R_{q-1}^*] \quad q \geq \nu \quad (4.14)$$

と表記し、つぎの行列を定義する。

$$R_q^0 = [\rho_1 - \rho_0, R_1^* : \dots : \rho_{q-1} - \rho_0, R_{q-1}^*] \quad (4.15)$$

つぎに、 O_p の λ_i^j 番目の行ブロックを ω_i^j と書くとし、 ω_i^j は $s \times (n+1)$ 行列である。そこで、以下のようにして、行列 Ω_p を定義する。まず、

$$\Omega^1 = \begin{bmatrix} \omega_0^1 - \omega_1^1 \\ \omega_0^1 + \omega_1^1 \\ \vdots \\ \omega_0^1 - \omega_{p-1}^1 \\ \omega_0^1 + \omega_{p-1}^1 \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

とし、 $(r+1)^{i-1} < j \leq (r+1)^i$, $i=1, \dots, p-2$ を満たす j に対して

$$\Omega^j = \begin{bmatrix} \omega_i^j - \omega_{i+1}^j \\ \vdots \\ \omega_i^j - \omega_{p-1}^j \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} i=1, 2, \dots, p-2 \\ j=2, 3, \dots, (r+1)^{p-2} \end{matrix} \quad (4.17)$$

とする。この時、

$$\Omega_p = \begin{bmatrix} \Omega^1 \\ \vdots \\ \Omega^{(r+1)^{p-2}} \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

つぎの補題が成立する。

〔補題 4.5〕 Hankel 行列 $\mathcal{H}$ が有限の長さ (μ, ν) をもち、 $\text{rank } \mathcal{H} = n+1$ とする。さらに、 $p \geq \mu$, $q \geq \nu$ なる p, q に対し、 $\mathcal{H}_{p,q}$ の任意の分解を $\mathcal{H}_{p,q} = O_p R_q$ とする。ただし、 O_p, R_q はフルランク $n+1$ の行列である。このとき、

$$O_p \hat{L}^{-1} = [\tilde{O} \quad O^+], \quad \hat{L} R_q = \begin{bmatrix} \tilde{R} \\ R^+ \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

とする正則行列 $\hat{L}$ が存在するための必要十分条件は、以下の(i), (ii)である。

$$(i) \quad \text{rank } R_{p+1}^0 = n \quad (4.20)$$

(ii) $\text{Ker } \Omega_{p+1} \neq 0$ で、 $\text{Ker } \Omega_{p+1}$ の基底を $\{e_1, \dots, e_h\}$ とする時、

$$\text{rank } [\bar{L}_1, e_1, \dots, e_h] = n+1 \quad (4.21)$$

ここで、 R_{p+1}^0 , Ω_{p+1} はおのおの(4.15), (4.18)式で定義される行列である。また、 $\bar{L}_1$ は、 $\hat{L}_1 R_{p+1}$ の最後の行を R^+ にする任意の正則行列 $\hat{L}_1$ の逆行列を、 $\hat{L}_1^{-1} = [\bar{L}_1, \bar{l}_1]$ と表わした時の $(n+1) \times n$ 行列である。

(証明) 付録参照。

この補題を用いれば、行列の有限系列と無限系列に対する、非同次双線形実現の存在条件は、改めて以下のようにいうことができる。

〔補題 4.6〕 もし、ある正整数 μ, ν が存在して、つぎの(i), (ii)が成立するならば、有限系列 $\{Y_1, \dots, Y_{\mu+\nu}\}$ に対する非同次双線形実現が存在する。

$$(i) \quad \text{rank } \mathcal{H}_{\mu,\nu} = \text{rank } \mathcal{H}_{\mu+1,\nu} \\ = \text{rank } \mathcal{H}_{\mu,\nu+1} = n+1 \quad (4.22)$$

(ii) $\mathcal{H}_{\mu,\nu}$ の任意の分解を $\mathcal{H}_{\mu,\nu} = O_\mu R_\nu$ とする。ただし、 O_μ, R_ν はフルランク $n+1$ の行列である。さらに、この分解に対応して、 $\mathcal{H}_{\mu+1,\nu} = O_{\mu+1} R_\nu$, $\mathcal{H}_{\mu,\nu+1} = O_\mu R_{\nu+1}$ とする。この時、 $R_{\nu+1}$, $O_{\mu+1}$ に関して、補題 4.5 の条件(i), (ii)が成立する。

(証明) 補題 4.5 によって、

$$O_{\mu+1} \hat{L}^{-1} = [\tilde{O} \quad O^+], \quad \hat{L} R_{\nu+1} = \begin{bmatrix} \tilde{R} \\ R^+ \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

とする正則行列 $\hat{L}$ が存在することと、上記の条件(ii)が成立することは等価である。すなわち、補題 4.3 と補題 4.6 とは等価であり、 $\{Y_1, \dots, Y_{\mu+\nu}\}$ に対する IBR が存在する。(証明終)

したがって、無限系列に対する非同次実現の存在条件として、つぎの定理が得られる。

《定理 4.7》 $s \times (r+1)^{p-1}$ 行列の無限系列 $\{Y_j\}_{j=1}^\infty$ に対して、有限次元同次双線形実現が存在し、かつその最小実現より1次元低い非同次双線形実現が存在するための必要十分条件は、無限次元一般化Hankel行列 $\mathcal{H}$ が有限の長さ (μ, ν) をもち、かつこの正整数 μ, ν に対して、補題 4.6 の条件(ii)が成立することである。さらに、このとき、最小非同次双線形実現の次元は n である。

(証明) 補題 4.6 の証明によって、定理 4.4 と定理 4.7 が等価であることから明らかである。(証明終)

Remark: 与えられた行列系列に対する非同次双線形実現の存在条件として、定理 4.4 と定理 4.7 が得られた。このうち、前者は Hankel 行列の特殊な形の分解(4.3), (4.4)式に直接依存しており、実行が困難である。これに対して、後者は、Hankel 行列の任意の分解をもとにして判定できるので、有効であると思われる。

5. おわりに

初期状態が未知である場合の双線形実現理論は、Tarn and Nonoyama によって展開された。彼らは、まず行列の有限系列と無限系列に対する同次双線形実現問題を解決し、それに基づいて非同次実現の存在条件を導いた。しかし、その条件は不完全である。本稿では、その事実を例題で示し、新たな条件を与えた。また、非同次実現の Tarn らによる条件の記述では、一般化 Hankel 行列が特殊な形の行列に分解されることに基づいており、実行が困難である。そこで本稿では、その特殊な形の分解が存在するかどうかを判定する条件を与えた。さらに、その結果を用いて、非同次双線形実現の可能性に対して、より使い易い条件を与えた。

最後に、日頃ご指導いただいている名古屋大学 中村嘉平教授に感謝の意を表する。

参考文献

- 1) A. Isidori and A. Ruberti: Realization Theory of Bilinear Systems, in Geometric Methods in System Theory, D. Q. Mayne and R. Brockett, eds., 83/130, D. Reidel, Dordrecht, Holland (1973)
- 2) P. D'Alessandro, A. Isidori and A. Ruberti: Realization and Structure Theory of Bilinear Dynamical Systems, SIAM J. Control, **12**, 517/535 (1974)
- 3) A. Isidori: Direct Construction of Minimal Bilinear Realization from Nonlinear Input-Output Maps, IEEE Trans. on Automatic Control, **AC-18**, 626/631 (1973)
- 4) T. J. Tarn and S. Nonoyama: Realization of Discrete-Time Internally Bilinear Systems, Proc. 1976 IEEE Conf. on Decision and Control, 125/133 (1976)
- 5) 舟橋, 稲垣: 双線形システムの状態推定について, Proc. SICE Symp. on Mathematical System Theory, 29/34 (1976)

《付 録》

《Lemma》(Tarn and Nonoyama, Lemma 3.3)⁴⁾
 $s \times (r+1)^{j-1}$ 行列の無限系列 $\{Y_1, \dots, Y_{\mu+\nu}\}$ に対して, n 次元最小非同次双線形実現 $\{x(0), A, N_i, b_i, C\}$ が存在するための必要十分条件は, Hankel 行列 $\mathcal{H}_{\mu,\nu}$ がつぎのように分解できることである。

$$\mathcal{H}_{\mu,\nu} = \mathcal{O} \mathcal{R} = [\tilde{\mathcal{O}} \quad \mathcal{O}^+] \begin{bmatrix} \tilde{\mathcal{R}} \\ \mathcal{R}^+ \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

ここで, $\text{rank } \mathcal{H}_{\mu,\nu} = n+1$ で, $\mathcal{O}, \mathcal{R}$ はフルランク $n+1$ の行列である。

補題 4.5 の証明のため, 一連の命題を与える。

〔命題 A.1〕 Hankel 行列 $\mathcal{H}$ が有限の長さ (μ, ν) をもち, $\text{rank } \mathcal{H} = n+1$ と仮定する。また, $p \geq \mu, q \geq \nu$ なる p, q に対して, $\mathcal{H}_{p,q}$ の任意の分解を $\mathcal{H}_{p,q} = \mathcal{O}_p \mathcal{R}_q$ ((4.13)式)とする。この時,

$$\text{rank } \mathcal{R}_q^0 \geq n \quad q \geq \nu \quad (\text{A.2})$$

である。特に, $\text{rank } \mathcal{R}_{\nu+1}^0 = n$ ならば, $q \geq \nu$ なるすべての q に対して, $\text{rank } \mathcal{R}_q^0 = n$ である。

(証明) $\mathcal{R}_q^0$ の定義 4.15 から,

$$\mathcal{R}_q T = [\rho_0 \quad \mathcal{R}_q^0] \quad (\text{A.3})$$

とする正則行列 T が存在する。したがって

$$\text{rank } [\rho_0 \quad \mathcal{R}_q^0] = \text{rank } \mathcal{R}_q = n+1 \quad (\text{A.4})$$

だから, (A.2)式が成立する。後半の証明は以下のとおりである。命題 4.2 により, (4.13)式の分解から $n+1$ 次元 HBR $\{z(0), F, G_i, H\}$ が得られる。このとき, $z(0), F, G_i$ は(2.4)式を満たすから, (4.14)式から

$$\rho_0 = z(0)$$

$$[\rho_j, \mathcal{R}_j^*]$$

$$= [F^j z(0), FR_{j-1}^*, G_1 F^{j-1} z(0), \dots, G_r R_{j-1}^*] \quad j=1, 2, \dots \quad (\text{A.5})$$

となっている。ただし, $\mathcal{R}_0^* = \rho_0$ (4.15)式より

$$\mathcal{R}_{\nu+1}^0 = [\mathcal{R}_{\nu}^0; \rho_{\nu} - \rho_0, \mathcal{R}_{\nu}^*] \quad (\text{A.6})$$

であるので, 前半の結果を使うと, $\text{rank } \mathcal{R}_{\nu+1}^0 = n$ ならば, $\rho_{\nu} - \rho_0, \mathcal{R}_{\nu}^*$ は $\mathcal{R}_{\nu}^0$ の列ベクトルに 1 次従属である。すなわち, (A.5)式より,

$$\begin{aligned} F^{\nu} z(0) - z(0), FR_{\nu-1}^*, G_i F^{\nu-1} z(0), G_i R_{\nu-1}^* \\ \in \text{span} \{Fz(0) - z(0), \mathcal{R}_1^*, \dots, \\ F^{\nu-1} z(0) - z(0), \mathcal{R}_{\nu-1}^*\} \\ i=1, \dots, r \quad (\text{A.7}) \end{aligned}$$

である。さて, $\rho_{\nu+1} - \rho_0, G_i F^{\nu} z(0)$ をそれぞれ

$$\rho_{\nu+1} - \rho_0 = F(F^{\nu} z(0) - z(0)) + Fz(0) - z(0) \quad (\text{A.8})$$

$$G_i F^{\nu} z(0) = G_i(F^{\nu} z(0) - z(0)) + G_i z(0) \quad i=1, \dots, r$$

と変形する。すると, (A.7)式から

$$\begin{aligned} F(F^{\nu} z(0) - z(0)) \\ \in \text{span} \{F^2 z(0) - Fz(0), \dots, FR_{\nu-1}^*\} \quad (\text{A.9}) \end{aligned}$$

となるので, 再び(A.7)式を用いると, $\rho_{\nu+1} - \rho_0$ は $\mathcal{R}_{\nu}^0$ に 1 次従属である。 $G_i Fz(0)$ についても同様である。このことは, $\text{rank } \mathcal{R}_{\nu+2}^0 = n$ であることを示している。この議論を q について繰り返せば, $q \geq \nu$ なるすべての q に対して, $\text{rank } \mathcal{R}_q^0 = n$ となる。

(証明終)

〔命題 A.2〕 命題 A.1 と同じ仮定をする。この時 $q \geq \nu$ を満たす各 q に対して, $\hat{\mathcal{L}} \mathcal{R}_q$ の最後の行を $\mathcal{R}^+$ にする正則行列 $\hat{\mathcal{L}}$ が存在するための必要十分条件は, $\text{rank } \mathcal{R}_{\nu+1}^0 = n$ である。ここで, $\mathcal{R}^+$ は(3.11)式で定義される行ベクトルである。

(証明) (十分性) $\text{rank } \mathcal{R}_{\nu+1}^0 = n$ ならば, 命題 A.1 によって, $q \geq \nu$ なる任意の q に対して $\text{rank } \mathcal{R}_q^0 = n$ である。したがって, $K \mathcal{R}_q^0$ の最後の行を 0 にする正則行列が存在する。すなわち,

$$K[\rho_0; \mathcal{R}_q^0] = \begin{bmatrix} X & X \\ \vdots & \vdots \\ a & 0 \dots 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.10})$$

ところで, (A.4)式から $a \neq 0$ であるので, $\hat{\mathcal{L}} = (1/a) K$ とおけば, $\hat{\mathcal{L}} \mathcal{R}_q$ の最後の行は $\mathcal{R}^+$ となる。

(必要性) $q = \nu+1$ とおけば, $\mathcal{R}^+$ の定義から明らかである。

(証明終)

〔命題 A.3〕 命題 A.1 と同じ仮定をする。この時, ある 0 でない $n+1$ 次元ベクトル l が存在して, $\mathcal{O}_p l$ が $\mathcal{O}^+$ 構造(3.10)をもつための必要十分条件は, $\text{Ker } \mathcal{Q}_p \neq 0$ である。ここで, $\mathcal{Q}_p$ は(4.18)式で定義される行列である。特に, $\mathcal{O}_{\mu+1} l = \mathcal{O}^+$ となる $l \neq 0$ が存

在するならば、 $p \geq 1$ なる任意の p に対して、 $\mathcal{O}_p l$ も $\mathcal{O}^+$ の構造をもつ。

(証明) (十分性) $\mathcal{Q}_p$ の定義から、任意の $l \in \text{Ker } \mathcal{Q}_p$, $l \neq 0$ を考えれば、各 j について $\mathcal{O}_p l$ の λ_i 番目の行ブロック $\omega_i l$ はすべて等しい。特に、 $\mathcal{Q}^1$ の定義 4.16 から $\omega_i l = 0$, $i = 0, 1, \dots, p-1$ である。すなわち、 $\mathcal{O}_p l$ は $\mathcal{O}^+$ の構造をもつ。

(必要性) $\mathcal{O}_p l$ が $\mathcal{O}^+$ の構造をもつような $l \neq 0$ が存在するならば、 $l \in \text{Ker } \mathcal{Q}_p$ である。したがって $\text{Ker } \mathcal{Q}_p \neq 0$ 。

後半の証明は以下のとおりである。命題 4.2 によって (4.13) 式の分解から $\text{HBR} \{x(0), F, G_i, H\}$ が得られ、 F, G_i, H は (2.8) 式を満たす。したがって、 $\mathcal{O}^+$ の定義から、仮定はつぎのようにい換えられる。すなわち、

$$\mathcal{O}_j F l = \mathcal{O}_j l, \quad j = 1, \dots, \mu \quad (\text{A.11})$$

あるいは、等価的に、

$$\mathcal{O}_\mu F l = \mathcal{O}_\mu l \quad (\text{A.12})$$

を満たす $l \neq 0$ が存在する。ところが、 $\mathcal{O}_\mu$ はフルランク $n+1$ の縦長の行列であるから、上式から $F l = l$ が得られる。したがって、 $p \geq 1$ を満たすすべての p に対して $\mathcal{O}_p F l = \mathcal{O}_p l$ となり、 $\mathcal{O}_p l$ は $\mathcal{O}^+$ の構造をもつ。(証明終)

〔命題 A.4〕 命題 A.1 と同じ仮定をする。 $\text{Ker } \mathcal{Q}_{\mu+1} \neq 0$ とし、 $\text{Ker } \mathcal{Q}_{\mu+1}$ の基底を $\{e_1, \dots, e_h\}$ とおく。さらに、 $\hat{L} \mathcal{R}_q$, $q \geq \nu$ の最後の行を $\mathcal{R}^+$ にする正則行列 $\hat{L}$ が存在すると仮定する。この時、 $\hat{L}' \mathcal{R}_q$ の最後の行を $\mathcal{R}^+$ にする任意の正則行列 $\hat{L}'$ に対して、 $\hat{L}$ と $\hat{L}'$ の逆行列の左から n 列部分をおおの $\bar{L}$, $\bar{L}'$ と書けば、つぎの2式は互いに等価である。

$$\text{rank}[\bar{L}, e_1, \dots, e_h] = n+1 \quad (\text{A.13})$$

$$\text{rank}[\bar{L}', e_1, \dots, e_h] = n+1 \quad (\text{A.14})$$

(証明) $\hat{L}, \hat{L}'$ が、 $\hat{L} \mathcal{R}_q, \hat{L}' \mathcal{R}_q$ の最後の行を $\mathcal{R}^+$ にするならば、 $\hat{L}' = \hat{T} \hat{L}$ を満たす正則行列 $\hat{T}$ が存在する。ただし、

$$\hat{T} = \begin{bmatrix} T & l \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad T \text{ は } n \times n \text{ 正則行列.} \quad (\text{A.15})$$

したがって、 $\bar{L}' = \bar{L} T^{-1}$ となり、(A.13) 式と (A.14) 式は等価である。(証明終)

(補題 4.5 の証明) 命題 A.2 により、 $q \geq \nu$ なる各 q に対して、 $\hat{L}_1 \mathcal{R}_q$ の最後の行を $\mathcal{R}^+$ にする正則行列 $\hat{L}_1$ が存在するための必要十分条件が条件 (i) (4.20) 式である。

さて、 L_2 を任意の $n \times n$ 正則行列として

$$\hat{L}_2 = \begin{bmatrix} L_2 & l_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.16})$$

とおけば、

$$\hat{L}_1^{-1} \hat{L}_2^{-1} = [\bar{L}_1 \bar{L}_2^{-1}, \bar{l}_1 - \bar{L}_1 L_2^{-1} l_2] \quad (\text{A.17})$$

となる。このとき、 l_2 をパラメータと考えると、

$$S = \{l = \bar{l}_1 - \bar{L}_1 L_2^{-1} l_2 \mid l_2 \in \mathcal{R}^n\} \quad (\text{A.18})$$

は、 $\mathcal{R}^{n+1}$ において、点 $\bar{l}_1$ を通る n 次元線形多様体である。しかも、 $\bar{l}_1$ は $\bar{L}_1$ に対して1次独立だから、 S は原点を通らない。したがって、条件 (ii) が成り立つ時、 $\text{Ker } \mathcal{Q}_{\mu+1}$ と S とは原点以外で共通点をもつ。すなわち、

$$\mathcal{Q}_{\mu+1} [\bar{l}_1 - \bar{L}_1 L_2^{-1} l_2] = 0 \quad (\text{A.19})$$

を満たす l_2 が存在し、 $l = \bar{l}_1 - \bar{L}_1 L_2^{-1} l_2 \neq 0$ である。

よって、命題 A.3 から、 $\mathcal{O}_{\mu+1} l = \mathcal{O}^+$ であり、特に $p \geq \mu$ なる任意の p に対して $\mathcal{O}_p l$ は $\mathcal{O}^+$ の構造をもつ。そこで、上記の $\hat{L}_1, l_2$ に対して、 $\hat{L} = \hat{L}_2 \hat{L}_1$ とおけば、 $\hat{L}_2$ は $\mathcal{R}^+$ を不変にするので、(4.23) 式を得る。

逆に、(4.23) 式を満たす正則行列 $\hat{L}$ が存在すると仮定する。 $\hat{L}_1 \mathcal{R}_{\nu+1}$ の最後の行を $\mathcal{R}^+$ にする正則行列 $\hat{L}_1$ を1個固定する。 $\hat{L}_1 \mathcal{R}_{\nu+1}$ に左から掛けて $\mathcal{R}^+$ を保存するような正則行列は (A.16) 式の形に限るので、 $\hat{L} = \hat{L}_2 \hat{L}_1$ とおく。このとき、仮定から、 $\mathcal{O}_{\mu+1} \hat{L}^{-1}$ の最後の列が $\mathcal{O}^+$ になるならば、命題 A.3 により、 $\text{Ker } \mathcal{Q}_{\mu+1} \neq 0$ である。さらに、(A.19) 式が成り立つから、 $\bar{L}_1$ は (4.21) 式を満たす。したがって、命題 A.4 から、 $\hat{L}_1' \mathcal{R}_{\nu+1}$ の最後の行を $\mathcal{R}^+$ にする任意の正則行列 $\hat{L}_1'$ に対して (4.21) 式が成立する。

(証明終)