周波数応答のシーケンシャルな多点同時最小2乗推定[†]

水口 重 則*・田 川 遼三郎*

Sequential Least-Squares Estimation of Frequency Responses

Shigenori MIZUGUCHI* and Ryoaburo TAGAWA*

This paper proposes a sequential procedure for estimating frequency responses of linear discrete-time systems, the output of which is contaminated with a stationary noise having an unknown mean value.

A mathematical model of the system is formulated by setting a situation that the noisy steady-state output to a composite sinusoidal input is observed. Applying the least-squares approach to the model, the values of real and imaginary parts of the frequency response of the system are estimated simultaneously at the frequencies corresponding to the components of the input signal. A sequential procedure is given for on-line implementation. In it the estimates are updated every M samples, where M is the number of the samples in one period of the input signal.

It is shown that the estimates are unbiased and consistent under the following two conditions even if the mean of the noise is unknown:

- 1) the frequencies of the input signal are integral multiples of the basic frequency $2\pi/N$, where N is the number of the samples in the measurement time,
- 2) the measurement time is integral multiple of the period of the input signal.

An example of digital simulation is given also to show the usefulness of the proposed procedure.

1. は し が き

線形システムの周波数応答の推定に関しては、これまでに多くの研究がなされている¹⁾。それらの中で扱われている代表的方法には、通信工学などで用いられ

てきた周波数応答法¹⁾、過渡応答の直接的 Fourier 変換に基づく方法²⁾、数理統計学において発展してきた相関法に基づく方法³⁾、さらに最近では予測モデルに基づく方法⁴⁾などがある。予測モデルに基づく方法は、精度のよい推定値を与えるが、パラメータ推定問題に帰着し、むしろパラメトリックなモデルを推定する方法である。直接的 Fourier 変換法と相関法に基づく方法は、それぞれアリアジングならびに適当なウィンドウの選択などが問題になる。周波数応答法は、正弦波入力に対する定常応答から1個ずつ周波数応答を測定するので時間がかかり、また雑音の影響を積極的に処理していない。この雑音を考慮した方法が、相関法に基づくサーボ・アナライザである⁵⁾、しかし、サーボ・アナライザも周波数を変えて繰り返しテストする必要がある。上の代表的方法のほとんどは、データ数の増加とともに非常に多くのメモリーを必要としたり、データ処理に時間がかかりすぎるなどの点において、いずれも適応制御などへの応用が困難である。

システム同定の適応制御などへの応用においては、データ処理をプロセスコンピュータなどを用いてオンラインで行うことが重要である。この観点に基づいて、本論文は線形離散時間値系に対して合成正弦波入力を用い、周波数応答を多点にしかも同時に推定する方法を提案し、それをオンライン化するための間欠的ではあるがシーケンシャルな推定アルゴリズムを述べたものである。周波数応答を多点同時推定しようという考えはすでにある^{6)~8)}。文献 6) は、相関法に基づいており近似を使用している。文献 7) と 8) は、それぞれアナログならびにデジタルの狭帯域フィルタを必要とし、一致推定量を得るのが困難である。本論文で提案する方法では、合成正弦波入力の各周波数と観測時間に関する二つの条件を付けることによって、上述の近似もフィルタも用いないで間欠的ではあるがシーケンシャルに一致推定量が得られる。その際、雑音の平均値が零であることは必ずしも必要でない。また、それぞれの推定値の推定誤差は互いに漸近的に無

[†] 電気四学会北海道支部連合大会で発表 (昭 52・10)

* 北海道大学工学部 札幌市北区北 13 条西 8 丁目

* Faculty of Engineering, Hokkaido University, Sapporo

(Received February 21, 1978)

相関になる。

2章で、周波数応答の多点間同時最小2乗推定式を誘導し、その推定値が不偏・一致推定量であることを3章で明らかにする。4章では、シーケンシャルな推定式を導き、5章でシミュレーション例を与える。

2. 周波数応答の多点間同時最小2乗推定

この論文では、安定な線形離散時間値系を考える。インパルス応答例 $g(k)$ をもつシステムに、 $k=0$ より入力 $u(k)$ を加えたとき、出力 $y(k)$ は

$$y(k) = \sum_{h=0}^k g(h)u(k-h) \quad (1)$$

で与えられる。ただし、簡単のためサンプリング周期は1秒と仮定する。

入力 $u(k)$ として、角周波数 ω_l' 、振幅 u_l の L 個の正弦波からなる合成正弦波

$$u(k) = \sum_{l=1}^L u_l \sin \omega_l' k \quad (2)$$

を用いるものとする。

さらに、出力 $y(k)$ の観測値 $z(k)$ が平均値一定な定常雑音 $v(k)$ に加法的に汚されているとすると、(1)式と(2)式から(3)式を得る。ただし、 $v(k)$ の自己相関関数は summable である。

$$\begin{aligned} z(k) &= y(k) + v(k) \\ &= \sum_{h=0}^k g(h) \left\{ \sum_{l=1}^L u_l \sin \omega_l' (k-h) \right\} + v(k) \end{aligned} \quad (3)$$

和の順序を入れかえると、(3)式より

$$z(k) = \sum_{l=1}^L u_l \left\{ \sum_{h=0}^k g(h) \sin \omega_l' (k-h) \right\} + v(k) \quad (4)$$

を得る。また、

$$\sin \omega_l' k = \frac{1}{2j} (e^{j\omega_l' k} - e^{-j\omega_l' k}) \quad (5)$$

であるから、(5)式を(4)式に代入すると、

$$\begin{aligned} z(k) &= \frac{1}{2j} \sum_{l=1}^L u_l \left\{ \sum_{h=0}^k g(h) [e^{j\omega_l' (k-h)} - e^{-j\omega_l' (k-h)}] \right\} \\ &\quad + v(k) \\ &= \frac{1}{2j} \sum_{l=1}^L u_l \left\{ e^{j\omega_l' k} \sum_{h=0}^k g(h) e^{-j\omega_l' h} \right. \\ &\quad \left. - e^{-j\omega_l' k} \sum_{h=0}^k g(h) e^{j\omega_l' h} \right\} + v(k) \end{aligned} \quad (6)$$

が得られる。

さて、 k が無限に大きい定常状態において、上式(6)は

$$z(k) = \frac{1}{2j} \sum_{l=1}^L u_l \left\{ e^{j\omega_l' k} \sum_{h=0}^{\infty} g(h) e^{-j\omega_l' h} \right.$$

$$\left. - e^{-j\omega_l' k} \sum_{h=0}^{\infty} g(h) e^{j\omega_l' h} \right\} + v(k) \quad (7)$$

で表わせる⁹⁾。

システムのパルス伝達関数 $G(z)$ は、インパルス応答列 $g(h)$ の z 変換であるから

$$G(z) = \sum_{h=0}^{\infty} g(h) z^{-h} \quad (8)$$

なる関係式で表わせる。上式(8)で $z = e^{j\omega}$ と置けば、

$$G(j\omega) = \sum_{h=0}^{\infty} g(h) e^{-j\omega h} \quad (0 \leq \omega \leq \pi) \quad (8')$$

で周波数応答が表わされる。

(8') 式の関係を(7)式に代入すると、合成正弦波入力系列に対するシステムの定常応答系列は、次式(9)のような簡単な式で表わせる。

$$\begin{aligned} z(k) &= \frac{1}{2j} \sum_{l=1}^L u_l \{ G(j\omega_l') e^{j\omega_l' k} \\ &\quad - G(-j\omega_l') e^{-j\omega_l' k} \} + v(k) \end{aligned} \quad (9)$$

そこで、

$$G(j\omega_l') = R(\omega_l') + jX(\omega_l') \quad (10)$$

と置くと、(9)式は(11)式になる。

$$\begin{aligned} z(k) &= \sum_{l=1}^L \{ u_l \sin \omega_l' k R(\omega_l') + u_l \cos \omega_l' k X(\omega_l') \} \\ &\quad + v(k) \end{aligned} \quad (11)$$

(11)式をベクトル形式で表現するため、つぎのベクトルを定義する。すなわち、

$$\mathbf{s}(k) = [u_1 \sin \omega_1' k \cdots u_L \sin \omega_L' k] \quad (12)$$

$$\mathbf{c}(k) = [u_1 \cos \omega_1' k \cdots u_L \cos \omega_L' k] \quad (13)$$

$$\mathbf{q} = [R(\omega_1') \cdots R(\omega_L') \mid X(\omega_1') \cdots X(\omega_L')]^T \quad (14)$$

ただし、 T は行列の転置を示す。

(12)、(13)式ならびに(14)式を使えば、(11)式は

$$z(k) = [\mathbf{s}(k) \mid \mathbf{c}(k)] \mathbf{q} + v(k) \quad (15)$$

あるいは

$$z(k) = \boldsymbol{\phi}(k) \mathbf{q} + v(k) \quad (16)$$

ただし

$$\boldsymbol{\phi}(k) = [\mathbf{s}(k) \mid \mathbf{c}(k)] \quad (17)$$

のように簡単に表現できる。

さて、定常状態に達した後の N 個のデータ $\{z(k) : k=1, \dots, N\}$ に対して(16)式に最小2乗法を適用すると、周波数応答のベクトル $\mathbf{q}$ の推定値 $\hat{\mathbf{q}}$ は、 $2L \leq N$ のとき

$$\hat{\mathbf{q}} = \left\{ \sum_{k=1}^N \boldsymbol{\phi}^T(k) \boldsymbol{\phi}(k) \right\}^{-1} \left\{ \sum_{k=1}^N \boldsymbol{\phi}^T(k) z(k) \right\} \quad (18)$$

あるいは

$$\hat{\mathbf{q}} = \left\{ \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \boldsymbol{\phi}^T(k) \boldsymbol{\phi}(k) \right\}^{-1} \left\{ \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \boldsymbol{\phi}^T(k) z(k) \right\} \quad (19)$$

で与えられる。ただし、合成正弦波入力 of 各角周波数 ω_l' は $2\pi/N$ の任意の整数倍である。

つぎの章では、(18)あるいは(19)式で与えられる周波数応答の多点同時最小2乗推定値が、不偏でかつ一致推定量であることを示す。

3. 多点同時最小2乗推定値の統計的性質

最初に、周波数応答の多点同時最小2乗推定値が不偏推定量であることを示そう。(19)式に(16)式を代入し、変形すれば、

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{q}} &= \left\{ \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \boldsymbol{\phi}^T(k) \boldsymbol{\phi}(k) \right\}^{-1} \left\{ \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \boldsymbol{\phi}^T(k) [\boldsymbol{\phi}(k) \mathbf{a} \right. \\ &\quad \left. + v(k)] \right\} \\ &= \mathbf{a} + \left\{ \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \boldsymbol{\phi}^T(k) \boldsymbol{\phi}(k) \right\}^{-1} \left\{ \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \boldsymbol{\phi}^T(k) v(k) \right\}\end{aligned}\quad (20)$$

となる。そこで、推定誤差ベクトルを $\tilde{\mathbf{q}}$ とすると、上式(20)からつぎの(21)式を得る。

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{q}} &= \hat{\mathbf{q}} - \mathbf{a} \\ &= \left\{ \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \boldsymbol{\phi}^T(k) \boldsymbol{\phi}(k) \right\}^{-1} \left\{ \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \boldsymbol{\phi}^T(k) v(k) \right\}\end{aligned}\quad (21)$$

(21)式の両辺の期待値をとり、 $v(k)$ の平均値が一定であることを考慮すると、

$$\begin{aligned}E[\tilde{\mathbf{q}}] &= \left\{ \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \boldsymbol{\phi}^T(k) \boldsymbol{\phi}(k) \right\}^{-1} \left\{ \frac{E[v(k)]}{N} \sum_{k=1}^N \boldsymbol{\phi}^T(k) \right\} \\ &= \mathbf{0}\end{aligned}\quad (22)$$

となる。ここで、 E は期待値演算を示す。(22)式は、 $\sum_{k=1}^N \boldsymbol{\phi}(k) = \mathbf{0}$ から導かれたものであり、雑音 $v(k)$ の平均値が零である必要はない。

つぎに、多点同時最小2乗推定値 $\hat{\mathbf{q}}$ が一致推定量であることを示す。その際、それらの推定値が漸近的無相関になることも明らかになる。

推定ベクトル $\hat{\mathbf{q}}$ の共分散行列 $\text{cov}\{\hat{\mathbf{q}}\}$ は、(21)と(22)式から

$$\begin{aligned}\text{cov}\{\hat{\mathbf{q}}\} &= E\{[\hat{\mathbf{q}} - E(\hat{\mathbf{q}})][\hat{\mathbf{q}} - E(\hat{\mathbf{q}})]^T\} \\ &= E\left\{ \left[\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \boldsymbol{\phi}^T(k) \boldsymbol{\phi}(k) \right]^{-1} \left[\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \boldsymbol{\phi}^T(k) v(k) \right] \right. \\ &\quad \left. \cdot \left[\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \boldsymbol{\phi}(k) v(k) \right] \left[\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \boldsymbol{\phi}^T(k) \boldsymbol{\phi}(k) \right]^{-1} \right\}\end{aligned}\quad (23)$$

で与えられる。

観測雑音 $v(k)$ の平均値を c とし、

$$v'(k) = v(k) - c \quad (24)$$

と置けば、 $v'(k)$ は平均値零になる。

(24)式を(23)式に代入し、変形すると

$$\begin{aligned}\text{cov}\{\hat{\mathbf{q}}\} &= E\left\{ \left[\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \boldsymbol{\phi}^T(k) \boldsymbol{\phi}(k) \right]^{-1} \right. \\ &\quad \cdot \left[\frac{c}{N} \sum_{k=1}^N \boldsymbol{\phi}^T(k) + \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \boldsymbol{\phi}^T(k) v'(k) \right] \\ &\quad \cdot \left[\frac{c}{N} \sum_{k=1}^N \boldsymbol{\phi}(k) + \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \boldsymbol{\phi}(k) v'(k) \right] \\ &\quad \cdot \left. \left[\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \boldsymbol{\phi}^T(k) \boldsymbol{\phi}(k) \right]^{-1} \right\} \\ &= E\left\{ \left[\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \boldsymbol{\phi}^T(k) \boldsymbol{\phi}(k) \right]^{-1} \right. \\ &\quad \cdot \left[\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \boldsymbol{\phi}^T(k) v'(k) \right] \\ &\quad \cdot \left[\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \boldsymbol{\phi}(k) v'(k) \right] \\ &\quad \cdot \left. \left[\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \boldsymbol{\phi}^T(k) \boldsymbol{\phi}(k) \right]^{-1} \right\}\end{aligned}\quad (25)$$

が導ける。(25)式で $\sum_{k=1}^N \boldsymbol{\phi}(k) = \mathbf{0}$ を使った。

確率過程 $v'(k)$ を $1 \leq k \leq N$ の区間で Fourier 級数展開すると、次式(26)を得る。

$$v'(k) = \frac{\alpha_0'}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n' \cos n\omega_0 k + \beta_n' \sin n\omega_0 k) \quad (26)$$

ここで、

$$\alpha_n' = \frac{2}{N} \sum_{k=1}^N v'(k) \cos n\omega_0 k \quad (n=0, 1, 2, \dots) \quad (27)$$

$$\beta_n' = \frac{2}{N} \sum_{k=1}^N v'(k) \sin n\omega_0 k \quad (n=1, 2, \dots) \quad (28)$$

ただし

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{N} \quad (29)$$

$$\omega_l' = K_l \omega_0 \quad (K_l: \text{整数}) \quad (30)$$

さて、合成正弦波入力の角周波数 $\{\omega_l': l=1, \dots, L\}$ に対応した Fourier 係数 α'_{K_l} と β'_{K_l} のみ考える。また、後に文献10)の結果を用いるので、文献10)の Fourier 級数の定義式に合うように、 $\alpha_l = \sqrt{N} \alpha'_{K_l}/2$, $\beta_l = \sqrt{N} \beta'_{K_l}/2$ なる変換を行うと、(27)と(28)式は

$$\alpha_l = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^N v'(k) \cos \omega_l' k \quad (l=1, 2, \dots, L) \quad (31)$$

$$\beta_l = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^N v'(k) \sin \omega_l' k \quad (l=1, 2, \dots, L) \quad (32)$$

となる。(31)と(32)式を $l=1, 2, \dots, L$ に対して連立させ、ベクトル表現すると

$$\frac{1}{\sqrt{N}}[u_1\beta_1 \dots u_L\beta_L; u_1\alpha_1 \dots u_L\alpha_L]^T$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \phi^T(k) v'(k) \quad (33)$$

が得られる。

(33)式からつぎの(34)式が計算できる。

$$\begin{aligned} & E \left\{ \left[\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \phi^T(k) v'(k) \right] \left[\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \phi(k) v'(k) \right]^T \right\} \\ &= \frac{1}{N} E \{ [u_1\beta_1 \dots u_L\beta_L; u_1\alpha_1 \dots u_L\alpha_L]^T [u_1\beta_1 \dots u_L\beta_L; u_1\alpha_1 \dots u_L\alpha_L] \} \\ &= \frac{1}{N} \begin{bmatrix} u_1^2 E\{\beta_1\beta_1\} & \dots & u_1 u_L E\{\beta_1\beta_L\} & u_1^2 E\{\beta_1\alpha_1\} & \dots & u_1 u_L E\{\beta_1\alpha_L\} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_L u_1 E\{\beta_L\beta_1\} & \dots & u_L^2 E\{\beta_L\beta_L\} & u_L u_1 E\{\beta_L\alpha_1\} & \dots & u_L^2 E\{\beta_L\alpha_L\} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_1^2 E\{\alpha_1\beta_1\} & \dots & u_1 u_L E\{\alpha_1\beta_L\} & u_1^2 E\{\alpha_1\alpha_1\} & \dots & u_1 u_L E\{\alpha_1\alpha_L\} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_L u_1 E\{\alpha_L\beta_1\} & \dots & u_L^2 E\{\alpha_L\beta_L\} & u_L u_1 E\{\alpha_L\alpha_1\} & \dots & u_L^2 E\{\alpha_L\alpha_L\} \end{bmatrix} \quad (34) \end{aligned}$$

相関係数 $E\{\alpha_i\beta_k\}$, $E\{\alpha_i\alpha_k\} (i \neq k)$ と $E\{\beta_i\beta_k\} (i \neq k)$ は、 N の無限大極限において零になるから¹⁰⁾, (34)式は極限においてつぎの(35)式になる。

$$\begin{aligned} & \lim_{N \rightarrow \infty} E \left\{ \left[\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \phi^T(k) v'(k) \right] \left[\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \phi(k) v'(k) \right]^T \right\} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \\ & \quad \cdot \text{diag.} [u_1^2 \sigma_1^2 \dots u_L^2 \sigma_L^2; u_1^2 \sigma_1^2 \dots u_L^2 \sigma_L^2] \quad (35) \end{aligned}$$

ここに、 $\text{diag.}[\cdot]$ は $\cdot$ を対角要素にもつ対角行列であり、また

$$\sigma_k^2 = E\{\alpha_k^2\} = E\{\beta_k^2\} \quad (k=1, 2, \dots, L) \quad (36)$$

(17)式を考慮すると、(25)式中の逆行列の部分は対角行列になる(詳細は4章を参照)。故に、(35)式を(25)式に代入し極限をとると、

$$\begin{aligned} & \lim_{N \rightarrow \infty} \text{cov}[\hat{q}] \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \text{diag.} \left[\frac{2\sigma_1^2}{u_1^2} \dots \frac{2\sigma_L^2}{u_L^2}; \frac{2\sigma_1^2}{u_1^2} \dots \frac{2\sigma_L^2}{u_L^2} \right] \\ &= 0 \quad (37) \end{aligned}$$

となる。(22)と(37)式から、周波数応答の多点同時最小2乗推定値 $\hat{q}$ が一致定値であることがわかる。

4. 多点同時シーケンシャル推定

周波数応答の多点同時最小2乗推定値は、(19)式を解くことによって求まる。この章では、合成正弦波入力の周波数と観測時間に関する二つの条件を設定することによって、(19)式の逆行列演算を解析的に求め、それをもとにオンライン化のためのシーケンシャルなアルゴリズムを導く。

(19)式において逆行列演算を必要とする行列は、(17)式を用いることによって次式(38)のようなブロック行列で表わせる。

$$\begin{aligned} & \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \phi^T(k) \phi(k) \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N s^T(k) s(k) & \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N s^T(k) c(k) \\ \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N c^T(k) s(k) & \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N c^T(k) c(k) \end{bmatrix} \quad (38) \end{aligned}$$

合成正弦波入力 $u(k)$ の各角周波数 $\{\omega_l' : l=1, \dots, L\}$ に対してつぎの二つの条件を設ける。

条件(i) $\omega_l' = K_l \omega_0, \dots, \omega_L' = K_L \omega_0$

条件(ii) $N = M \cdot i \quad (M=2\pi/\omega_1')$

ここに、 i は自然数である。

三角関数の直交性により(38)式の行列は対角行列になる。すなわち、各ブロック行列は(12)と(13)式から

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N s^T(k) s(k) = \begin{bmatrix} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N u_1^2 \sin \omega_1 k \sin \omega_1 k & \dots & \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N u_1 u_L \sin \omega_1 k \sin \omega_L k \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N u_L u_1 \sin \omega_L k \sin \omega_1 k & \dots & \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N u_L^2 \sin \omega_L k \sin \omega_L k \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \text{diag.} [u_1^2 \dots u_L^2] \quad (39)$$

また

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \mathbf{c}^T(k) \mathbf{s}(k) = \begin{bmatrix} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N u_1^2 \cos \omega_1 k \sin \omega_L k & \cdots & \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N u_1 u_L \cos \omega_1 k \sin \omega_L k \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N u_L u_1 \cos \omega_L k \sin \omega_1 k & \cdots & \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N u_L^2 \cos \omega_L k \sin \omega_L k \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (40)$$

同様にして,

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \mathbf{c}^T(k) \mathbf{c}(k) = \frac{1}{2} \text{diag.} [u_1^2 \cdots u_L^2] \quad (41)$$

および

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \mathbf{s}^T(k) \mathbf{c}(k) = \mathbf{0} \quad (42)$$

になる。それ故、(39)、(40)、(41)式ならびに(42)式を(38)式に代入すると、

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \boldsymbol{\phi}^T(k) \boldsymbol{\phi}(k) \\ = \frac{1}{2} \text{diag.} [u_1^2 \cdots u_L^2; u_1^2 \cdots u_L^2] \end{aligned} \quad (43)$$

が得られる。

したがって、目的の逆行列は(43)式より

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \boldsymbol{\phi}^T(k) \boldsymbol{\phi}(k) \right\}^{-1} \\ = 2 \text{diag.} [u_1^{-2} \cdots u_L^{-2}; u_1^{-2} \cdots u_L^{-2}] \end{aligned} \quad (44)$$

で与えられる。

そこで、(19)式に(44)式を代入すると、周波数応答の多点同時推定値 $\hat{\mathbf{q}}$ は次式(45)で求まる。

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{q}} &= 2 \text{diag.} [u_1^{-2} \cdots u_L^{-2}; u_1^{-2} \cdots u_L^{-2}] \\ &\cdot \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \boldsymbol{\phi}^T(k) \mathbf{z}(k) \\ &= \frac{2}{N} \sum_{k=1}^N \boldsymbol{\phi}_0^T(k) \mathbf{z}(k) \end{aligned} \quad (45)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\phi}_0(k) &= [u_1^{-1} \sin \omega_1' k \cdots u_L^{-1} \sin \omega_L' k \\ &\quad u_1^{-1} \cos \omega_1' k \cdots u_L \cos \omega_L' k] \end{aligned} \quad (46)$$

と置いた。(45)式を詳細に表わすため、(17)式を考慮して(12)と(13)式を(45)式に代入すると、次式(47)を得る。

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{q}} &= \left[\frac{2}{u_1 N} \sum_{k=1}^N z(k) \sin \omega_1' k \cdots \frac{2}{u_L N} \sum_{k=1}^N z(k) \sin \omega_L' k \right. \\ &\quad \left. \frac{2}{u_1 N} \sum_{k=1}^N z(k) \cos \omega_1' k \cdots \frac{2}{u_L N} \sum_{k=1}^N z(k) \cos \omega_L' k \right] \end{aligned} \quad (47)$$

(47)式のベクトルの各要素が、サーボアナライザの基本方程式⁵⁾の離散値化に相当していることがわかる。

つぎに、(45)式で与えられる周波数応答の多点同時推定値 $\hat{\mathbf{q}}$ を周期 M でシーケンシャルに得る方法を与えよう。ここに、周期 M は入力信号の周期に相当

している。

$M(i-1)$ 個のデータから得られる推定値を $\hat{\mathbf{q}}(i-1)$ で示す。このとき、(45)式より

$$\hat{\mathbf{q}}(i-1) = \frac{2}{M(i-1)} \sum_{k=1}^{M(i-1)} \boldsymbol{\phi}_0^T(k) \mathbf{z}(k) \quad (48)$$

が求まる。また、 Mi 個のデータを使った場合は、

$$\hat{\mathbf{q}}(i) = \frac{2}{Mi} \sum_{k=1}^{Mi} \boldsymbol{\phi}_0^T(k) \mathbf{z}(k) \quad (49)$$

になる。(49)式を部分和に表わし、(48)式を用いると、(50)式が得られる。

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{q}}(i) &= \frac{2}{Mi} \sum_{k=1}^{M(i-1)} \boldsymbol{\phi}_0^T(k) \mathbf{z}(k) \\ &\quad + \frac{2}{Mi} \sum_{k=M(i-1)+1}^{Mi} \boldsymbol{\phi}_0^T(k) \mathbf{z}(k) \\ &= \hat{\mathbf{q}}(i-1) + \frac{1}{i} \{ \boldsymbol{\phi}(i) - \hat{\mathbf{q}}(i-1) \} \end{aligned} \quad (50)$$

ただし、

$$\boldsymbol{\phi}(i) = \frac{2}{M} \sum_{k=M(i-1)+1}^{Mi} \boldsymbol{\phi}_0^T(k) \mathbf{z}(k) \quad (51)$$

(50)と(51)式を用いると、周波数応答の多点同時最小2乗推定値 $\hat{\mathbf{q}}(i)$ は、 M 個のデータが得られるたびに、シーケンシャルに求めることができる。

5. 数値実験例

本論文で提案した周波数応答の多点同時シーケンシャル推定法の有効性を確認するため、(52)式で記述される2次振動系に対して本方法を適用した。

$$G(z^{-1}) = \frac{1.0z^{-1} + 0.5z^{-2}}{1 - 1.5z^{-1} + 0.7z^{-2}} \quad (52)$$

入力は、サンプリング周期を1秒として

$$u(k) = \sum_{l=1}^5 0.63 \sin \omega_l' k \quad (53)$$

を用いた。ここに、 $\omega_l' (l=1, \dots, 5)$ は

$$\boldsymbol{\omega} = [0.131, 0.393, 0.524, 0.785, 1.05] \quad (54)$$

とした。また、観測雑音 $v(k)$ は、平均値1の正規性乱数をフィルタ

$$G_v(z^{-1}) = \frac{K}{1 - 0.368z^{-1}} \quad (55)$$

を通して有色化した。ここに、 K は NS 比を調節するためのゲインである。この場合の推定周期 M は 48 である。出力での NS 比が 10 [%] のときの周波数応

Fig. 1 Sequential estimates for the values of real part of the frequency response

答の実部 $R(\omega_i')$ と虚部 $X(\omega_i')$ のシーケンシャル推定値の様子をそれぞれ Fig. 1 と Fig. 2 に示した。

Fig. 1 と Fig. 2 から、本方法が有効であることが推測できる。

6. む す び

線形離散時間値系の周波数応答を多点同時シーケンシャル推定する方法を提案した。それは、入力信号として合成正弦波を用い、それに対する出力の定常応答の観測値に最小2乗法を適用して導かれた。この方法によって与えられる推定値は、観測雑音の平均値が零であるか否かにかかわらず、不偏でかつ一致推定量であることを示した。

同様な方法が連続時間値系に対しても適用可能である。また、周波数応答の多点同時推定値からシステムのパラメータを推定することも可能である^{11), 12)}。

終りに、日頃ご討論を賜わっている北海道大学電気工学科 土谷武士助教授に感謝します。

参 考 文 献

- 1) T.W. Kerlin: Frequency Response Testing in Nuclear Reactors, Academic Press (1974)
- 2) 宮崎, 大正: プロセス動特性測定法の比較, 計測と制御,

Fig. 2 Sequential estimates for the values of imaginary part of the frequency response

- 7-9, 641/652 (1968)
- 3) H. Akaike and Y. Yamanouchi: On the Statistical Estimation of Frequency Response Function, Ann. Inst. Statist. Math., **14**-1, 23/56 (1962)
- 4) H. Akaike: Fitting Autoregressive Models for Prediction, Ann. Inst. Statist. Math., **21**-2, 243/247 (1969)
- 5) C.S. Elsdén and A.J. Ley: A Digital Transfer Function Analyser based on Pulse Rate Techniques, Automatica, **5**-1, 51/60 (1969)
- 6) 長谷川, 萩原: 周波数応答の多点同時測定, 第6回 SICE 学術講演会予稿集, 523/524 (1967)
- 7) 茅, 川端: M 系列信号を用いた周波数応答の多点同時測定, 第7回 SICE 学術講演会予稿集, 495/496 (1968)
- 8) 立花: デジタル・フィルタを用いた同定, 計測自動制御学会論文集, **9**-4, 438/445 (1973)
- 9) 伊沢: 自動制御入門, 293/300, オーム社 (1967)
- 10) M. Hamidi and J. Pearl: On the Residual Correlation of Finite-Dimensional Discrete Fourier Transforms of Stationary Signals, IEEE Trans., **IT-21**-4, 480/482 (1975)
- 11) 水口, 田川: マルチ・サバアナライザを用いた線形連続時間値系のパラメータ推定, 電気学会情報処理研究会資料, IP-77-22 (1977)
- 12) 水口: 線形連続時間値系のシーケンシャルパラメータ推定法—複素式誤差法のオンライン化—, 第6回制御理論シンポジウム資料, 129/134 (1977)