基本線形システムのカテゴリカルな実現性理論

高 原 康 彦*

Category Theoretic Realization Theory of Basic Linear Systems

Yasuhiko TAKAHARA*

This paper is concerned with a category theoretic treatment of the realization theory of a basic linear system. In order to make a categorical problem of the realization we introduced two categories, the category of basic linear functional systems **BLFS** and that of basic linear dynamical systems **BLDS**, in addition to the category of basic linear systems **BLS** defined in another paper. The **BLFS** corresponds to a class of so-called "experiments" and is formulated as a category by extracting conditions when an experiment can be modeled into a basic linear system. The **BLDS** corresponds to a class of state space representations of basic linear systems and, similarly, their essential properties are extracted to be formulated as a category. Based on these categories, it was shown that two functors, a realization functor $F_1: \mathbf{BLFS} \rightarrow \mathbf{BLS}$ and a representation functor $F_2: \mathbf{BLS} \rightarrow \mathbf{BLDS}$ exist. It was also shown that F_1 and F_2 yield a universal and a co-universal map with respect to their corresponding forgetful functors $G_1: \mathbf{BLS} \rightarrow \mathbf{BLFS}$ and $G_2: \mathbf{BLDS} \rightarrow \mathbf{BLS}$, respectively and that those maps correspond to categorical representations of controllability and observability. Finally, a category theoretic meaning of a minimum realization of a basic linear system is discussed.

1. はじめに

参考文献 1) で基本線形システムのカテゴリール **BLS** を導入しその性質を考察した^{1), 2)}. この論文では基本線形システムの実現性理論をカテゴリールの枠組で考察する.

本論に入る前に二つの“いいわけ”をしておく. 第 1 はシステムのカテゴリールな考察の是非である. 数

学においてカテゴリール理論がもつ最大の説得力は数学の統一であろう. システム理論において筆者がカテゴリールな考察を行おうとしている理由は, システム理論の統一ということではなく, システム科学の構造自体が積極的にカテゴリール理論たろうとしているからである. システム科学がシステムと呼ばれる多様な対象を取り扱おうとする限り, それをすべて網羅的に取り扱うことはできない. 典型的ないくつかの対象に対し理論を形成し, 他のシステムに対してはそれらからの類推によって対処せざるをえない. このような方法が科学的であるためには, 類似の性質, 類似の限界, 限界によって同定された対象間の関係などについて, 安心のできる理論が形成されなければならない. すなわちカテゴリール理論である. 第 2 は実現性理論を取り上げる是非である.

実現性問題というのはよく知られているように, 関数で表現された入力-出力関係から, それを満足する状態表現を導く問題である. これのカテゴリールな取扱いというのは, 入力-出力関数関係および状態表現のカテゴリールを定め, その間の realization を functor として表現し, できればある意味で canonical な状態表現 (たとえば最小状態表現) がその functor の universal element になることを示し, realization の意味を明らかにしようとするものである^{4), 5)}. システムに対するカテゴリール論はほとんどこのような議論である. この論文で再び同じ主旨の問題を取り上げる理由は, 基本線形システムの表現に対するカテゴリールの考察は未だ行われておらず, 将来他の問題たとえばフィードバックをカテゴリールに取り扱うことを予定しているが¹⁾, そのためには確かなカテゴリールな表現理論を必要とすることにある. 注意すべきことは, カテゴリールや functor を定めることは, どのようなシステムを対象とするかによって易しくも難しくもなる. 従来の研究はオートマトンのシステムを対象としている⁴⁾. 本論文の基本線形システムはオートマトンのシステムに比べ構造が複雑であり, また本論文ではス

* 東京工業大学総合理工学研究科 横浜市緑区長津田町

* Graduate School of Science and Engineering, Tokyo Institute of Technology, Yokohama (Received October 17, 1977)

テムはあくまでも入力-出力関係（一般には関数ではない）であるから，従来の実現性問題と異なり（問題は難しくなる）別の考察を要する．

この論文で使用する記法について説明しておく⁵⁾．時間軸 T は議論を簡単にするために $T = \mathbb{R}^+$ （非負の実数の集合）とする． A と B をそれぞれ（ある）システムの入力と出力のアルファベット集合とする（以下集合は大文字，その要素を小文字で表す）． $X \subset A^T$ ， $Y \subset B^T$ となる集合 X と Y が動的システムの入力集合，出力集合である． T の区間を $T' = [0, t]$ ， $T_t = [t, \infty)$ ， $T_{t'} = [t, t']$ ， $\bar{T}' = [0, t]$ ， $\bar{T}_{t'} = [t, t']$ とするとき， $x \in X$ の制限を $x' = x|T'$ ， $\bar{x}' = x|\bar{T}'$ ， $x_t = x|T_t$ ， $x_{t'} = x|T_{t'}$ ， $\bar{x}_{t'} = x|\bar{T}_{t'}$ と表現する． $y \in Y$ あるいはもっと一般に集合，ベクトルについても $X' = \{x' | x \in X\}$ ， $(x, y)_t = (x_t, y_t)$ のように同様の記法を行う．一般に時間システム S は $S \subset X \times Y$ となる関係である．ただし $\mathcal{D}(S) = \{x | (\exists y)((x, y) \in S)\}$ とするとき $\mathcal{D}(S)$ は $(\forall x, x')(\forall t)(x, x' \in \mathcal{D}(S) \rightarrow x' \cdot x_t' \in \mathcal{D}(S))$ を満足するとする． $x' \cdot x_t'$ は x' と x_t' の接続である．議論の簡単化のために $\mathcal{D}(S) = X$ ， $\mathcal{R}(S) = \{y | (\exists x)((x, y) \in S)\} = Y$ とする．時間システム S の初期状態表現というのは $\rho_0: C \times X \rightarrow Y$ となる関数で $(x, y) \in S \leftrightarrow (\exists c \in C)(y = \rho_0(c, x))$ を満足するものである． C が状態空間である． ρ_0 が任意の $c \in C$ と $c' \in C$ に対し $[(\forall x)(\rho_0(c, x) = \rho_0(c', x) \rightarrow c = c')]$ を満足するとき ρ_0 は既約であるとよぶ．また ρ_0 が $(\forall c)(\forall x, x')(\wedge t)(x' = x_t' \rightarrow \rho_0(c, x) \bar{T}' = \rho_0(c, x')|\bar{T}')$ を満足するとき ρ_0 を強因果的であるとよぶ．強因果的な ρ_0 をもつシステムを強因果的システムと呼ぶ．時間システムの状態表現は各 $S_t = S|T_t$ に対する“初期”状態表現 $\rho_t: C \times X_t \rightarrow Y_t$ と状態遷移関数 $\phi_{tt'}: C \times X_{t'} \rightarrow C$ によって表現される．ただし $\{\rho_t\}$ と $\{\phi_{tt'}\}$ は適合性の条件たとえば $\rho_t(c, x_{tt'} \cdot x_t')|T_{t'} = \rho_{t'}(\phi_{tt'}(c, x_{tt'}), x_t')$ などを満足する⁵⁾．時間関数を時間軸にそって右に τ だけ平行移動する演算を S^τ と書く．すなわち $S^\tau(x_t)(\sigma) = x_t(\sigma - \tau)$ である．時間システム S が $S^{-t}(S|T_t) = S$ を満足するとき S を強定常であるとよぶ．特に $S^{-t}(-|T_t)$ の演算を λ_t と書く．すなわち $\lambda_t(x) = S^{-t}(x|T_t)$ である．システムが(強)定常のとき，その表現はすべて時間不変になることを条件とする⁵⁾．たとえば $\rho_t(c, x_t) = S^{-t}[\rho_0(c, S^{-t}(x_t))]$ である．また当然ながら $\lambda_t(X) = X$ ， $\lambda_t(Y) = Y$ を満足するとする． A と B が体 $\mathcal{A}$ （この論文では線形系の体はいつでも共通に $\mathcal{A}$ とする）の上での線形空間のとき， $A^T \times B^T$ も標準的定義によって $\mathcal{A}$ の上の線形空間になる．このとき線形部分空間になる

時間システム $S \subset A^T \times B^T$ を線形システムとよぶ．すべての t に対し $x(t) = 0$ あるいは $y(t) = 0$ となる関数を 0 で表す．線形システムに対する表現はすべて線形関数になるとする．特に C は体 $\mathcal{A}$ 上の線形空間， $\rho_{1t}(c) = \rho_t(c, 0_t)$ （状態応答）， $\rho_{2t}(x_t) = \rho_t(0, x_t)$ （入力応答）， $\phi_{1t't'}(c) = \phi_{t't'}(c, 0_{t't'})$ ， $\phi_{2t't'}(x_{t't'}) = \phi_{t't'}(0, x_{t't'})$ で表す． ρ_{2t} に対し実現性の理論から $\rho_{20}(0' \cdot x_t) = 0' \cdot \rho_{2t}(x_t)$ が成立する⁸⁾．時間システム S が i) $(\exists \hat{t})(\forall (x, y) \in S)(\forall (x', y') \in S)(\forall t \geq \hat{t})((x, y)^t = (x', y')^t \& x' = x'_t' \rightarrow \bar{y}' = \bar{y}'_t')$ ，ii) $(\forall (x, y)^t)(\forall x'_t)(\exists y'_t)((x, y)^t \in S^t \rightarrow (x' \cdot x'_t, y' \cdot y'_t) \in S)$ の二つの条件を満足するとき， S は $\hat{t}$ から過去決定的であるとよぶ⁵⁾．この論文でのカテゴリ-の定義記法は参考文献 6) による．

特に object x から x' への morphism f を $f: x \rightarrow x'$ あるいは $x \xrightarrow{f} x'$ ，morphism $f: x \rightarrow y$ と $g: y \rightarrow z$ の composition を $g \circ f: x \rightarrow z$ ， x から x' への morphism のクラスを $\text{hom}(x, x')$ と書く．カテゴリ-と functor 自体の定義は参考文献 1) にも述べてある．この論文では上記概念以外に universal map を使うが，その定義は付録に述べてある．

2. 基本線形関数システムのカテゴリ-と基本線形ダイナミカルシステムのカテゴリ-

参考文献 1) で基本線形システム（以下 b.l.s と書く）のカテゴリ- **BLS** を導入した．この論文ではそれに関係した二つのカテゴリ-基本線形関数システム（以下 b.l.f.s と書く）のカテゴリ- **BLFS** と基本線形ダイナミカルシステム（以下 b.l.d.s と書く）のカテゴリ- **BLDS** を導入する．参考文献 1) によると b.l.s. はつぎのように定義される時間システムである．

【定義 1】 右から連続の基本線形システム

つぎの性質を満足する時間システム $S \subset X \times Y$ を右から連続な基本線形システムとよぶ．

- i) 線形性: $(\forall s, s')(\forall \alpha, \beta \in \mathcal{A})(s, s' \in S \rightarrow \alpha s + \beta s' \in S)$
- ii) 強定常性: $(\forall t)(\lambda_t(S) = S)$
- iii) 強い意味の前因果性: $(\forall t)(\forall x, x')(x' = x'_t' \rightarrow S(x)|\bar{T}' = S(x')|\bar{T}')$
ただし $S(x) = \{y | (x, y) \in S\}$
- iv) システムコアの有限次元性: $\dim S(0) < \infty$
- v) 右からの連続性: $(\forall y \in S(0))(\inf_t \{t | y_t = 0_t\} = 0 \rightarrow y = 0)$

定義 1 は右から連続な基本線形システムであるが，

この論文の b.l.s. はいつでも定義1のものとする。
b.l.s. 間の準同形写像はつぎのように定義される。

【定義2】 b.l.s. の準同形写像

$S \subset X \times Y$ と $S' \subset X' \times Y'$ を b.l.s. とする。 $h_1: X \rightarrow X'$ と $h_2: Y \rightarrow Y'$ がつぎの条件を満足するとき、 $h = h_1 \times h_2 | S$ (あるいは $h = \langle h_1, h_2 \rangle$ と書く) を S から S' への準同形写像とよぶ。

- i) h_1 と h_2 は線形
- ii) $(\forall (x, y) \in S)((h_1(x), h_2(y)) \in S')$
- iii) 任意の $t \in T$, $x \in X$, $y \in Y$ に対し
 $h_1 \lambda_t(x) = \lambda_t h_1(x)$, $h_2 \lambda_t(y) = \lambda_t h_2(y)$
- iv) 任意の $t \in T$, $x \in X$, $y \in Y$ に対し
 $h_1(0^t \cdot x_t) | T^t = 0^t$ かつ $h_2(0^t \cdot y_t) | T^t = 0^t$

定義1と定義2から BLS はつぎのように定義できる。

【定義3】 BLS

定義1の b.l.s. を object, 定義2の準同形写像を morphism とするとそれはカテゴリーをなし、それを基本線形システムのカテゴリー BLS とよぶ。ただし $S \xrightarrow{h} S' \xrightarrow{h'} S''$ ($h = \langle h_1, h_2 \rangle$, $h' = \langle h'_1, h'_2 \rangle$) に対し $S \xrightarrow{h' \cdot h} S''$ を $h' \cdot h = \langle h'_1 \cdot h_1, h'_2 \cdot h_2 \rangle$ とする。

つぎに基本線形関数システムのカテゴリー BLFS を導入する。

【定義4】 基本線形関数システム (b.l.f.s.)

つぎの性質を満たす時間システム $S \subset X \times Y$ を基本線形関数システムとよぶ。

- i) S は X から Y への線形関数である。 $S: X \rightarrow Y$
- ii) 任意の $t \in T$, $x, x' \in X$ に対して
 $x' = x'^t \rightarrow S(x) | \bar{T}^t = S(x') | \bar{T}^t$
- iii) 任意の $t \in T$, $x \in X$ に対して
 $\lambda_t S(0^t \cdot S^t(x)) = S(x)$
- iv) $\{\lambda_t(S(x^t \cdot 0_t)) | t \in T \text{ \& } x^t \in X^t\}$ は有限次元の部分空間

- v) 任意の $t \in T$ と $x \in X$ に対して $\inf_{\tau} \{\tau | [\lambda_{\tau}(S(x^t \cdot 0_t))] | T_{\tau} = 0_{\tau}\} = 0 \rightarrow S(x^t \cdot 0_t)(t) = 0$

b.l.f.s. は線形常微分方程式系の入力応答を抽象したものと考えてよい^{2), 8)}。 ii) の条件は強因果性を保障するものである。 iii) は定常性と S の実現可能性のための条件 (入力応答の適合性) である⁵⁾。 iv) の条件は実現されるダイナミカルシステムが有限次元の状態空間をもつことを保障するものである。 $\{\lambda_t S(x^t \cdot 0_t) | t \in T \text{ \& } x^t \in X^t\}$ が Y の線形部分空間になることはつぎのように示せる。 $t \leq s$ として $\lambda_t S(x^t \cdot 0_t)$ と $\lambda_s S(x'^t \cdot 0_t)$ を考える。 $s - t = \tau$ とすると、 iii) より $\lambda_{\tau} S(0^{\tau} S^{\tau}(x^t \cdot 0_t)) = S(x^t \cdot 0_t)$ であるから、 $\lambda_t S(x^t \cdot 0_t) =$

$\lambda_t [\lambda_{\tau} S(0^{\tau} \cdot S^{\tau}(x^t \cdot 0_t))] = \lambda_t S(0^{\tau} \cdot S^{\tau}(x^t) \cdot 0_t)$ になり、
 $\alpha \lambda_t S(x^t \cdot 0_t) + \beta \lambda_t S(x'^t \cdot 0_t) = \lambda_t S((\alpha 0^{\tau} \cdot S^{\tau}(x^t)) + \beta x'^t) \cdot 0_t$ をうる。 ($\alpha, \beta \in \mathcal{A}$)。以下 b.l.f.s は S と書くよりその意味から ρ_{20} と表示することにする。

BLFS はつぎの定理で与えられる。

《定理1》 object を定義4の b.l.f.s, morphism を定義2の準同形写像とすると、これはカテゴリーをなし、そのカテゴリーを以下 BLFS とよぶ。ただし、morphism の合成は定義3に準ずる。

(証明) 恒等写像 $i: \rho_{20} \rightarrow \rho_{20}$ が morphism になるのは明らかである。また $h' \cdot h \lambda_t(x, y) = h' \lambda_t h(x, y) = \lambda_t h' \cdot h(x, y)$, かつ $h_1(0^t \cdot x_t) = 0^t \cdot x'_t$ であるから $[h'_1 \cdot h_1(0^t \cdot x_t)] | T^t = h'_1(0^t \cdot x'_t) | T^t = 0^t$ になり $h' \cdot h$ も morphism である。 $\text{hom}(\rho_{20}, \rho_{20'})$ が集合になるのは明らかである。 (Q. E. D.)

なお ρ_{20} と ρ'_{20} が関数であるから、 $h_1 \times h_2(\rho_{20}) \subset \rho'_{20'}$ と $h_2 \rho_{20}(x) = \rho'_{20'}(h_1(x)) (x \in X)$ とは同値である。

最後に基本線形ダイナミカルシステムのカテゴリー BLDS を導入する。

【定義5】 基本線形ダイナミカルシステム (b.l.d.s.)

つぎの条件を満たす関数族 $\langle \rho_0, \{\phi_{0t} | t \in T\} \rangle$ を基本線形ダイナミカルシステムとよぶ。

- i) ρ_0 は有限次元の線形空間 C (C の体は $\mathcal{A}$) と X の上に定義された線形関数 $\rho_0: C \times X \rightarrow Y$ である。
 ρ_{10}, ρ_{20} は1章で定義したとおりとする。また各 $t \in T$ に対し ϕ_{0t} は $\phi_{0t}: C \times X^t \rightarrow C$ となる線形関数である。ただし $\phi_{00}(c, x^0) = c$ とする。 ϕ_{10t}, ϕ_{20t} は1章で定義したとおりとする。

- ii) ρ_0 と $\bar{\phi} = \{\phi_{0t} | t \in T\}$ の間につぎの関係が成立する。
 $\lambda_t \rho_0(c, x) = \rho_0(\phi_{0t}(c, x^t), \lambda_t x)$

- iii) $\phi_{0t'}(c, x^t \cdot x_{t'}) = \phi_{0\tau}(\phi_{0t}(c, x^t), S^{-t}(x_{t'}))$ ただし $\tau = t' - t \geq 0$

- iv) 任意の $t \in T$, $x, x' \in X$, $c \in C$ に対し

$$x' = x'^t \rightarrow \rho_0(c, x) | \bar{T}^t = \rho_0(c, x') | \bar{T}^t$$

- v) 各 $t \in T$ に対し $\phi_{10t}: C \rightarrow C$ は全射

- vi) 各 $t \in T$, $c \in C$ に対し

$$\rho_{10}(c) | T_t = 0_t \rightarrow \rho_{10}(c) = 0$$

以下簡単のために $\langle \rho_0, \{\phi_{0t} | t \in T\} \rangle$ を $\langle \rho_0, \bar{\phi} \rangle$ と書く。 C を状態空間、 ϕ_{0t} を状態遷移関数、 ρ_0 を初期状態応答関数と考えれば b.l.d.s. は状態表現である⁵⁾。

ii) の条件は ρ_0 と $\bar{\phi}$ の適合性条件に定常性を組み合わせたものである。iii) の条件は状態遷移関数の半群性である。iv) と v) はそれぞれ強因果性と強定常性を保障するものである。

関数 $\lambda: C \rightarrow B$ を $\lambda(c) = \rho_{10}(c)(0)$ で定義すると λ はもちろん線形関数である。しかも $\rho_0(c, x)(t) = \rho_0(c,$

$x' \cdot 0_t(t)$, ((iv) より) $= [\lambda_t \rho_0(c, x' \cdot 0_t)](0) = [\rho_0(\phi_{0t}(c, x'), 0)](0)$, ((ii) より) $= \rho_{10}(\phi_{0t}(c, x'))(0) = \lambda(\phi_{0t}(c, x'))$, すなわち λ は出力関数である. 逆に線形出力関数 $\lambda: C \rightarrow B$ と, i), iii), v) を満足する $\tilde{\phi} = \{\phi_{0t} | t \in T\}$ があれば $\rho_0: C \times X \rightarrow Y$ がつぎのように定義できる.

$$\rho_0(c, x)(t) = \lambda(\phi_{0t}(c, x'))$$

ρ_0 が線形であることは明らかである. また任意の $t, \tau \in T, c \in C, x \in X$ に対し

$$\begin{aligned} [\lambda_t \rho_0(c, x)](\tau) &= S^{-t}(\rho_0(c, x)|T_t)(\tau) \\ &= \rho_0(c, x)(t+\tau) \\ &= \lambda[\phi_{0t}(c, x')](t'+\tau) \\ &= \lambda[\phi_{0\tau}(\phi_{0t}(c, x'), \lambda_t x_{t'})] \\ &= \rho_0(\phi_{0t}(c, x'), \lambda_t x)(\tau) \end{aligned}$$

により ii) も成立する. $t \in T, x, x' \in X, c \in C, 0 \leq \tau \leq t$ を任意, また $x' = x''$ とすると

$$\rho_0(c, x)(\tau) = \lambda \phi_{0\tau}(c, x') = \lambda \phi_{0\tau}(c, x'') = \rho_0(c, x'')(\tau)$$

により iv) も成立する. すなわち初期状態応答関数と状態遷移関数族でダイナミカルシステムを定義したものと, 出力関数と状態遷移関数族で定義したものとは等価である. 通常は後者が普通であるが, ここでは記号の簡単化のために前者による定義を用いる.

BLDS はつぎの定理で与えられる.

《定理 2》 object を定義 5 の b.l.d.s とする. 二つの b.l.d.s. $\langle \rho_0, \tilde{\phi} \rangle$ と $\langle \rho'_0, \tilde{\phi}' \rangle$ 間の morphism $\bar{h} = \langle h_1, h_2, h_3 \rangle: \langle \rho_0, \tilde{\phi} \rangle \rightarrow \langle \rho'_0, \tilde{\phi}' \rangle$ をつぎのようにきめる.

i) h_1, h_2, h_3 は $h_1: X \rightarrow X', h_2: Y \rightarrow Y', h_3: C \rightarrow C'$ となる線形関数である.

ii) 任意の $t \in T$ に対して **Fig. 1** が可換になる. ただし $h_1(x') = h_1(x' \cdot 0_t)|T^t$ とする.

iii) 任意の $t \in T, x \in X, y \in Y$ に対し $h_1 \lambda_t(x) = \lambda_t h_1(x)$, かつ $h_2 \lambda_t(y) = \lambda_t h_2(y)$

iv) 任意の $t \in T, x \in X, y \in Y$ に対し $h_1(0^t \cdot x_t)|T^t = 0^t$ かつ $h_2(0^t \cdot y_t)|T^t = 0^t$

このようにきめた object と morphism はカテゴリーを構成する. ただし morphism の合成は定義 3 に準ずる. このカテゴリーを基本線形ダイナミカルシステムのカテゴリー **BLDS** とよぶ.

$$\begin{array}{ccc} C \times X' & \xrightarrow{\phi_{0t}} & C \\ \downarrow h_3 \times h_1 & & \downarrow h_3 \\ C' \times X'^t & \xrightarrow{\phi_{0t}'} & C' \end{array} \quad \begin{array}{ccc} C \times X & \xrightarrow{\rho_0} & Y \\ \downarrow h_3 \times h_1 & & \downarrow h_2 \\ C' \times X' & \xrightarrow{\rho_0'} & Y' \end{array}$$

Fig. 1

(証明) 定理 1 と同様に示せる.

(Q. E. D.)

3. realization functor と representation functor

2章で二つのカテゴリー **BLFS** と **BLDS** を導入した. この章でこれらのカテゴリーは **BLS** と realization の functor によって結びつけられていることを示し b.l.s. の実現性の意味を明らかにする.

参考文献 2) によると b.l.s. は過去決定的である.

b.l.s. を $S \subset X \times Y$ とし, S が t から過去決定的であるとすると, S の標準状態表現 $\langle \rho_0, \tilde{\phi} \rangle$ がつぎのように与えられる²⁾.

$$\begin{aligned} \rho_0: S(0) \times X &\rightarrow Y \quad \text{ただし} \quad \rho_{10}(y) = y \quad \text{かつ} \quad \rho_{20}(x) \\ &= y \mapsto (0^t \cdot S^t(x), 0^t \cdot S^t(y)) \in S \\ \phi_{0t}: S(0) \times X' &\rightarrow S(0) \quad \text{ただし} \quad \phi_{0t}(c, x') \\ &= \lambda_t(\rho_0(c, x' \cdot 0_t)) \end{aligned}$$

また $(\forall t)(\forall y \in S(0))(y_t = 0_t \rightarrow y = 0)$ が成立するから ϕ_{10} は 1 対 1 対応になる¹⁾.

最初に **BLS** と **BLFS** の関係を考える.

《定理 3》 functor $G_1: \mathbf{BLS} \rightarrow \mathbf{BLFS}$ がつぎのように定義できる.

i) $S \in \text{Ob}(\mathbf{BLS})$ に対し $G_1(S) = \rho_{20}$ (ρ_{20} は上記の標準表現).

ii) $h: S \rightarrow S'$ に対し $G_1(h) = \langle h_1, h_2 \rangle$. ただし $h = h_1 \times h_2 | S$ とする.

(証明) はじめに ρ_{20} が b.l.f.s. であることを定義の条件を確認することで示す. i) ρ_{20} の線形性は明白.

ii) $x' = x'', \rho_{20}(x) = y, \rho_{20}(x') = y'$ とすると, 定義から $(0^t \cdot S^t(x), 0^t \cdot S^t(y)) \in S, (0^t \cdot S^t(x'), 0^t \cdot S^t(y')) \in S$ である.

$0^t \cdot S^t(x)|T^s = 0^t \cdot S^t(x')|T^s (s = t + i)$ であるから過去決定性より $0^t \cdot S^t(y)|T^s = 0^t \cdot S^t(y')|T^s$, すなわち $y' = y'$. iii) $\rho_{20}(0^t \cdot S^t(x)) = y$ とすると, $(0^t \cdot S^t(x), 0^t \cdot S^t(y)) \in S (s = t + i)$. $(0, 0) \in S$ と過去決定性から $0^t \cdot S^t(y)|T^s = 0^s$. すなわち $y' = 0^s$ より $\rho_{20}(0^t \cdot S^t(x)) = 0^t \cdot y_t'$ とおける.

ゆえに $(0^s \cdot S^s(x), 0^s \cdot S^s(y_t')) \in S$ すなわち $(0^t \cdot S^t(x), 0^t \cdot S^t(S^{-t}(y_t')) \in \lambda_t(S) = S$ になるから $\rho_{20}(x) = S^{-t}(y_t') = \lambda_t \rho_{20}(0^t \cdot S^t(x))$.

iv) $\rho_{20}(x' \cdot 0_t) = y$ とすれば, $(0^t \cdot S^t(x'), 0^t \cdot S^t(y)) \in S (s = t + i)$ になるので $(0_s, S^t(y)|T_i) = (0_s, S^t(y_t)) \in S | T_i$ をうる.

ゆえに $(0, \lambda_t(y)) \in \lambda_t(S) = S$ より $\lambda_t(y) \in S(0)$. $S(0)$ はもちろん有機次元である.

v) vi) の結果より明らか. つぎに $h: S \rightarrow S'$ のとき $G_1(h) \in \text{hom}(\rho_{20}, \rho_{20}')$ を示す. S' は t から過去決定的とする. x を任意として $y = \rho_{20}(x)$ とすると $y = \lambda_t \rho_{20}(0^t \cdot S^t(x))$.

また強因果性から $\rho_{20}(0^t \cdot S^t(x))|T^t = 0^t$ になるので $(0^t \cdot S^t(x), 0^t \cdot S^t(y)) \in \rho_{20} \subset$

S . すなわち $(h_1(0^* \cdot S'(x)), h_2(0^* \cdot S'(y))) \in S'$. $h = \langle h_1, h_2 \rangle$ の定義から $h_1(0^* \cdot S'(x))|T' = 0^*$. また λ_i $h_1(0^* \cdot S'(x)) = h_1 \lambda_i(0^* \cdot S'(x)) = h_1(x)$ より $h_1(0^* \cdot S'(x))|T_i = S'(h_1(x))$. ゆえに $h_1(0^* \cdot S'(x)) = 0^* \cdot S'(h_1(x))$. 同様に $h_2(0^* \cdot S'(x)) = 0^* \cdot S'(h_2(y))$. すなわち $h_2(y) = \rho_{20}'[h_1(x)]$. (Q. E. D.)

《定理 4》 functor $F_1: \mathbf{BLFS} \rightarrow \mathbf{BLS}$ がつぎのように定義できる.

i) $\rho_{20} \in \text{Ob}(\mathbf{BLFS})$ に対し $F_1(\rho_{20}) = \rho_{20} + S_0$. ただし $S_0 = \{(0, y) | y = \lambda_i \rho_{20}(x^t \cdot 0_i) \text{ \& } x^t \in X^t \text{ \& } t \in T\}$, $\rho_{20} + S_0 = \{s + s' | s \in \rho_{20} \text{ \& } s' \in S_0\}$.

ii) $h: \rho_{20} \rightarrow \rho_{20}'$ に対し $F_1(h) = h$.

F_1 を realization functor とよぶ.

(証明) i) $S = \rho_{20} + S_0$ が強定常かつ右からの連続性を満足するならば, S が b.l.s. になることは参考文献 2) で示されている. 最初に $t' \leq t$ のとき $\lambda_i(S) \supset \lambda_i(S)$ を示す. $(x_i, y_i) \in S_t$ とすれば S の定義から適当な $\hat{x}^t, \hat{y}^t, z^t$ に対し $\hat{y}^t \cdot \hat{y}_i = \lambda_i \rho_{20}(z^t \cdot 0_i) + \rho_{20}(\hat{x}^t \cdot x_i)$ になる. $\tau = t - t'$, $\sigma = s + \tau$ とすると, $\lambda_i(\hat{y}_i \cdot y_i) = \lambda_i \rho_{20}(z^t \cdot 0_i) + \lambda_i \rho_{20}(\hat{x}^t \cdot 0_\tau) + \lambda_i \rho_{20}(0^t \cdot \hat{x}_{\tau i} \cdot x_i) = \lambda_i \rho_{20}(z^t \cdot 0_i) + \lambda_i \rho_{20}(0^t \cdot S^t(\hat{x}^t) 0_\tau) + \rho_{20}(S^{-\tau}(\hat{x}_{\tau i} \cdot x_i)) = \lambda_i \rho_{20}(z^t \cdot S^t(\hat{x}^t) \cdot 0_\sigma) + \rho_{20}(S^{-\tau}(\hat{x}_{\tau i} \cdot x_i))$. すなわち $S^{-\tau}(\hat{x}_{\tau i} \cdot x_i, \hat{y}_{\tau i} \cdot y_i) \in S$. ゆえに $(x_i, y_i) = (\hat{x}_{\tau i} \cdot x_i, \hat{y}_{\tau i} \cdot y_i)|T_i \in S^t(S)|T_i = S^t(S')$. すなわち $S^{-t'}(x_i, y_i) \in S^{-t''}(S')$. 特に $t' = 0$ とすると $S \supset \lambda_i(S)$. つぎに $\lambda_i(S) \supset S$ を示す. S_0 が有限次元であることからある $\tau \in T$ に対し $S_0 = \{(0, y) | y = \lambda_i \rho_{20}(x^\tau \cdot 0_i) \text{ \& } x^\tau \in X^\tau\}$ となることはいえる⁷⁾. $(x, y) \in S$ を任意とする. $t \geq \tau$ とする. 定義から, 適当な $\hat{x}^t$ に対し $y = \rho_{20}(x) + \lambda_i \rho_{20}(\hat{x}^t \cdot 0_i) = \lambda_i \rho_{20}(0^t \cdot S^t(x)) + \lambda_i \rho_{20}(\hat{x}^t \cdot 0_\tau) = \lambda_i \rho_{20}(\hat{x}^t \cdot S^t(x)) = \lambda_i \rho_{20}(z^t \cdot S^t(x))$. ただし $z^t = 0^t \cdot S^t(\hat{x}^t)$, $\sigma = t - \tau$. ゆえに $S^t(y) = \rho_{20}(z^t \cdot S^t(x))|T_i$. $(z^t \cdot S^t(x), \rho_{20}(z^t \cdot S^t(x))) \in S$ であるから, $(S^t(x), S^t(y)) \in S|T_i$ になり $S^t(S) \subset S|T_i$. すなわち $S \subset \lambda_i(S)$ をうる. 前の結果と合すると $t \geq \tau$ に対し $S = \lambda_i(S)$. $\tau > t$ のときは前の結果から $S \supset \lambda_i(S) \supset \lambda_i(S) = S$ で, やはり $S = \lambda_i(S)$ である. $y \in S(0)$ ならばある x^t に対し $y = \lambda_i \rho_{20}(x^t \cdot 0_i)$ であるから連続性も成立する. ii) $F_1(h) = h: F_1(\rho_{20}) \rightarrow F_1(\rho_{20}')$ を示すには $F_1(h)(F_1(\rho_{20})) \subset F_1(\rho_{20}')$ をいえばよい. $(x, y) \in F_1(\rho_{20})$ を任意とする. 定義よりある $z^t \in X^t$ に対し $y = \lambda_i \rho_{20}(z^t \cdot 0_i) + \rho_{20}(x)$. ゆえに $h_2(y) = h_2 \lambda_i \rho_{20}(z^t \cdot 0_i) + h_2 \rho_{20}(x) = \lambda_i h_2 \rho_{20}(z^t \cdot 0_i) + \rho_{20}' h_1(x) = \lambda_i \rho_{20}'(h_1(z^t \cdot 0_i)) + \rho_{20}' h_1(x) = \lambda_i \rho_{20}'(h_1(z^t \cdot 0_i) \cdot 0_i) + \rho_{20}'(h_1(x))$ ($\lambda_i h_1(z^t \cdot 0_i) = h_1 \lambda_i(z^t \cdot 0_i) = 0$ に注意) すなわち $(h_1(x), h_2(y)) \in F_1(\rho_{20}')$ である. (Q. E. D.)

《定理 5》 ρ_{20} を $\mathbf{BLFS}$ の任意の object とする.

このとき $(i, F_1(\rho_{20}))$ は G_1 に関する ρ_{20} の universal map である. すなわち, S' を $\mathbf{BLS}$ の任意の object, $h: \rho_{20} \rightarrow G_1(S')$ を任意の morphism とするとき, $G_1(\bar{h}) \cdot i = h$ となる. morphism $\bar{h}: F_1(\rho_{20}) \rightarrow S'$ は一意的存在する. ただし $i: \rho_{20} \rightarrow \rho_{20}$ は identity morphism である.

(証明) $G_1 F_1(\rho_{20}) = \rho_{20}$ は明らかであるから, $i: \rho_{20} \rightarrow G_1 F_1(\rho_{20})$ である. $\bar{h} = h$ である. (Q. E. D.)

[系] $G_1(S') = \rho_{20}$ ならば inclusion map $i: F_1(\rho_{20}) \rightarrow S'$ は morphism である.

《定理 6》 functor $G_2: \mathbf{BLDS} \rightarrow \mathbf{BLS}$ がつぎのように定義できる.

i) $G_2(\rho_0, \bar{\phi}) = \{(x, y) | (\exists c)(y = \rho_0(c, x))\}$

ii) $G_2(h_1, h_2, h_3) = \langle h_1, h_2 \rangle$

(証明) $S = G_2(\rho_0, \bar{\phi})$ が b.l.s. であることを定義の条件を調べることで示す. i) 線形性は明らか. ii) $(x_i, y_i) \in S|T_i$ とすればある (c, z^t) に対し $y_i = \rho_0(c, z^t \cdot x_i)|T_i = S^t(\rho_0(\phi_{0i}(c, z^t), S^{-t}(x_i)))$. すなわち $(S^{-t}(x_i), S^{-t}(y_i)) \in S$. ゆえに $S|T_i \subset S^t(S)$. 逆に $(x, y) \in S$ とすればある $c \in C$ に対し $y = \rho_0(c, x)$. ϕ_{10i} が全射であるから $\phi_{10i}(c') = c$ となる c' がある. ゆえに $\rho_0(c', 0^t \cdot S^t(x))|T_i = S^t(\rho_0(\phi_{10i}(c'), x)) = S^t(\rho_0(c, x)) = S^t(y)$. すなわち $S^t(x, y) = (0^t \cdot S^t(x), \rho_0(c', 0^t \cdot S^t(x)))|T_i \in S|T_i$ となり $S^t(S) \subset S|T_i$ をうる. iii) ρ_0 が強因果的であるから前因果性は成立する. iv) $\dim S(0) = \dim C$ である. v) $\rho_{10}(c)|T_i = 0 \rightarrow \rho_{10}(c) = 0$ より明らか. $G_2(h_1, h_2, h_3)$ が morphism になることを示すには $h_1 \times h_2(S) \subset S'$ をいえばよい. 他の条件は自動的に満足されている. 実際 $(x, y) \in S$ とするとある $c \in C$ に対し $y = \rho_0(c, x) \rightarrow h_2 y = \rho_0'(h_3(c), h_1(x)) \rightarrow (h_1(x), h_2(y)) \in S'$. (Q. E. D.)

《定理 7》 functor $F_2: \mathbf{BLS} \rightarrow \mathbf{BLDS}$ がつぎのように定義できる.

i) $S \in \text{Ob}(\mathbf{BLS})$ に対し $F_2(S) = \langle \bar{\rho}_0, \bar{\phi} \rangle; \langle \bar{\rho}_0, \bar{\phi} \rangle$ は S の標準表現.

ii) $\langle h_1, h_2 \rangle: S \rightarrow S'$ に対し $F_2(h_1, h_2) = \langle h_1, h_2, h_3 \rangle$. ただし $h_3 = h_2|S(0)$.

F_2 を representation functor とよぶ.

(証明) 参考文献 2) で示したことから, $\langle \bar{\rho}_0, \bar{\phi} \rangle$ が b.l.d.s. であることをいうには連続性を示せばよい. 参考文献 1) で $y \in S(0)$ は $y_i = 0 \rightarrow y = 0$ が示されているので連続性も成立する. $h_2 \bar{\rho}_0(c, x) = \bar{\rho}_0(h_3(c), h_1(x))$ は参考文献 1) で示されている. $\bar{\phi}_0$ の可換性は, (c, x^t) を任意とすると, $h_3 \bar{\phi}_0(c, x^t) = h_3 \lambda_i \bar{\rho}_0(c, x^t \cdot 0_i) = \lambda_i h_2 \bar{\rho}_0(c, x^t \cdot 0_i) = \lambda_i \bar{\rho}_0'(h_3(c), h_1(x^t) \cdot 0_i) = \bar{\phi}'_0(h_3(c), h_1(x^t))$. (Q. E. D.)

《定理 8》 S を BLS の任意の object とする。このとき $(F_2(S), i)$ は G_2 に関する S の co-universal map である。すなわち任意の $\langle \rho_0', \bar{\phi}' \rangle, h: G_2(\rho_0', \bar{\phi}') \rightarrow S$ に対し $h = i \cdot G_2(\bar{h})$ となる morphism $\bar{h}: (\rho_0', \bar{\phi}') \rightarrow F_2(S)$ が存在する。 i は S から S への identity morphism である。

(証明) $G_2 F_2(S) = S$ は明らかである。望ましい $\bar{h} = \langle h_1', h_2', h_3 \rangle$ が存在すれば、 $h = i \cdot G_2(\bar{h})$ より $(h_1', h_2') = (h_1, h_2)$ である。また $\bar{h}: \langle \rho_0', \bar{\phi}' \rangle \rightarrow F_2(S)$ から $c' \in C'(\rho_0')$ の状態空間) に対し、 $h_2 \rho_0'(c', 0) = \rho_0(h_3(c'), h_1(0))$ より $h_3(c') = h_2 \rho_{10}'(c')$ になり h_3 は一意である。このように決められた h_3 に対し $\bar{h}$ が morphism になることを示す。 $(c', x') \in C' \times X'$ を任意とすれば $h_2 \rho_0'(c', x') = h_2(\rho_{10}'(c) + \rho_{20}'(x')) = h_3(c') + \rho_{20} h_1(x') = \rho_0(h_3(c'), h_1(x'))$ また $\phi_{0i}(h_3(c'), h_1(x')) = \lambda_i \rho_0(h_3(c'), h_1(x' \cdot 0_i)) = \lambda_i h_2 \rho_0'(c', x' \cdot 0_i) = h_2 \lambda_i \rho_0'(c', x' \cdot 0_i) = h_2 \rho_{10}'(\phi_{0i}(c', x')) = h_3(\phi_{0i}(c', x'))$ 。

(Q. E. D.)

[系] $G_2(\rho_0', \bar{\phi}') = S$ ならば h_3 が全射となる morphism $\langle h_1, h_2, h_3 \rangle: \langle \rho_0', \bar{\phi}' \rangle \rightarrow F_2(S)$ が存在する。

(証明) $i: G_2(\rho_0', \bar{\phi}') = S \rightarrow S$ に対する $\bar{h} = \langle h_1', h_2', h_3 \rangle$ を考えると、 $h_2' = i$ より $h_3(c') = \rho_{10}'(c')$ になる。一方、 $G_2(\rho_0', \bar{\phi}') = S$ より任意の $y \in S(0)$ に対し $(\exists c \in C') (y = \rho_{10}'(c))$ であるから $h_3(C') = \rho_{10}'(C') = S(0)$ になる。

(Q. E. D.)

《定理 9》 $\langle \rho_0, \bar{\phi} \rangle \in Ob(\text{BLDS})$ の ρ_0 が既約であれば、 $(\langle \rho_0, \bar{\phi} \rangle, i)$ は G_2 に関し $G_2(\rho_0, \bar{\phi})$ の co-universal map である。 i は identity morphism である。

(証明) 定理 8 の証明と同様に行えば、 h_3 は $h_3(c') = \rho_{10}^{-1} h_2 \rho_{10}'(c')$ で与えられる。

(Q. E. D.)

以上の結果に基づき b. l. s. の実現性の意味を考える。定理 3～定理 9 の結果によりつぎのような可換ダイアグラムがえられる。すなわち $\rho_{20}: X \rightarrow Y$ で表現される関数的“実験結果”が与えられたとする。 $F_1(\rho_{20})$ はその b. l. s. によるモデル化である。また S が同じく ρ_{20} のモデルすなわち $G_1(S) = \rho_{20}$ とする。

Fig. 2

このとき定理 5 の系により inclusion map $i: F_1(\rho_{20}) \rightarrow S$ が存在する。すなわち $F_1(\rho_{20})$ は ρ_{20} の最小モデルと考えられる。 $F_2 F_1(\rho_{20})$ と $F_2(S)$ はそれぞれ $F_1(\rho_{20})$ と S の状態表現である。 $F_2(i)$ は F_2 の定義からやはり inclusion map である (定理 7)。 $\langle \rho_0, \bar{\phi} \rangle$ が S の表現すなわち $G_2(\rho_0, \bar{\phi}) = S$ とする。このとき定理 8 の系により $\langle \rho_0, \bar{\phi} \rangle$ から $F_2(S) \rightarrow h_3$ が全射となる morphism が存在する。通常状態表現は、状態空間が有限次元のとき空間の次元の大小によって表現の大小を決める。この大小関係を $\geq$ で表現すると $\langle \rho_0, \bar{\phi} \rangle \geq F_2(S) \geq F_2 F_1(\rho_{20})$ である。

線形定係数常微分方程式系についての最小表現定理を b. l. s. にあてはめるとつぎようになる。

“ ρ_{20} を所与とする。 $G_1 G_2(\rho_0, \bar{\phi}) = \rho_{20}$ となる $\langle \rho_0, \bar{\phi} \rangle$ が最小表現すなわちつぎの関係を満足するための必要十分条件は $\langle \rho_0, \bar{\phi} \rangle$ が可制御可観測になることである。

$$(\forall \langle \rho_0, \bar{\phi} \rangle) (G_1 G_2(\rho_0, \bar{\phi}) = \rho_{20} \rightarrow \langle \rho_0, \bar{\phi} \rangle \geq \langle \rho_0, \bar{\phi} \rangle)$$

この事実が成立することは Fig. 2 より簡単に示せる。参考文献 2) によると b. l. s. につぎの事実が成立する。

(i) b. l. s. S が可制御である (すなわち可制御な状態表現をもつ) ための必要十分条件は、 S と $F_1 G_1(S)$ が同形である。以下同形を $S_1 \simeq F_1 G_1(S)$ のように表わす。

(ii) S が可制御であれば、 $F_2(S)$ は可制御な表現である。

(iii) $\langle \rho_0, \bar{\phi} \rangle$ が可観測になるための必要十分条件は $\langle \rho_0, \bar{\phi} \rangle$ が既約 (すなわち ρ_0 が既約) である。

(iv) $F_2(S)$ は既約表現である。

以上可制御可観測は通常定義に従う²⁾。これらの事実により Fig. 2 に示すごとく、 $F_1(\rho_{20})$ は可制御、 $F_2(S)$ は可観測、 $F_2 F_1(\rho_{20})$ は可制御可観測である。いま $\langle \rho_0, \bar{\phi} \rangle$ が可制御可観測であるとする。 $\hat{S} = G_2(\rho_0, \bar{\phi})$ 、 $\hat{\rho}_{20} = G_1(\hat{S})$ とする。 $\hat{S}$ は可制御であるから $\hat{S} \simeq F_1 G_1(\hat{S}) = F_1 \hat{\rho}_{20}$ 。 $\langle \rho_0, \bar{\phi} \rangle$ が可観測すなわち既約であるから、定理 9 と co-universal map の一意性より $(\rho_0, \bar{\phi}) \simeq F_2 \hat{S}$ 。ゆえに $\langle \rho_0, \bar{\phi} \rangle \simeq F_2 F_1(\hat{\rho}_{20})$ となり $\langle \rho_0, \bar{\phi} \rangle$ は最小表現である。逆に $\langle \rho_0, \bar{\phi} \rangle$ が最小表現であれば $F_2 F_1(\hat{\rho}_{20}) \geq \langle \rho_0, \bar{\phi} \rangle$ となる。ゆえに Fig. 2 により $F_2 F_1(\hat{\rho}_{20}) \simeq F_2(\hat{S}) \simeq \langle \rho_0, \bar{\phi} \rangle$ である。

また、参考文献 2) の主定理である“b. l. s. の既約表現の一意性”は定理 9 と co-universal map の一意性の一つの結果である。

4. おわりに

この論文では基本線形システムの realization を functor として特徴づけ、最小表現理論のカテゴリークの考察を行った。この特徴づけで重要なことは、realization function が universal map と関係づけられていることである。たとえば可制御性はモデルの universality として特徴づけられる。あるいは realization functor が “inverse” functor をもつ (adjoint functor をもつ (Fig. 2 参照)) ことになり、その結果 BLS のカテゴリカルな性質が BLFS と BLDS に保持される。これらのことにより “微分方程式系” の性質がかなり自由にカテゴリカルな枠内で考察できる。これらについては次報で考察する。

参考文献

- 1) 高原康彦: 基本線形システムのカテゴリーク, 計測自動制御学会論文集, 14-4, 370/376(1978)
- 2) 高原康彦: 基本線形システムの表現とその性質, 計測自動制御学会論文集, 13-6, 533/538(1977)
- 3) G. Grätzer: Universal Algebra, Van Nostrand, (1968)
- 4) J.A. Goguen: Realization is universal, J of Math.

Sys. Theory, 6-4(1973)

- 5) M. D. Mesarovic and Y. Takahara: General Systems Theory; Math. Foundation, Academic Press (1975)
- 6) H. Herrich and G. Strecker: Category Theory, Ally & Bacon(1973)
- 7) 高原康彦: 有限次元の線形ダイナミカルシステムの2つの性質, 計測自動制御学会論文集, 10-5, 594/598(1974)
- 8) 高原康彦: 一般的定常線形系の実現性理論と定係数線形常微分方程式のシステムの一般システム理論における特徴づけ, 計測自動制御学会論文集, 9-4, 408/414(1973)

《付 録》

$G: \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ をカテゴリーク $\mathbf{A}$ から $\mathbf{B}$ への functor, x を $\mathbf{B}$ の object とする. $\mathbf{A}$ の object y と morphism $u: x \rightarrow G(y)$ がつぎの条件を満足するとき, (u, y) を G に対する x の universal map とよぶ: $\mathbf{A}$ の任意の object y' と morphism $f: x \rightarrow G(y')$ に対し一意的に morphism $\bar{f}: y \rightarrow y'$ が存在し $f = G(\bar{f}) \cdot u$ となる. 逆に morphism $u': G(y) \rightarrow x$ がつぎの条件を満足するとき (y, u') を G に対する x の co-universal map とよぶ: $\mathbf{A}$ の任意の object y' と morphism $f: G(y') \rightarrow x$ に対し一意的に morphism $\bar{f}: y' \rightarrow y$ が存在し $f = u' \cdot G(\bar{f})$ となる.