Markov 連鎖に依存する係数をもつ線形確率系の状態推定

—観測雑音の統計量が不規則に変動する場合—

武内良樹*・明石 一*

State Estimation of Linear Stochastic Systems with Coefficients Depending on a Markov Chain

—Case of Observation Noise with Random Statistics—

Yoshiki TAKEUCHI* and Hajime AKASHI*

An algorithm of minimal variance state estimation is shown for a class of continuous-time linear stochastic systems with coefficients depending on a finite state Markov chain. The class of the systems considered in this paper is more general than that of problems previously treated, in that the statistics of the observation noise can be also depend on the Markov chain. The minimal variance state estimate by using continuous-time observations is not feasible because the mathematical measurability of the noise covariance is guaranteed by the differential operation which can not be realized in finite steps. For this reason, the available observations are assumed to be sampled from a continuous-time process in a short period on a finite set of time points. Except for a Bayesian type formula for the *a posteriori* probabilities of the Markov chain, the algorithm consists of a set of difference equations similar to stochastic differential equations in the case of continuous-time observations. A numerical example is shown to illustrate the performance of the algorithm.

1. 緒 言

Kalman^{1),2)} が 1960 年代の初頭に、正規性白色雑音のもとで観測される線形システムの状態推定問題について最適状態推定理論を確立して以来、数多くの発展的研究が状態推定問題について行われてきた。これらのうちの一つに、係数行列の値が不規則に変化する線形システムの状態推定問題がある。実際、観測機構の設置環境の変化やシステムの構成要素における故障の発生などの原因により、システムの動特性が突然変化

したり、観測信号のレベルや観測雑音の統計的性質が不規則に変化したりすることがある。

この種の状態推定問題を取り扱った研究で発端をなすものの一つとして、Markov 連鎖に依存して係数行列の値が変化する離散時間線形系について Ackerson・Fu³⁾ による研究がある。以後、連続時間系についても同類の研究がなされてきた^{4)~7)}が、連続時間系では、観測雑音の統計的性質が不規則に変化する場合に対する研究は、その重要性にもかかわらず、ほとんどなされていない。

本論文では、文献 6) で取り扱った数学モデル、すなわち、Markov 連鎖に依存する係数行列をもつ線形確率微分方程式を、新たに観測雑音項の係数も Markov 連鎖に依存するものとして一般化し、観測雑音の統計的性質が不規則に変化する場合の最小分散状態推定問題について考察する。次節で述べるとおり、この問題では、連続時間の観測データのすべてを利用して、数値的に最小分散状態推定を実行することは本質的に不可能である。このため、非常に小さい時間間隔でサンプルされた有限個の観測データを用いることを前提とし、差分形状の状態推定アルゴリズムを構成する。また、数値例によって、提案アルゴリズムの有効性について検討を加える。

2. 問題の記述

システムは、 n 次元確率微分方程式

$$\begin{aligned} dx_t &= f(t, x_t, \alpha_t) dt + G(t, \alpha_t) dw(t) \\ x_0 &= x^0, \quad t \in [0, T] \end{aligned} \quad (1)$$

で記述されるものとする。また、このシステムの状態変数 x_t に依存する m 次元確率過程 y_t が

$$\begin{aligned} dy_t &= h(t, x_t, \alpha_t) dt + R(t, \alpha_t) dv(t) \\ y_0 &= 0, \quad t \in [0, T] \end{aligned} \quad (2)$$

によって与えられるものとする。ただし、ここで、

* 京都大学工学部 京都市左京区吉田本町

* Faculty of Engineering, Kyoto University, Kyoto
(Received September 28, 1978)

$w(t) \in \mathbf{R}^{d_1}$ および $v(t) \in \mathbf{R}^{d_2}$ は標準 Brown 運動過程であり, α_i は有限離散空間 $\mathbf{L} = \{1, 2, \dots, l\}$ 上で値をとる右連続 Markov 過程 (Markov 連鎖) である. α_i は初期分布 $\Pi_0(i) \triangleq P\{\alpha_0 = i\}$, $i \in \mathbf{L}$, および, 遷移確率 $P(s, j | t, i) \triangleq P\{\alpha_s = j | \alpha_t = i\}$, $s > t$, $i, j \in \mathbf{L}$ をもち, これらは条件:

(C-1) すべての $i \in \mathbf{L}$ について, $\Pi_0(i) > 0$ である.

(C-2) すべての $i, j \in \mathbf{L}$ に対して, t に関して一様に $\frac{1}{s} \{P(t+s, j | t, i) - \chi_{ij}(j)\} \rightarrow \sigma_{ij}(t)$ ($s \downarrow 0$) である.

(C-3) $\sigma_{ij}(t)$ は t に関して一様有界かつ連続な関数で $\sigma_{ij}(t) \equiv 0$ でない限り, すべての $t \in [0, T]$ に対して $|\sigma_{ij}(t)| > 0$ である.

を満たすものと仮定する. ただし, χ_i は $\mathbf{L}$ 上の集合 $\{i\}$ に対する定義関数

$$\chi_i(j) = \begin{cases} 1 & (j=i \text{ のとき}) \\ 0 & (j \neq i \text{ のとき}), i, j \in \mathbf{L} \end{cases} \quad (3)$$

である. 関数 $f: [0, T] \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{L} \rightarrow \mathbf{R}^n$ および $h: [0, T] \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{L} \rightarrow \mathbf{R}^m$ はそれぞれ

$$f(t, x, i) = A(t, i)x + c(t, i) \quad (4)$$

$$h(t, x, i) = H(t, i)x + b(t, i) \quad (5)$$

なる形の x に関して線形な関数とする. 以下では, さらに, つぎのような条件が満足されているものとする.

(C-4) すべての $i \in \mathbf{L}$ に対して, A, H, G, c および b は t に関して有界連続である.

(C-5) すべての $i \in \mathbf{L}$ に対して, t に関して一様に $R_0(t, i) \triangleq R(t, i)R'(t, i)$ は正則かつ有界連続な要素をもつ.

(C-6) 初期状態 x^0 は平均値 $\bar{x}_0$ および共分散行列 Q_0 をもつ正規性確率変数である.

(C-7) x^0 , $\{w(t); t \in [0, T]\}$, $\{v(t); t \in [0, T]\}$ および $\{\alpha_i; t \in [0, T]\}$ は, 完備確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上で定義され, すべて互いに独立である.

ただし, “ $\cdot$ ” は転置を表わす.

さて, 連続時間の状態推定問題を取り扱う場合は, 通常, (2)式によって与えられる見本過程 $y_0' \triangleq \{y_s; 0 \leq s \leq t\}$ のすべてを観測データとして, x_t の最小分散推定値である条件付き期待値 $E\{x_t | \mathcal{Q}_t\}$ を求めることを考える. ただし, $\mathcal{Q}_t$ は y_0' によって生成される最小 σ -代数である. しかしながら, (2)式の観測方程式による観測データ y_0' のすべてが利用できるという問題設定は, つぎのような意味で必ずしも実際的とはいえない. すなわち, (2)式より, 伊藤の連鎖則を $y_t y_t'$ に適用すると,

$$\begin{aligned} & \int_0^t R_0(s, \alpha_s) ds \\ &= y_t y_t' - \int_0^t y_s dy_s' - \left(\int_0^t y_s dy_s' \right)' \end{aligned} \quad (6)$$

が得られる. (6)式より明らかに, $R_0(t, \alpha_{t-})$ は $\mathcal{Q}_{t-}$ 可測であり, また, $R_0(t, \alpha_t)$ は $\mathcal{Q}_{t-} \triangleq \bigcap_{\varepsilon > 0} \mathcal{Q}_{t+\varepsilon}$ について可測である(注1). これは無限小の時間の観測を行うことによって観測雑音の共分散行列 $R_0(t, \alpha_t)$ の真値を知り得ることを意味するものである. ところが, (6)式を用いて $R_0(t, \alpha_t)$ の値を求めるためには, y_t' に対して積分および微分という二つの“極限操作”を行わなければならない. そして, これらの極限操作を計算機で数値的に実行して $R_0(t, \alpha_t)$ の真値を求めることは, ほとんど不可能といってよい. すなわち, 無限個の観測データを処理しない限り, $R_0(t, \alpha_t)$ の真値を求めることはできず, 観測データとして y_0' を設定することは工学的な観点からみれば実際的でない.

以上のような考察から, 本論文では利用可能な観測データとして, y_0' の中から十分密に取り出した有限個のデータ $\hat{y}_0' \triangleq \{y_s; s \in [0, T] \cap \mathbf{S}\}$ を設定し, 状態推定問題を取り扱う. ただし, $\mathbf{S}$ は $[0, T]$ 内の有限集合で, $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$, $t_i - t_{i-1} = \Delta t$ なる分割の分点の集合とする(注2). 今後, 混乱を招く恐れのない限り, $\mathbf{S}$ の要素についても添字を記さず, t, s などで表わす. このようにして, データ $\hat{y}_0'$, $t \in \mathbf{S}$ をもとにして, x_t の最小分散推定値

$$\hat{x}(t|t) \triangleq E\{x_t | \mathcal{Z}_t\}, \quad t \in \mathbf{S} \quad (7)$$

を計算する問題を取り扱う. ただし, $t \in \mathbf{S}$ について, $\mathcal{Z}_t$ は $\hat{y}_0'$ によって生成される最小 σ -代数を表わす. いま, 条件付き状態推定値 $\hat{x}(t|i)$ と事後確率 $\Pi(t, i)$ を

$$\hat{x}(t|i) \triangleq E\{x_t | \alpha_t = i, \mathcal{Z}_t\}, \quad i \in \mathbf{L}, t \in \mathbf{S} \quad (8)$$

$$\Pi(t, i) \triangleq P\{\alpha_t = i | \mathcal{Z}_t\}, \quad i \in \mathbf{L}, t \in \mathbf{S} \quad (9)$$

によって与えると, (7)式は

$$\hat{x}(t|t) = \sum_{i=1}^l \hat{x}(t|i) \Pi(t, i), \quad t \in \mathbf{S} \quad (10)$$

と表現できる. このことから, 以下では, $\hat{x}(t|i)$, $\Pi(t, i)$, $i \in \mathbf{L}$ を $t \in \mathbf{S}$ について逐次計算することによって推定値 $\hat{x}(t|t)$ を(10)式から求めるアルゴリズムを構成することを考察する. このアルゴリズムは4.で構成されるが, 次節では, まず, そのための数学的な準備を行う.

(注1) もし, $R_0(t, \cdot): \mathbf{L} \rightarrow \mathbf{R}^{m \times m}$ が1対1であれば, α_{t-} および α_t はそれぞれ, $\mathcal{Q}_{t-}$, $\mathcal{Q}_{t+}$ 可測となる.

(注2) 必要ならば, $\Delta t \rightarrow 0$ ($N \rightarrow \infty$) とすることによって y_0' をデータとする場合の結果も導くことができる(4.注意2, (注6)参照).

3. 数学的準備

3.1 Radon-Nikodym 微分と条件付き期待値の表現

本節前半では, Girsanov の定理^{8),9)}を用いて, 可測空間 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上に新しい確率測度 $\tilde{P}$ を導入するとともに, P の $\tilde{P}$ に関する $\mathcal{G}$ 上の Radon-Nikodym 微分 $\frac{dP}{d\tilde{P}}|_{\mathcal{G}}$ の表現を行う. ただし, $\mathcal{G}$ は $\{x_0, (w(t), \alpha_t), t \in [0, T], y_\tau, \tau \in \mathbf{S}\}$ によって生成される最小 σ -代数である. また, この表現によって, P に関する条件付き期待値, $E\{\cdot | \mathcal{Z}_t\}$ は, $\tilde{P}$ に関する条件付き期待値 $\tilde{E}\{\cdot | \mathcal{Z}_t\}$ を用いて表わすことができることを示す.

まず, つぎのような σ -代数を定義する.

$$\mathcal{F}_t \triangleq \sigma\{x_0, (w(s), \alpha_s), s \in [0, T], y_\tau, \tau \in [0, t]\}$$

$$\mathcal{G}_t \triangleq \mathcal{F}_0 \vee \mathcal{Z}_t \text{ (注3)}$$

$$\equiv \sigma\{x_0, (w(s), \alpha_s), s \in [0, T], y_\tau,$$

$$\tau \in [0, T] \cap \mathbf{S}\}$$

ただし, $\sigma\{\cdot\}$ は確率変数の族 $\{\cdot\}$ によって生成される最小 σ -代数を表わす. つぎに, $\mathcal{F}_t$ -可測関数 ρ_s^t および $\tilde{\rho}_s^t$, $0 \leq s \leq t \leq T$ を, それぞれ,

$$\rho_s^t \triangleq \exp \left\{ \int_s^t h' R_0^{-1} dy_\tau - \frac{1}{2} \int_s^t h' R_0^{-1} h d\tau \right\} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_s^t \triangleq (\rho_s^t)^{-1} &\equiv \exp \left\{ - \int_s^t h' R_0^{-1} R dv(\tau) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \int_s^t h' R_0^{-1} h d\tau \right\} \end{aligned} \quad (12)$$

によって定義する. ただし, $h = h(\tau, x_\tau, \alpha_\tau)$, $R_0 = R_0(\tau, \alpha_\tau)$ および, $R = R(\tau, \alpha_\tau)$ と略記してある.

さて, 可測空間 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上の確率測度 $\tilde{P}$ を

$$\tilde{P} = \tilde{\rho}_0^T P \quad (13)$$

によって定義する. $\tilde{P}$ はつぎの性質をもつ.

[補題 1] 条件 (C-2) ~ (C-7) のもとで, 確率測度 $\tilde{P}$ に関して, m 次元確率過程

$$\nu_t \triangleq \int_0^t R_0^{-1/2}(s, \alpha_s) dy_s \quad (14)$$

は $\mathcal{F}_t$ -Brown 運動過程⁹⁾である. さらに, 測度 $\tilde{P}$ に関する $\{x_t, \alpha_t, w(t), t \in [0, T]\}$ の分布は測度 P に関する分布と一致する.

(証明) 前半は, 任意の $t > \tau \geq 0$, $\xi \in \mathbf{R}^m$ に対して,

$$\tilde{E}\{\exp[i\xi'(\nu_t - \nu_\tau)] | \mathcal{F}_\tau\}$$

$$= \exp \left\{ -\frac{1}{2} \|\xi\|^2(t - \tau) \right\}$$

を示せばよいが, これは, $R(t, \alpha_t) \equiv R(t)$ の場合¹⁰⁾と

(注3) $\mathcal{F}_0 \vee \mathcal{Z}_t$ は $\mathcal{F}_0$ および $\mathcal{Z}_t$ をともに含む最小の σ -代数を表わす.

まったく同様にできる. ただし, $\tilde{E}\{\cdot\}$ は $\tilde{P}$ に関する期待値を表わし, また, $i \triangleq \sqrt{-1}$ である. 後半は,

$$E\{\tilde{\rho}_0^T | \mathcal{F}_0\} = \tilde{E}\{\rho_0^T | \mathcal{F}_0\} = 1$$

より, $\mathcal{F}_0$ 上で $\tilde{P} = P$ であることから明らかである ■

(注意 1) 補題 1 により, y_t は

$$y_t = \int_0^t R_0^{1/2}(s, \alpha_s) dv_s \quad (15)$$

なる表現をもつ, $(\mathcal{F}_t, \tilde{P})$ -マルチンゲールである.

本節冒頭で述べたとおり, 本節の第一の目的は, $\tilde{P}$ の $\mathcal{G}$ 上での具体的な表現, いいかえると Radon-Nikodym 微分 $\frac{dP}{d\tilde{P}}|_{\mathcal{G}} = \tilde{E}\{\rho_0^T | \mathcal{G}\}$ を求めることである. そのために, まず, 補題を準備する. $t \in [0, T] \cap \mathbf{S}$ に対し,

$$\Delta y_t \triangleq y_t + dt - y_t \quad (16)$$

$$\bar{h}_t \triangleq \int_t^{t+dt} h(s, x_s, \alpha_s) ds \quad (17)$$

$$\bar{R}_t \triangleq \int_t^{t+dt} R_0(s, \alpha_s) ds \quad (18)$$

$$\zeta_t \triangleq \exp \left\{ \sum_{s \in [0, t] \cap \mathbf{S}} \left[\bar{h}_s' \bar{R}_s^{-1} \Delta y_s - \frac{1}{2} \bar{h}_s' \bar{R}_s^{-1} \bar{h}_s \right] \right\} \quad (19)$$

$$\tilde{\zeta}_t \triangleq (\zeta_t)^{-1} \quad (20)$$

とおく. P^* を P の $\mathcal{G}$ 上への制限とし, $(\Omega, \mathcal{G})$ 上の確率測度 $\bar{P}$ を

$$\bar{P} \triangleq \tilde{\zeta}_T P^* \quad (21)$$

によって定義する. このとき, つぎの補題が成立する.

[補題 2] 条件 (C-2) ~ (C-7) のもとで, $\bar{P}$ に関して,

(i) Δy_t , $t \in \mathbf{S}$ は $\mathcal{G}_t$ -マルチンゲール差序列 (martingale difference sequence)¹¹⁾ である.

(ii) 任意の $t \in \mathbf{S}$ に対し, $\{\Delta y_s; s \in [t, T] \cap \mathbf{S}\}$ の $\mathcal{G}_t$ に関する条件付き結合分布は, 独立正規形であり, 平均値 0, 共分散 $\{\bar{R}_s; s \in [t, T] \cap \mathbf{S}\}$ をもつ.

(証明) 証明は, 文献 12) の補題 1 と本質的に変わらない. 同様の議論によれば, $t \in [0, T] \cap \mathbf{S}$ に対し

$$\gamma_t \triangleq \exp \left\{ i \sum_{s \in [0, t] \cap \mathbf{S}} \left[\xi_s' \Delta y_s + \frac{1}{2} \xi_s' \bar{R}_s \xi_s \right] \right\},$$

$$\gamma_0 = 1, \quad \xi_s \in \mathbf{R}^m$$

とおくことによって, すべての $A \in \mathcal{G}_s$ および $s < t$, $t, s \in [0, T] \cap \mathbf{S}$ に対して,

$$\begin{aligned} &\int_A \gamma_t (\gamma_s)^{-1} d\bar{P} \\ &= \int_A \bar{E}\{\gamma_t (\gamma_s)^{-1} | \mathcal{G}_s\} d\bar{P} = \bar{P}(A) \end{aligned}$$

が得られる. すなわち,

$$\begin{aligned} & \bar{E}\{\exp[\mathbf{i} \sum_{\tau \in [s, t] \cap S} \xi_{\tau} \Delta y_{\tau}] | \mathcal{G}_s\} \\ &= \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_{\tau \in [s, t] \cap S} \xi_{\tau} \bar{R}_{\tau} \xi_{\tau}\right\} \end{aligned}$$

である。ただし、 $\bar{E}\{\cdot\}$ は $\bar{P}$ に関する期待値を表わす。これより、(ii) が得られる。(i) は (ii) より明らか。■

さて、つぎの定理が $\frac{dP}{d\bar{P}}|_{\mathcal{G}}$ の表現を与える。

《定理1》 $\bar{P}^*$ で $\bar{P}$ の $\mathcal{G}$ 上への制限を表わす。条件 (C-2) ~ (C-7) のもとで、ほとんど確実に (a.s.)
 $\bar{P} = \bar{P}^*$ (22)

である。すなわち、

$$\frac{dP}{d\bar{P}}|_{\mathcal{G}} = \bar{E}\{\rho_0^T | \mathcal{G}\} = \zeta_r \text{ a.s.} \quad (23)$$

が成り立つ。

(証明) 数学的帰納法によって、 $\bar{P} = \bar{P}^*$ a.s. を示す。

(i) 定義より、 $\mathcal{G}_0$ 上で、 $\bar{P}^* = \bar{P} = P$ 、かつ、 $\bar{P} = P$ であるから、 $\bar{P}^* = \bar{P}$ が成立する。

(ii) $t \in [0, T] \cap S$ を固定する。 $\mathcal{G}_t$ 上で $\bar{P} = \bar{P}^*$ が成立しているものと仮定する。補題1, 2より、すべての $\mathbf{R}^m$ 内の Borel 集合 B に対して、

$$\bar{P}\{\omega; \Delta y_t \in B | \mathcal{G}_t\} = \bar{P}^*\{\omega; \Delta y_t \in B | \mathcal{G}_t\} \quad (24)$$

が成立する。条件付き期待値の定義より、すべての $A \in \mathcal{G}_t$ に対して、

$$\begin{aligned} & \bar{P}\{A \cap \{\omega; \Delta y_t \in B\}\} \\ &= \int_A \bar{P}\{\omega; \Delta y_t \in B | \mathcal{G}_t\} d\bar{P} \end{aligned} \quad (25)$$

であるから、(25)式に(24)式を代入して、 $\mathcal{G}_t$ 上で、 $\bar{P} = \bar{P}^*$ が成立することに注意すると、

$$\bar{P}\{A \cap \{\omega; \Delta y_t \in B\}\} = \bar{P}^*\{A \cap \{\omega; \Delta y_t \in B\}\} \quad (26)$$

が得られる。 $\mathcal{G}_{t+\Delta t} = \mathcal{G}_t \vee \sigma\{\Delta y_t\}$ であるから、(26)式より、 $\bar{P} = \bar{P}^*$ が $\mathcal{G}_{t+\Delta t}$ 上で成立している。

以上、(i)、(ii)より、(22)式が得られる。■

定理1より、 P に関する条件付き期待値は、つぎのように $\bar{P}$ に関する条件付き期待値を用いて表現できる。

[系1] g をスカラー値可測関数: $\mathbf{R}^m \times \mathbf{L} \rightarrow \mathbf{R}$ とし、 $E\{|g(x_t, \alpha_t)|^2\} < \infty$ を満たすものと仮定する。このとき、

$$\hat{g}(t) \triangleq E\{g(x_t, \alpha_t) | \mathcal{Z}_t\}, \quad t \in S \quad (27)$$

は、条件 (C-2) ~ (C-7) のもとで、

$$\hat{g}(t) = \frac{\bar{E}\{\zeta_t g(x_t, \alpha_t) | \mathcal{Z}_t\}}{\bar{E}\{\zeta_t | \mathcal{Z}_t\}} \quad (28)$$

によって与えられる。

(証明) 定理1より、 $\bar{E}\{\rho_0^T | \mathcal{G}_t\} = \bar{E}\{\rho_0^T | \mathcal{G}_t\} = \zeta_t$, $t \in S$ であること、および、 $g(x_t, \alpha_t)$ が $\mathcal{G}_t$ -可測であることから、(28)式は容易に得られる⁹⁾。■

3.2 条件付き期待値の観測データによる更新

さて、(28)式をみれば、 $\hat{g}(t) \rightarrow \hat{g}(t+\Delta t)$ の計算は、大きくわけて、つぎの二つの操作を含む。すなわち、

(I) 新しいデータ $\Delta y_t = \int_t^{t+\Delta t} R_0^{1/2}(s, \alpha_s) dv_s$ を得たことによる $\bar{P}$ に関する条件付き期待値 $\bar{E}\{\cdot | \mathcal{Z}_t\}$ の $\bar{E}\{\cdot | \mathcal{Z}_{t+\Delta t}\}$ への更新。

(II) $g(x_t, \alpha_t) \rightarrow g(x_{t+\Delta t}, \alpha_{t+\Delta t})$ および $\zeta_t \rightarrow \zeta_{t+\Delta t}$ なる変化に伴う分布の修正。

である。このうち、(I)の操作は $R(t, \alpha_t) \equiv R(t)$ の場合には、測度 $\bar{P}$ に関して Δy_t が (x_t, α_t) に関する情報をまったく含まないため消失する(注4)。したがって、この操作は、 $R(t, \alpha_t)$ が α_t に依存する場合に固有のものである。

一方、(II)は、 Δy_t を得たことによる分布の修正のうち $\bar{h}_t$ の項に対応したものと、 $(x_t, \alpha_t) \rightarrow (x_{t+\Delta t}, \alpha_{t+\Delta t})$ なる状態遷移に伴う分布の更新であり、これは R の形とは無関係に要求される通常の操作である。いま、

$$g^*(t) \triangleq \widehat{g(x_t, \alpha_t)^*} \triangleq \frac{\bar{E}\{\zeta_t g(x_t, \alpha_t) | \mathcal{Z}_{t+\Delta t}\}}{\bar{E}\{\zeta_t | \mathcal{Z}_{t+\Delta t}\}} \quad (29)$$

を導入すれば、上述の(I)は $\hat{g}(t) \rightarrow \hat{g}^*(t)$ 、また、(II)は $\hat{g}^*(t) \rightarrow \hat{g}(t+\Delta t)$ なる計算にほかならない。 $\{\alpha_t = i\}$ に対する事後確率 $\Pi^*(t, i)$ を

$$\Pi^*(t, i) \triangleq \frac{\bar{E}\{\zeta_t I_{\{\alpha_t = i\}} | \mathcal{Z}_{t+\Delta t}\}}{\bar{E}\{\zeta_t | \mathcal{Z}_{t+\Delta t}\}} \equiv \widehat{\chi_i(\alpha_t)^*} \quad (30)$$

によって定義する。ただし、 $I_{\{\cdot\}}$ は事象 $\{\cdot\} \in \mathcal{F}$ の定義関数であり、明らかに、 $I_{\{\alpha_t = i\}} = \chi_i(\alpha_t)$ である。このとき、(I)の操作に関してつぎの定理を得る。

《定理2》 条件 (C-1) ~ (C-7) のもとで、 $t \in [0, T] \cap S$ について、つぎの関係が成立する。

$$\hat{g}^*(t) = \sum_{i=1}^l E\{g(x_t, \alpha_t) | \alpha_t = i, \mathcal{Z}_t\} \Pi^*(t, i) \quad (31)$$

$$\begin{aligned} & \Pi^*(t, i) \\ &= \frac{\bar{E}\{\lambda(z, \bar{R}_t) | \alpha_t = i, \mathcal{Z}_t\} \Pi(t, i)}{\sum_{j=1}^l \bar{E}\{\lambda(z, \bar{R}_t) | \alpha_t = j, \mathcal{Z}_t\} \Pi(t, j)} \Big|_{z=\Delta y_t} \end{aligned} \quad (32)$$

ただし、

$$\begin{aligned} & \lambda(z, \bar{R}_t) \triangleq (2\pi)^{-m/2} \det |\bar{R}_t|^{-1/2} \\ & \times \exp\left\{-\frac{1}{2} z' \bar{R}_t^{-1} z\right\} \end{aligned} \quad (33)$$

(注4) $R(t, \alpha_t) \equiv R(t)$ なら、 y_t と (x_t, α_t) は P に関して独立となることは、(15)式より明らかである。

である。

この定理の証明を行うために、つぎの補題を準備する。

【補題 3】 条件 (C-2)～(C-7) のもとで、事後確率 $\tilde{P}\{\alpha_t=i|\mathcal{Z}_{t+\Delta t}\}=\tilde{E}\{I_{\{\alpha_t=i\}}|\mathcal{Z}_{t+\Delta t}\}$, $t\in[0,T]\cap\mathcal{S}$ は次式によって与えられる。

$$\begin{aligned} \tilde{P}\{\alpha_t=i|\mathcal{Z}_{t+\Delta t}\} \\ = \frac{\tilde{E}\{\lambda(z, \bar{R}_t) I_{\{\alpha_t=i\}}|\mathcal{Z}_t\}}{\tilde{E}\{\lambda(z, \bar{R}_t)|\mathcal{Z}_t\}} \Big|_{z=\Delta y_t} \end{aligned} \quad (34)$$

(証明) 簡単な計算により、すべての Borel 集合 $B\in\mathbf{R}^n$ に対して、

$$\begin{aligned} \tilde{P}\{\alpha_t=i|\Delta y_t\in B, \mathcal{Z}_t\} \\ = \frac{\tilde{E}\{\tilde{E}\{I_{\{\Delta y_t\in B\}}|\mathcal{G}_t\}} I_{\{\alpha_t=i\}}|\mathcal{Z}_t\}}{\tilde{E}\{\tilde{E}\{I_{\{\Delta y_t\in B\}}|\mathcal{G}_t\}}|\mathcal{Z}_t\}} \end{aligned} \quad (35)$$

が得られる。補題 1 および注意 1 より、 Δy_s , $s\in[t, T]\cap\mathcal{S}$ の $\mathcal{G}_t$ に関する条件付き分布は、独立正規形であり、

$$\begin{aligned} \tilde{E}\{I_{\{\Delta y_t\in B\}}|\mathcal{G}_t\} \\ = \tilde{E}\{I_{\{\Delta y_t\in B\}}|\mathcal{Q}_0\} = \int_B \lambda(z, \bar{R}_t) dz \end{aligned} \quad (36)$$

によって与えられる。(36)式を(35)式に代入して、分母分子を Lebesgue 測度 dz について Radon-Nikodym の意味で微分すれば、 $z\in\mathbf{R}^n$ に対し、

$$\begin{aligned} q(z)\triangleq \tilde{P}\{\alpha_t=i|\Delta y_t=z, \mathcal{Z}_t\} \\ = \frac{\tilde{E}\{\lambda(z, \bar{R}_t) I_{\{\alpha_t=i\}}|\mathcal{Z}_t\}}{\tilde{E}\{\lambda(z, \bar{R}_t)|\mathcal{Z}_t\}} \end{aligned} \quad (37)$$

が得られる。明らかに、 $\tilde{P}\{\alpha_t=i|\mathcal{Z}_{t+\Delta t}\}=q(\Delta y_t)$ であるから、(37)式より(34)式が得られる。■

(定理 2 の証明) まず、(32)式から示す。(30)式を変形すれば

$$\begin{aligned} \Pi^*(t, i) \\ = \frac{\tilde{P}\{\alpha_t=i|\mathcal{Z}_{t+\Delta t}\} \tilde{E}\{\xi_t|\alpha_t=i, \mathcal{Z}_{t+\Delta t}\}}{\sum_{j=1}^l \tilde{P}\{\alpha_t=j|\mathcal{Z}_{t+\Delta t}\} \tilde{E}\{\xi_t|\alpha_t=j, \mathcal{Z}_{t+\Delta t}\}} \end{aligned} \quad (38)$$

と表わすことができる。(15)式から明らかに $\tilde{E}\{\xi_t|\alpha_t=i, \mathcal{Z}_{t+\Delta t}\}=\tilde{E}\{\xi_t|\alpha_t=i, \mathcal{Z}_t\}$ が成り立つことに注意して、(34)式を(38)式に代入して分母分子を $\tilde{E}\{\xi_t|\mathcal{Z}_t\}$ で除して整理をすれば、(32)式が得られる。

一方、(29)式から、

$$\begin{aligned} \varrho^*(t) = \sum_{i=1}^l \frac{\tilde{E}\{\xi_t g(x_t, \alpha_t)|\alpha_t=i, \mathcal{Z}_{t+\Delta t}\}}{\tilde{E}\{\xi_t|\alpha_t=i, \mathcal{Z}_{t+\Delta t}\}} \\ \times \Pi^*(t, i) \end{aligned}$$

なる表現が可能であることから、 $\tilde{E}\{\xi_t g(x_t, \alpha_t)|\alpha_t=i, \mathcal{Z}_{t+\Delta t}\}=\tilde{E}\{\xi_t g(x_t, \alpha_t)|\alpha_t=i, \mathcal{Z}_t\}$ を用いれば、(31)式は容易に導くことができる。■

4. 推定アルゴリズムの構成

本節の目的は、前節で得られた結果を用いて、つぎの差分状態推定アルゴリズムを導出、構成することである。

【状態推定アルゴリズム】

つぎの差分方程式 (39)～(41) により、観測データ Δy_t を逐次処理することによって、状態推定値 $\hat{x}(t|t)$ は(10)式より算出される。

$$\Pi^*(t, i) = \frac{\tilde{\lambda}(\Delta y_t, R_0(t, i)) \Pi(t, i)}{\sum_{j=1}^l \tilde{\lambda}(\Delta y_t, R_0(t, j)) \Pi(t, j)} \quad (39. a)$$

$$\begin{aligned} \Pi(t+\Delta t, i) \\ = \Pi^*(t, i) + \mathcal{D}^*[\Pi^*(t, i)] \cdot \Delta t + \Pi^*(t, i) \\ \times \left\{ [\hat{\eta}(t|i) - \hat{\eta}^*(t)]' \Delta y_t [1 - \Delta y_t' \hat{\eta}^*(t)] \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \text{tr} [\hat{\Gamma}(t|i) - \hat{\Gamma}^*(t)] \right\} \end{aligned} \quad (39. b)$$

$$\Pi(0, i) = \Pi_0(i), \quad i \in \mathbf{L}, \quad t \in [0, T] \cap \mathcal{S} \quad (39. c)$$

$$\begin{aligned} \Delta \hat{x}(t|i) &= \xi(t|i) \cdot \Delta t + f(t, \hat{x}(t|i), i) \cdot \Delta t \\ &\quad + Q(t|i) H'(t, i) R_0^{-1}(t, i) \\ &\quad \times \{\Delta y_t - h(t, \hat{x}(t|i), i) \cdot \Delta t\} \end{aligned}$$

$$\hat{x}(0|i) = \hat{x}_0, \quad i \in \mathbf{L}, \quad t \in [0, T] \cap \mathcal{S} \quad (40)$$

$$\begin{aligned} \Delta Q(t|i) &= D(t|i) \cdot \Delta t + A(t, i) Q(t|i) \cdot \Delta t \\ &\quad + Q(t|i) A'(t, i) \cdot \Delta t + G(t, i) G'(t, i) \cdot \Delta t \\ &\quad - Q(t|i) H'(t, i) R_0^{-1}(t, i) H(t, i) \\ &\quad \times Q(t|i) \cdot \Delta t \end{aligned}$$

$$Q(0|i) = Q_0, \quad i \in \mathbf{L}, \quad t \in [0, T] \cap \mathcal{S} \quad (41)$$

ただし、(39)式において、

$$\tilde{\lambda}(z, R) \triangleq \det |R|^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2 \cdot \Delta t} z' R^{-1} z \right\} \quad (42)$$

$$\mathcal{D}^*[\varphi(t, i)] \triangleq \sum_{j=1}^l \sigma_{ji}(t) \varphi(t, j) \quad (43)$$

$$\begin{aligned} \hat{\eta}(t|i) &\triangleq \widehat{R_0^{-1} h}^{(i)} \\ &\equiv R_0^{-1}(t, i) h(t, \hat{x}(t|i), i) \end{aligned} \quad (44)$$

$$\begin{aligned} \hat{\eta}^*(t) &\triangleq \widehat{R_0^{-1} h}^* \\ &\equiv \sum_{j=1}^l \hat{\eta}(t|j) \Pi^*(t, j) \end{aligned} \quad (45)$$

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}(t|i) &\triangleq \widehat{h h' R_0^{-1} [\Delta y_t \Delta y_t' - R_0 \cdot \Delta t] R_0^{-1}}^{(i)} \\ &\equiv \{h(t, \hat{x}(t|i), i) h'(t, \hat{x}(t|i), i) \\ &\quad + H(t, i) Q(t|i) H'(t, i)\} \\ &\quad \times R_0^{-1}(t, i) \{\Delta y_t \Delta y_t' - R_0(t, i) \cdot \Delta t\} \\ &\quad \times R_0^{-1}(t, i) \end{aligned} \quad (46)$$

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}^*(t) &\triangleq \widehat{h h' R_0^{-1} [\Delta y_t \Delta y_t' - R_0 \cdot \Delta t] R_0^{-1}}^* \\ &\equiv \sum_{j=1}^l \hat{\Gamma}(t|j) \Pi^*(t, j) \end{aligned} \quad (47)$$

であり, また,

$$\hat{\zeta}_{t+dt} \triangleq \frac{\bar{E}\{\zeta_t I_{\{\alpha_t=i\}}(\cdot) | \mathcal{Z}_{t+dt}\}}{\bar{E}\{\zeta_t I_{\{\alpha_t=i\}} | \mathcal{Z}_{t+dt}\}} \quad (48) \text{ (注5)}$$

$$Q(t|i) \triangleq E\{[x_t - \hat{x}(t|i)]' | \alpha_t=i, \mathcal{Z}_t\} \quad (49)$$

である. さらに, (40), (41)両式において,

$$\xi(t|i) \triangleq \frac{1}{\Pi^*(t,i)} \sum_{j=1}^l \sigma_{ji}(t) \Pi^*(t,j) \times [\hat{x}(t|j) - \hat{x}(t|i)] \quad (50)$$

$$D(t|i) \triangleq \frac{1}{\Pi^*(t,i)} \sum_{j=1}^l \sigma_{ji}(t) \Pi^*(t,j) \times \{Q(t|j) - Q(t|i) + [\hat{x}(t|j) - \hat{x}(t|i)][\hat{x}(t|j) - \hat{x}(t|i)]'\} \quad (51)$$

とにおいてある.

(注意2) $R(t, \alpha_t) \equiv R(t)$ の特別な場合には, $\Pi^*(t, i) \equiv \Pi(t, i)$ であるので, $\Delta t \rightarrow 0$ とすることにより, $\Delta y_t \Delta y_t' \rightarrow dy_t dy_t' \equiv R_0(t) dt$ となって, (39)~(41)式から, 文献6)で導出された推定方程式が導かれる.

さて, (39)~(41)式を前節の結果から導くためには, つぎのような近似を必要とする.

(A-1) $f_1 = O(\Delta t)$, $f_2 = O(\Delta t^{1/2})$, $f_1, f_2 \in \mathbf{R}$ のとき, スカラー値関数 $u(f_1, f_2)$ について,

$$\lim_{\Delta t \downarrow 0} \frac{1}{\Delta t} |a_0 + a_1 f_1 + a_2 f_2 + a_3 f_2^2 - u(f_1, f_2)| = 0$$

となるような係数 $a_0 \sim a_3$ が存在するとき

$$u(f_1, f_2) \equiv a_0 + a_1 f_1 + a_2 f_2 + a_3 f_2^2$$

と近似する.

(A-2) $g: \mathbf{R}^n \times \mathbf{L} \rightarrow \mathbf{R}$ に対し, すべての $t \in \mathbf{S}$ について,

$$\lim_{\Delta t \downarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left| \int_t^{t+\Delta t} g(x_s, \alpha_s) ds - g(x_t, \alpha_t) \cdot \Delta t \right| = 0$$

であることに注目して,

$$\int_t^{t+\Delta t} g(x_s, \alpha_s) ds \equiv g(x_t, \alpha_t) \cdot \Delta t$$

と近似する.

(A-3) B を $\mathbf{R}^n$ 上の任意の Borel 集合とするとき,

$$\mu(B | \alpha_t=i, \mathcal{Z}_t) \triangleq E\{I_{\{x_t \in B\}} | \alpha_t=i, \mathcal{Z}_t\}, \quad i \in \mathbf{L}$$

によって定まる $\mathbf{R}^n$ 上の分布は, 平均値 $\hat{x}(t|i)$ および共分散行列 $Q(t|i)$ をもつ正規分布として取り扱う.

このうち, (A-1), (A-2) は, 観測データのサンプル幅 Δt を小さくすれば, 近似誤差は要求に応じて小

さくできる. 一方, (A-3) は文献6)の推定方程式の導出の際用いられた仮定とほぼ同等のものであると考えてよい. 以下, (39)~(41)式の導出を行う. まず, (39.a)式は(32)式に対して, (A-2)に基づく近似 $\bar{R}_t \equiv R_0(t, \alpha_t) \cdot \Delta t$ を用いればただちに得られる. つぎに,

$$\rho_1 = \rho_1(t, \omega) \triangleq -\frac{1}{2} \bar{h}_t' \bar{R}_t \bar{h}_t' \quad (52)$$

$$\rho_2 = \rho_2(t, \omega) \triangleq \bar{h}_t' \bar{R}_t \Delta y_t \quad (53)$$

とおくと, (A-1)により,

$$\begin{aligned} & \frac{\bar{E}\{\zeta_{t+dt} | \mathcal{Z}_{t+dt}\}}{\bar{E}\{\zeta_t | \mathcal{Z}_{t+dt}\}} \left[1 + (\rho_1 - \hat{\rho}_1^*) \right. \\ & \quad \left. + (\rho_2 - \hat{\rho}_2^*)(1 - \hat{\rho}_2^*) + \frac{1}{2} (\rho_2^2 - \hat{\rho}_2^{2*}) \right] \quad (54) \end{aligned}$$

が得られる. 一方, Doleans-Dade-Meyer による一般化確率微分則¹³⁾によって, $x \in \mathbf{R}^n$ に関して2階連続微分可能な関数 $g(x, i)$, $i \in \mathbf{L}$ に対して,

$$\begin{aligned} & g(x_{t+\Delta t}, \alpha_{t+\Delta t}) \\ & = g(x_t, \alpha_t) + \int_t^{t+\Delta t} [\mathcal{D} + \mathcal{L}] g(x_s, \alpha_s) ds + \Delta M_t \end{aligned} \quad (55)$$

と表わされる. ここに, M_t は $\mathcal{F}_t^x \triangleq \sigma\{x_0, (w(s), \alpha_s), s \in [0, t]\}$ に適合した, P -および $\bar{P}$ -マルティンゲールであり, また,

$$\begin{aligned} \mathcal{D}g(x, i) & \triangleq \sum_{k=1}^l \sigma_{ik}(t) g(x, k) \\ \mathcal{L}g(x, i) & \triangleq g_x'(x, i) f(t, x, i) \\ & \quad + \frac{1}{2} \text{tr}[G'(t, i) g_{xx}(x, i) G(t, i)] \end{aligned}$$

である. ただし, g の添字 x は, x に関する偏微分を表わす. (28)式で $t \rightarrow t + \Delta t$ とおきかえた場合について, (54), (55)式を用いると, $\bar{P}$ に関して y_t と M_t は直交する⁹⁾ことから,

$$\begin{aligned} & \hat{g}(t + \Delta t) \\ & = \hat{g}^*(t) + \int_t^{t+\Delta t} \overbrace{[\mathcal{D} + \mathcal{L}] \hat{\theta}_{x_s, \alpha_s}^* ds}^{\text{---}} \\ & \quad + [\hat{g}(x_t, \alpha_t) - \hat{g}^*(t)] \left[\rho_2(1 - \hat{\rho}_2^*) + \frac{1}{2} \rho_2^2 + \rho_1 \right]^* \end{aligned} \quad (56) \text{ (注6)}$$

が得られる. (56)式の g として(3)式の χ_t をとり, (A-2)を用いると, (39.b)式が得られる. つぎに, $\rho: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ を x に関して2階連続微分可能な関数とし,

$$\hat{\rho}(t|i) \triangleq \widehat{\rho(x_t)}^{(i)} \equiv E\{\rho(x_t) | \alpha_t=i, \mathcal{Z}_t\}$$

について, $\Delta \hat{\rho}(t|i) = \hat{\rho}(t + \Delta t|i) - \hat{\rho}(t|i)$ を計算する. いま

(注5) $g = g(\omega)$ が $\mathcal{G}_t$ -可測ならば, $g^{(i)} = E\{g | \alpha_t=i, \mathcal{Z}_t\}$ となる.

$$\Delta \hat{\rho}(t|i) = \frac{\widehat{\chi_i(\alpha_t + \Delta t) \rho(x_t + \Delta t)}}{\Pi(t + \Delta t, i)} - \frac{\widehat{\chi_i(\alpha_t) \rho(x_t)^*}}{\Pi^*(t, i)}$$

↗ $g = \chi_i \cdot \rho$ の場合について適用して (A-1), (A-2) を用いると,

であることに注目し, (39. b) 式および, (56) 式を ↗

$$\begin{aligned} \Delta \hat{\rho}(t|i) = & \frac{1}{\Pi^*(t, i)} \sum_{j=1}^l \sigma_{ji}(t) \Pi^*(t, j) [\hat{\rho}(t|j) - \hat{\rho}(t|i)] \cdot \Delta t + \widehat{\mathcal{L} \rho(x_t)^{(i)}} \Delta t \\ & + [\widehat{\rho h' R_0^{-1}{}^{(i)}} - \hat{\rho}(t|i) \widehat{h' R_0^{-1}{}^{(i)}}] \Delta y_t [1 - \Delta y_t' \widehat{R_0^{-1} h}^{(i)}] \\ & + \frac{1}{2} [\widehat{\rho - \hat{\rho}(t|i)}] \widehat{h' R_0^{-1}} [\Delta y_t \Delta y_t' - R_0 \Delta t] R_0^{-1} \widehat{h}^{(i)} \end{aligned} \quad (57)$$

が得られる。(57) 式において, (A-3) を用いて, $\rho(x) = x_r$, $r=1, 2, \dots, n$ とおくと, (40) 式が得られる。

また,

$$Q(t|i) = \widehat{x_t x_t'^{(i)}} - \hat{x}(t|i) \hat{x}'(t|i)$$

であるから, (A-1), (A-3) および (57), (40) 式から, (41) 式が得られる。

5. 具体例

システムおよび観測機構が, それぞれ,

$$dx_t = a x_t dt + g dw_t(t)$$

$$dy_t = h(\alpha_t) x_t dt + r(\alpha_t) dv_t(t), \quad t \in [0, 2.0] \quad (58)$$

で表わされるスカラー系を考える。ただし, α_t は $L = \{1, 2, 3, 4\}$ で値をとるものとし, 遷移率 $\sigma_{ij}(t) \equiv \sigma_{ij}$, $i, j \in L$ は,

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{14} = \sigma_{23} = \sigma_{32} = \sigma_{41} = 0 \\ \sigma_{ii} = -2.0 \quad (i=1, 2, 3, 4) \\ \sigma_{ij} = 1.0 \quad (\text{上記以外の } i, j \text{ のとき}) \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

によって与えられているものとする。 α_t の値の変化に伴い, 係数 h および $r_0 = r^2$ は, それぞれ,

$$\left. \begin{aligned} h(1) = h(2) = 3.00, \quad h(3) = h(4) = 0.0 \\ r_0(1) = r_0(3) = 1.50, \quad r_0(2) = r_0(4) = 0.25 \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

により与えられているものとする。(59), (60) 式より,

(注6) $\Delta t \rightarrow 0$ のとき $\mathcal{Z}_t \rightarrow q_t$ である。また, このとき $U = U(\omega) \triangleq \{\tau; R_0(\tau, \alpha_t) \equiv R_0(\tau, \alpha_{t-}), \tau \in [0, T]\}$ とおくと, $t \in U$ に対し, $\hat{g}^* = \hat{g}$ したがって, $\Pi^* = \Pi$ であり, $t \in U$ に対しては,

$$\Pi^*(t) = \sum_{j \in L} \frac{\sigma_{ji}(t)}{\sum_{k \in L} \sigma_{jk}(t)} \Pi(t, j)$$

$L_t \triangleq \{i; R_0(t, i) = R_0(t, \alpha_{t-}), i \in L\}$, $L_{t+} \triangleq \{i; R_0(t, i) = R_0(t, \alpha_t), i \in L\}$ と表わされる。(C-2) より, U はほとんどすべての ω について有限集合となる¹⁴⁾ ことから, (56) 式より, $\Delta t \rightarrow 0$ のときは, 確率微分方程式

$$\begin{aligned} d\hat{g}(t) = & \sum_{i=1}^l \hat{g}^{(i)}(t) \{\Pi^*(t, i) - \Pi(t, i)\} + [\mathcal{D} + \mathcal{L}] g dt \\ & + [\widehat{g - \hat{g}}] \widehat{h' R_0^{-1}} \{\Delta y_t - \hat{h} dt\} \end{aligned}$$

が成立し, $\hat{g}(t)$ の見本過程は $t \in U$ 上で左連続となる。いうまでもなく, この式の実行は, $R_0 = R_0(t, \alpha_t)$ の真値が得られない限り不可能である。

$h(\alpha_t)$ と $r_0(\alpha_t)$ は独立な Markov 過程である。初期状態 x_0 および α_0 について, 先験的情報として,

$$\left. \begin{aligned} \Pi_0(1) = \Pi_0(2) = \Pi_0(3) = \Pi_0(4) = 0.25 \\ \hat{x}_0 = 5.0, \quad Q_0 = q_0 = 1.0 \end{aligned} \right\} \quad (61)$$

が与えられているものとする。また,

$$\left. \begin{aligned} a = -0.50 \\ g = 0.25 \end{aligned} \right\} \quad (62)$$

とする。この場合 (58) 式は, 観測機構において観測信号の中断と雑音レベルの変動が独立に発生する状況のもとでの状態推定問題⁹⁾を表わす。**Fig. 1** は, 初期状態 $x_0 = 10.0$ を与えた場合の一つの見本過程について, 真の状態 x_t , および, 本論文で提案したアルゴリズムを $\Delta t = 10^{-3}$ として適用した場合の状態推定値 $\hat{x}(t|t)$ のそれぞれの挙動を示している。また, **Fig. 2** には, 同じ見本過程について, $h(\alpha_t)$ の値と事後確率 $P\{h(\alpha_t) = 0 | \mathcal{Z}_t\} = \Pi(t, 3) + \Pi(t, 4)$ の値の変化の様子が, 同じく, **Fig. 3** には, $r_0(\alpha_t)$ の値と事後確率 $P\{r_0(\alpha_t) = 1.5 | \mathcal{Z}_t\} = \Pi(t, 1) + \Pi(t, 3)$ の値の変化の様子が示されている。

Fig. 1 One sample run results of x_t and $\hat{x}(t|t)$

Fig. 2 One sample run of $h(\alpha_t)$ and the corresponding run of $P\{h(\alpha_t) = 0 | \mathcal{Z}_t\}$

Fig. 3 One sample run of $r_0(\alpha_i)$ and the corresponding run of $P(r_0(\alpha_i)=1.5 | Z_i)$

子が、それぞれ示してある。Fig. 3を見れば、提案アルゴリズムを用いれば、係数 $r_0(\alpha_i)$ の値が迅速に、かつ、十分高い精度をもって同定できることがわかる。また、Fig. 2においても、係数 $h(\alpha_i)$ の値の同定について、ほぼ満足すべき結果が得られている。これらの結果は、Fig. 1における状態推定値が、観測中断や観測雑音レベルの変動という悪条件にもかかわらず、真の値に十分追従していることにそのまま反映されている。特に、観測の中断している時間区間にほぼ対応して、状態推定値 $\hat{x}(t|t)$ が滑らかな動きを示しているのは、この間の観測データが x_i に関する情報を含んでいないことを認知していることを表わしている。

紙面の余裕がないため、詳しい結果を報告することはできないが、パラメータ a が α_i に依存する場合の数値例⁶⁾についても非常に良い計算結果が得られたことを付記しておく。

6. 結 言

Markov 連鎖に依存する係数をもつ線形確率システム、特に観測雑音の統計量が Markov 連鎖に依存する場合に対する状態推定問題について考察し、差分形式のアルゴリズムを導出した。紙面の都合で省略したが、本論文のアルゴリズムは、ほとんどそのまま不規則な統計量をもつ観測雑音のもとでの信号検定問題に対して応用することができる。また、(2)式の雑音項

係数行列 R が $R(t, x_i)$ あるいは $R(t, x_i, \alpha_i)$ なる形の場合についても、本論文と同様の取扱いによって推定アルゴリズムを構成することが可能である。これについては、機会を改めて報告を行うことにする。

参 考 文 献

- [1] R. E. Kalman: A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problem, ASME Trans., J. Basic Engr., **D-82**, 35/45 (1960)
- [2] R. E. Kalman and R. S. Bucy: New Results in Linear Filtering and Prediction. ASME Trans., J. Basic Engr., **D-83**, 95/108 (1960)
- [3] G. A. Ackerson and K. S. Fu: On State Estimation in Switching Environments. IEEE Trans. on Automatic Control, **AC-19-3**, 10/17 (1970)
- [4] Y. Sawaragi, T. Katayama and S. Fujishige: State Estimation for Linear Continuous-Time Systems with Interrupted Observations, IEEE Trans. on Automatic Control, **AC-19-4**, 307/314 (1974)
- [5] S. Fujishige and Y. Sawaragi: Optimal Estimation for Continuous Systems with Jump Processes, IEEE Trans. on Automatic Control, **AC-19-3**, 225/228 (1974)
- [6] 明石・武内: Markov 連鎖係数を有する線形確率系の状態推定, システムと制御, **21-12**, 694/701 (1977)
- [7] 明石, 武内: 連続-離散空間で値をとる Markov 過程の推定, 計測自動制御学会論文集, **14-5**, 538/543 (1978)
- [8] I. V. Girsanov: On Transforming a Certain Class of Stochastic Processes by Absolutely Continuous Substitution of Measures, Theory Probability Appl., **5-3**, 285/361 (1960)
- [9] 國田: 確率過程の推定, 225, 産業図書 (1976)
- [10] M. Fujisaki, G. Kallianpur and H. Kunita: Stochastic Differential Equations for the Nonlinear Filtering Problem, Osaka J. Math., **9**, 19/40 (1972)
- [11] A. Segall: Stochastic Processes in Estimation Theory, IEEE Trans. on Information Theory, **IT-22-3**, 275/286 (1976)
- [12] Y. Takeuchi and H. Akashi: Nonlinear Filtering with Discrete-Time Observations (Submitted)
- [13] C. Doleans-Dade and P. A. Meyer: Integrales Stochastiques par rapport aux martingales locales. Seminaire de Probabilities IV, 77/107, Springer-Verlag (1970)
- [14] J. L. Doob: Stochastic Processes, 654, John Wiley, New York (1953)