状態推定, 予測, 平滑問題に対する関数空間接近法[†]

南 出 成 康*

A Function Space Approach to Filtering, Prediction and Smoothing Problems

Nariyasu MINAMIDE*

In the present paper, filtering, prediction and smoothing problems are investigated in a unified manner by introducing a function space description. To these estimation problems, a unified expression for the mean square error is first obtained with the help of linear operators. An original problem of finding a linear minimum mean square error estimator is then reduced to a dual problem of finding an optimal element in a Hilbert space that minimizes a quadratic form associated with the mean square error. By solving this optimization problem, a Wiener-Hopf equation in the function space description is derived.

To each of these filtering, prediction and smoothing problems, the corresponding explicit expressions of this dual problem and of a Wiener-Hopf equation in the function space description are obtained. It is shown that a linear optimal regulator is dual to a filtering problem (or to a prediction problem), while a linear optimal regulator with a jump condition on the state variable is dual to a smoothing problem. The basic results of an estimation problem reported earlier are derived in a simple and perspective manner by solving these dual optimization problems.

1. ま え が き

制御理論の基本的かつ重要な研究課題の一つに、線形確率系の状態推定, 予測, 平滑の問題が挙げられる。これらの推定問題は、多数の研究者の考察対象となり、多くの興味ある成果が報告されてきている。

これらの問題を解く代表的な手法として、直交射影の定理、あるいはイノベーションの定理を用いる手法^{1)~7)}、ベイズ決定理論に基づく最大事後確率、最大

尤度比などを用いる手法^{8), 9)}、微分方程式の比較定理を用いる手法¹⁰⁾などが指摘される。

本稿では、関数空間記述の立場から線形作用素を導入して、これらの推定問題の平均2乗誤差に関する統一的な記述を与え、元の問題に対する双対問題およびウィナーホッフの方程式を導く。さらに、この関数空間記述法のもとで得られた双対問題について、それぞれの推定問題に対する具体的な表現式を導き、これらの推定問題を解くことは、2次形式評価の最適制御問題を解くことに帰着されることを示す。

状態推定の問題と最適レギュレータ問題との双対性は良く知られている事実であるが¹¹⁾、予測問題、平滑問題に対する双対問題については、従来十分な検討が加えられていない。本稿では、これらの双対問題について検討し、これらの双対問題を解く立場から、従来得られている成果を導出する。この方法によれば、確率的な取扱いがほとんど必要でなく、簡単で見通しの良い解法を与えることができる。

2. 問題の記述

考察する対象は、つぎの微分方程式で記述されるものとする。

$$\begin{aligned} \dot{x}(s) &= A_s x(s) + B_s w(s), & x(t_0) &= x_0 \\ z(s) &= C_s x(s) + D_s v(s) \end{aligned} \quad (2.1)$$

ここに、 $x(s)$ は $n \times 1$ 状態ベクトル、 $w(s)$ は平均値ゼロ、単位分散を有する $r \times 1$ 白色ガウス過程、 $z(s)$ は $m \times 1$ 観測ベクトル、 $v(s)$ は平均値ゼロ、単位分散を有する $m \times 1$ 白色ガウス過程、初期値 x_0 は平均値ゼロ、分散 Σ のガウス確率変数であり、 $w(s), v(s), x_0$ は互いに独立であるものとする。 A_s, B_s, C_s, D_s は有界な行列関数であり、さらに D_s は正則行列であるものとする。

[最適推定問題]

時間区間 $[t_0, t_1]$ にわたって出力データ $\{z(s) | t_0 \leq s \leq t_1\}$ を観測するもとで、時刻 t における状態 $x(t)$ の推定値 $\hat{x}(t | t_1)$ について、つぎの平均2乗誤差

[†] 第9回確率システムシンポジウムで発表 (昭 52・11)

* 三重大学工学部 津市上浜町 1515

* Faculty of Engineering, Mie University, Tsu

(Received April 24, 1978)

$$V_t = E[x(t) - x(t|t_1)]^* [x(t) - x(t|t_1)]$$

を最小とする最適推定値 $\hat{x}(t|t_1)$ を求めよ. ここに, A^* は行列 A の転置を表す.

上述の問題は, $t=t_1$ のとき状態の推定問題, $t > t_1$ のとき予測問題, $t < t_1$ のとき平滑問題といわれる.

3. 関数空間における問題記述

平均 2 乗誤差を最小とする最適推定値 $\hat{x}(t|t_1)$ は, 良く知られているように出力観測データ $\{z(s) | t_0 \leq s \leq t_1\}$ に関する状態 $x(t)$ の条件付期待値

$$\hat{x}(t|t_1) = E\{x(t) | z(s), t_0 \leq s \leq t_1\} \quad (3.1)$$

によって与えられる¹²⁾. 仮定よりシステムは線形であり $x(t), z(s)$ はともにガウス過程となるので, 条件付期待値 $E\{x(t) | z(s), t_0 \leq s \leq t_1\}$ は出力観測データに関する線形関数

$$E\{x(t) | z(s), t_0 \leq s \leq t_1\} = \int_{t_0}^{t_1} F(t, s) z(s) ds \quad (3.2)$$

によって与えられる¹²⁾. ここに, $F(t, \cdot)$ は 2 乗可積分な行列関数の空間 L

$$L = \left\{ F \left| \int_{t_0}^{t_1} \text{tr} \{F(t, s) F(t, s)^*\} ds < +\infty \right. \right\}$$

の要素である (このことを単に $F \in L$ で表す. ただし, $\text{tr} A$ は行列 A のトレースを表す). したがって, 最適推定値 $\hat{x}(t|t_1)$ を求める問題は, 行列関数 $F \in L$ を決定する問題として定式化される.

以下, 状態推定, 予測, 平滑問題に対して統一的な記述を可能ならしめるため, つぎの線形作用素を定義する.

$$Fy = \int_{t_0}^{t_1} F(t, s) D_s y(s) ds, \quad y \in L^2[t_0, t_1]$$

$$(Sx)(s) = D_s^{-1} C_s \Phi(s, t_0) x, \quad x \in R^n \quad (t_0 \leq s \leq t_1)$$

$$(Hy)(s) = D_s^{-1} C_s \int_{t_0}^s \Phi(s, \tau) B_\tau y(\tau) d\tau,$$

$$y \in L^2[t_0, t_1] \quad (t_0 \leq s \leq t_1)$$

$$Gy = \int_{t_0}^{t \wedge t_1} \Phi(t, s) B_s y(s) ds$$

$$+ \int_{t \wedge t_1}^{t_1} 0 \cdot y(s) ds, \quad y \in L^2[t_0, t_1]$$

ここに, $\Phi(t, s)$ は行列 A_s の推移行列, R^n は n 次元ユークリッド空間, $L^2[t_0, t_1]$ は区間 $[t_0, t_1]$ 上で定義された 2 乗可積分なベクトル値関数の全体からなるヒルベルト空間, $t \wedge t_1 = \min(t, t_1)$ を表す. また, 関数 $F(t, \cdot)$ と作用素 F とを同一視して同じ記号を用いる.

さらに予測問題に対して意味をもつ作用素として

$$T\xi = \int_{t \wedge t_1}^{t_1} \Phi(t, s) B_s \xi(s) ds, \quad \xi \in L^2[t \wedge t_1, t_1]$$

を定義する.

以上の線形作用素の定義のもとで, 時刻 t における状態 $x(t)$ および (3.2) 式で与えられる推定値 $\hat{x}(t|t_1)$ について次式が成立する.

$$\begin{aligned} x(t) &= \Phi(t, t_0) x_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t, s) B_s w(s) ds \\ &= \Phi(t, t_0) x_0 + \int_{t_0}^{t \wedge t_1} \Phi(t, s) B_s w(s) ds \\ &\quad + \int_{t \wedge t_1}^{t_1} 0 \cdot w(s) ds + \int_{t \wedge t_1}^{t_1} \Phi(t, s) B_s w(s) ds \\ &= \Phi(t, t_0) x_0 + Gw[t_0, t_1] + Tw[t \wedge t_1, t_1] \\ \hat{x}(t|t_1) &= \int_{t_0}^{t_1} F(t, s) z(s) ds \\ &= FSx_0 + FHw[t_0, t_1] + Fv[t_0, t_1] \end{aligned}$$

ここに $f_{[t_0, t_1]}$ は関数 $f(\cdot)$ の区間 $[t_0, t_1]$ への制限を表す. これらの式より, 推定誤差 ε_t は

$$\begin{aligned} \varepsilon_t &= x(t) - \hat{x}(t|t_1) \\ &= (G - FH)w[t_0, t_1] + \{\Phi(t, t_0) - FS\} x_0 \\ &\quad - Fv[t_0, t_1] + Tw[t \wedge t_1, t_1] \end{aligned}$$

と表わされ, したがってその共分散 $\Sigma_1(F)$ は確率過程の独立性と白色性を用いて, 次式のように求められる.

$$\begin{aligned} \Sigma_1(F) &= E\{\varepsilon_t \varepsilon_t^*\} = (G - FH)(G^* - H^* F^*) \\ &\quad + \{\Phi(t, t_0) - FS\} \Sigma \{\Phi^*(t, t_0) - S^* F^*\} \\ &\quad + FF^* + TT^* \end{aligned} \quad (3.3)$$

ここに F^* は作用素 F の随伴作用素を表す.

4. 関数空間における解法

まず, 平均 2 乗誤差 V_t は

$$V_t = \text{tr} \{E\{\varepsilon_t \varepsilon_t^*\}\} = \text{tr} \Sigma_1(F) = \sum_{i=1}^n \langle \nu_i, \Sigma_1(F) \nu_i \rangle \quad (4.1)$$

と表わされることに注意する. ここに, $\{\nu_i\}$ は R^n の任意の正規直交系を, また $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は R^n における内積を表す. (4.1) 式より平均 2 乗誤差 V_t を最小とする $F \in L$ を見出すためには, 任意の (固定された) $v (\neq 0) \in R^n$ に対して, 2 次形式 $\langle v, \Sigma_1(F) v \rangle$ を最小とする $F \in L$ を見出すことができれば十分である. (3.3) 式により次式を得る.

$$\begin{aligned} \langle v, \Sigma_1(F) v \rangle &\triangleq \|v\|_{\Sigma_1(F)}^2 \\ &= \left\| \Phi(t, t_0) v - S^* F^* v \right\|_{\Sigma}^2 \\ &\quad + \|G^* v - H^* F^* v\|^2 + \|F^* v\|^2 \\ &\quad + \|T^* v\|^2 \end{aligned} \quad (4.2)$$

ここに $\|\cdot\|$ は $R^n, L^2[t_0, t_1]$ あるいは $L^2[t \wedge t_1, t]$ におけるノルムを表わす。

さて、ここで作用素 F の定義の仕方より、次式が成立することが容易に確かめられる。

$$L^2[t_0, t_1] = \{F^*v \mid F \in L\} \quad (v \neq 0)$$

したがって、いま $u = F^*v$, すなわち

$$u(s) = D_s^* F^*(t, s)v \quad (t_0 \leq s \leq t_1) \quad (4.3)$$

とおくときには、つぎの最小化問題が得られる。

$$\begin{aligned} & \min_{F \in L} \{\|v\|_{\Sigma(F)}^2\} \\ &= \min_{u \in L^2[t_0, t_1]} \left\{ \left\| \Phi^*(t, t_0)v - S^*u \right\|_{\Sigma}^2 \right. \\ & \quad \left. + \|G^*v - H^*u\|^2 + \|u\|^2 + \|T^*v\|^2 \right\} \quad (4.4) \end{aligned}$$

(4.4)式は関数空間記述における最適推定問題の双対問題を与えている。(4.4)式の最小化問題に対する解 u_0 は唯一であって

$$u_0 = (I + S \Sigma S^* + H H^*)^{-1} \{S \Sigma \Phi(t, t_0) + H G^*\} v \quad (4.5)$$

として求められる¹³⁾。したがって、(4.3)式と(4.5)式とを比較することにより、平均2乗誤差を最小とする作用素 F_0 は唯一であって

$$F_0 = \{\Phi(t, t_0) \Sigma S^* + G H^*\} (I + S \Sigma S^* + H H^*)^{-1} \quad (4.6)$$

として与えられることが知られる。すなわち、作用素 F_0 はつぎの関数空間記述におけるウィナーホッフの積分方程式の唯一解として求められる。

$$F(I + S \Sigma S^* + H H^*) = \Phi(t, t_0) \Sigma S^* + G H^* \quad (4.7)$$

実際に、(4.7)式から積分核 $F(t, s)$ がウィナーホッフの積分方程式を満たさねばならないことを付録に示す。

5. 双対問題による最適推定問題の解法

推定、予測、平滑問題のそれぞれの場合に対して、双対問題としての最小化問題(4.4)の具体的な表現式を導き、これを解くことを考える。

5.1 推定問題について

この場合、 $t = t_1$ であるから、それぞれの随伴作用素を求めることにより、次式が得られる。

$$\begin{aligned} & (G^*v - H^*u)(s) \\ &= B_s^* \left\{ \Phi^*(t, s)v - \int_s^{t_1} \Phi^*(\tau, s) C_\tau^* D_\tau^{*-1} u(\tau) d\tau \right\} \\ &\triangleq B_s^* \phi(s) \quad (5.1) \\ &\Phi^*(t, t_0)v - S^*u \\ &= \Phi^*(t, t_0)v - \int_{t_0}^t \Phi^*(\tau, t_0) C_\tau^* D_\tau^{*-1} u(\tau) d\tau \end{aligned}$$

$$= \phi(t_0) \quad (5.2)$$

したがって $\phi(s)$ を用いるときには

$$\|G^*v - H^*u\|^2 = \int_{t_0}^t \phi^*(s) B_s B_s^* \phi(s) ds$$

$$\left\| \Phi^*(t, t_0)v - S^*u \right\|_{\Sigma}^2 = \phi^*(t_0) \Sigma \phi(t_0)$$

となる。いま、関数 $\phi(s)$ の微分を行い、 $B_s B_s^* = Q_s$, $D_s D_s^* = R_s$, $\bar{u}(s) = D_s^{*-1} u(s)$ とおけば、(4.4)式よりつぎの最適制御問題が得られる。

$$\begin{aligned} & \min_{\bar{u} \in L^2[t_0, t]} \left[\phi^*(t_0) \Sigma \phi(t_0) \right. \\ & \quad \left. + \int_{t_0}^t \{ \phi^*(s) Q_s \phi(s) + \bar{u}^*(s) R_s \bar{u}(s) \} ds \right] \end{aligned}$$

subj. to

$$\dot{\phi}(s) = -A_s^* \phi(s) + C_s^* \bar{u}(s), \quad \phi(t) = v \quad (5.3)$$

(5.3)式は良く知られた最適レギュレータ問題であり、最適制御 $\bar{u}_0(s)$ は、つぎのように求められる。

$$\bar{u}_0(s) = R_s^{-1} C_s K_s \Phi_e^*(t, s)v \quad (t_0 \leq s \leq t)$$

ここに、 K_s はつぎのリッカチの行列微分方程式

$$\dot{K}_s = K_s A_s + A_s^* K_s - K_s C_s^* R_s^{-1} C_s K_s + Q_s,$$

$$K(t_0) = \Sigma$$

の解であり、 $\Phi_e(t, \tau)$ は $(A_\tau - K_\tau C_\tau^* R_\tau^{-1} C_\tau)$ の推移行列である。したがって、最適推定値 $\hat{x}(t|t)$ は(4.3)式より、つぎのように求められる。

$$\begin{aligned} \hat{x}(t|t) &= \int_{t_0}^t F(t, s) z(s) ds \\ &= \int_{t_0}^t \Phi_e(t, s) K_s C_s^* R_s^{-1} z(s) ds \end{aligned}$$

また、推定誤差の共分散行列 $\Sigma_1(F_0)$ は $\langle v, \Sigma_1(F_0)v \rangle = \langle v, K_t v \rangle$ より $\Sigma_1(F_0) = K_t$ として求められる。

5.2 予測問題について

この場合、 $t > t_1$ であることに注意すれば、推定問題の場合と同様にして次式を得る。

$$\begin{aligned} & (G^*v - H^*u)(s) \\ &= B_s^* \left\{ \Phi^*(t, s)v - \int_s^{t_1} \Phi^*(\tau, s) C_\tau^* D_\tau^{*-1} u(\tau) d\tau \right\} \\ &\triangleq B_s^* \phi(s) \\ &\Phi^*(t, t_0)v - S^*u \\ &= \Phi^*(t, t_0)v - \int_{t_0}^{t_1} \Phi^*(\tau, t_0) C_\tau^* D_\tau^{*-1} u(\tau) d\tau = \phi(t_0) \end{aligned}$$

したがって、つぎの双対問題を得る。

$$\begin{aligned} & \min_{\bar{u} \in L^2[t_0, t_1]} \left[\phi^*(t_0) \Sigma \phi(t_0) \right. \\ & \quad \left. + \int_{t_0}^{t_1} \{ \phi^*(s) Q_s \phi(s) + \bar{u}^*(s) R_s \bar{u}(s) \} ds \right] \\ & \quad + \|T^*v\|^2 \end{aligned}$$

subj. to

$$\dot{\phi}(s) = -A_s^* \phi(s) + C_s^* \bar{u}(s), \quad \phi(t_1) = \Phi^*(t, t_1)v \quad (5.4)$$

問題(5.3)と(5.4)とを比較することにより，容易につきの結果を得る。

$$\hat{x}(t|t_1) = \Phi(t, t_1)\hat{x}(t_1|t_1)$$

また，共分散行列 $\Sigma_1(F_0)$ は

$$\langle v, \Sigma_1(F_0)v \rangle = \phi^*(t_1)K_{t_1}\phi(t_1) + \langle v, T^*T^*v \rangle$$

なることと，境界条件 $\phi(t_1) = \Phi^*(t, t_1)v$ より

$$\begin{aligned} \Sigma_1(F_0) &= \Phi(t, t_1)K_{t_1}\Phi^*(t, t_1) \\ &\quad + \int_{t_1}^t \Phi(t, s)Q_s\Phi^*(t, s)ds \end{aligned}$$

として求められる。

5.3 平滑問題について

この場合， $t < t_1$ であることに注意して随伴作用素を求めると次式を得る。

$$\begin{aligned} (G^*v - H^*u)(s) &= \begin{cases} B_s^* \left\{ \Phi^*(t, s)v \right. \\ \quad \left. - \int_s^{t_1} \Phi^*(\tau, s)C_\tau^*D_\tau^{*-1}u(\tau)d\tau \right\} \\ \quad (t_0 \leq s \leq t) \\ -B_s^* \int_s^{t_1} \Phi^*(\tau, s)C_\tau^*D_\tau^{*-1}u(\tau)d\tau \\ \quad (t < s \leq t_1) \end{cases} \\ &\triangleq \begin{cases} B_s^* \phi(s) & (t_0 \leq s \leq t) \\ B_s^* y(s) & (t < s \leq t_1) \end{cases} \end{aligned}$$

推定問題の場合と同様にして，つぎの双対問題を得る。

$$\min_{\bar{u} \in L^2[t_0, t_1]} \{J_1(\bar{u}) + J_2(\bar{u})\}$$

subj. to

$$\begin{cases} \dot{\phi}(s) = -A_s^* \phi(s) + C_s^* \bar{u}(s), & (t_0 \leq s \leq t) \\ \phi(t) = y(t) + v \\ \dot{y}(s) = -A_s^* y(s) + C_s^* \bar{u}(s), & (t < s \leq t_1) \\ y(t_1) = 0 \end{cases} \quad (5.5)$$

ここに $J_1(\bar{u}), J_2(\bar{u})$ は次式

$$\begin{aligned} J_1(\bar{u}) &= \phi^*(t_0)\Sigma\phi(t_0) \\ &\quad + \int_{t_0}^t \{\phi^*(s)Q_s\phi(s) + \bar{u}^*(s)R_s\bar{u}(s)\} ds \end{aligned}$$

$$J_2(\bar{u}) = \int_t^{t_1} \{y^*(s)Q_s y(s) + \bar{u}^*(s)R_s \bar{u}(s)\} ds$$

で定義される。

時刻 t における状態変数に飛躍がある上述の最適制御問題は，最適レギュレータ問題を解く通常の手法を用いて容易に解の特徴付けが可能である。

いま， K_s をつぎのリッカチの行列微分方程式の解

$$\dot{K}_s = A_s K_s + K_s A_s^* - K_s C_s^* R_s^{-1} C_s K_s + Q_s,$$

$$K_{t_0} = \Sigma$$

とすれば，等式

$$\begin{aligned} &\phi^*(s)K_s\phi(s) \Big|_{t_0}^t \\ &= \int_{t_0}^t \frac{d}{ds} [\phi^*(s)K_s\phi(s)] ds \\ &= \int_{t_0}^t \{ \phi^*(s)(\dot{K}_s - A_s K_s - K_s A_s^*) \phi(s) \\ &\quad + \bar{u}^*(s)C_s K_s \phi(s) + \phi^*(s)K_s C_s^* \bar{u}(s) \} ds \\ &\text{を用いて，次式が得られる。} \\ J_1(\bar{u}) &= \phi^*(t)K_t\phi(t) \\ &\quad + \int_{t_0}^t [\bar{u}(s) - R_s^{-1}C_s K_s \phi(s)]^* R_s [\bar{u}(s) \\ &\quad - R_s^{-1}C_s K_s \phi(s)] ds \end{aligned} \quad (5.6)$$

また， g_s をつぎの境界条件と微分方程式に従う解

$$\begin{aligned} \dot{g}_s &= (A_s - K_s C_s^* R_s^{-1} C_s)g_s, \quad (t \leq s \leq t_1) \\ g_t &= K_t v \end{aligned} \quad (5.7)$$

とすれば，つぎの恒等式を得る。

$$\begin{aligned} &\{y^*(s)K_s y(s) + y^*(s)g_s + g_s^* y(s)\} \Big|_t^{t_1} \\ &= \int_t^{t_1} \frac{d}{ds} \{y^*(s)K_s y(s) + y^*(s)g_s + g_s^* y(s)\} ds \\ &= \int_t^{t_1} [y^*(s)(\dot{K}_s - A_s K_s - K_s A_s^*)y(s) \\ &\quad + \bar{u}^*(s)C_s K_s y(s) + y^*(s)K_s C_s^* \bar{u}(s) \\ &\quad + \{\bar{u}(s) - R_s^{-1}C_s K_s y(s)\}^* R_s^{-1} C_s g_s \\ &\quad + g_s^* C_s^* R_s^{-1} \{\bar{u}(s) - R_s^{-1}C_s K_s y(s)\}] ds \end{aligned}$$

$g_s, y(s)$ に関する境界条件 $g_t = K_t v, y(t_1) = 0$ と上式を用いれば

$$\begin{aligned} J_2(\bar{u}) &= -y^*(t)K_t y(t) - y^*(t)K_t v - v^* K_t y(t) \\ &\quad + \int_t^{t_1} \{\bar{u}(s) - R_s^{-1}C_s K_s y(s) \\ &\quad - R_s^{-1}C_s g_s\}^* R_s \{\bar{u}(s) - R_s^{-1}C_s K_s y(s) \\ &\quad - R_s^{-1}C_s g_s\} ds - \int_t^{t_1} g_s^* C_s^* R_s^{-1} C_s g_s ds \end{aligned}$$

が得られる。したがって，上式と(5.6)式および境界条件 $\phi(t) = y(t) + v$ を用いると次式が得られる。

$$\begin{aligned} J_1(\bar{u}) + J_2(\bar{u}) &= v^* K_t v - \int_t^{t_1} g_s^* C_s^* R_s^{-1} C_s g_s ds \\ &\quad + \int_{t_0}^t \{\bar{u}(s) - R_s^{-1}C_s K_s \phi(s)\}^* \\ &\quad R_s \{\bar{u}(s) - R_s^{-1}C_s K_s \phi(s)\} ds \\ &\quad + \int_t^{t_1} \{\bar{u}(s) - R_s^{-1}C_s K_s y(s) \\ &\quad - R_s^{-1}C_s g_s\}^* R_s \{\bar{u}(s) - R_s^{-1}C_s K_s y(s) \\ &\quad - R_s^{-1}C_s g_s\} ds \end{aligned} \quad (5.8)$$

上式より，最適解 $\bar{u}_0(s)$ として

$$\bar{u}_0(s) = \begin{cases} R_s^{-1} C_s K_s \phi(s) & (t_0 \leq s \leq t) \\ R_s^{-1} C_s K_s y(s) + R_s^{-1} C_s g_s & (t < s \leq t_1) \end{cases} \quad (5.9)$$

が得られる。ここで、(5.7)式の解 g_s は次式を満たす推移行列 $\Phi_e(t, s)$

$$\frac{\partial \Phi_e(t, s)}{\partial s} = (A_s - K_s C_s^* R_s^{-1} C_s) \Phi_e(t, s),$$

$$\Phi_e(t, t) = I$$

を用いると、つぎのように表わされる。

$$g_s = \Phi_e(t, s) K_t v \quad (t \leq s \leq t_1)$$

上式を (5.8) 式に代入すれば、推定誤差の共分散行列が

$$\begin{aligned} \Sigma_1(F_0) &= K_t - K_t \int_t^{t_1} \Phi_e^*(t, s) C_s^* R_s^{-1} C_s \Phi_e(t, s) ds \\ &\quad \cdot K_t \end{aligned} \quad (5.10)$$

として求められる。

つぎに最適推定値 $\hat{x}(t|t_1)$ を得るために、(5.9)式を (5.5)式に代入すれば、次式が得られる。

$$\begin{aligned} \psi(s) &= \Phi_e^*(t, s) \psi(t) \\ &= \Phi_e^*(t, s) v + \Phi_e^*(t, s) y(t) \quad (t_0 \leq s \leq t) \\ y(s) &= - \int_s^{t_1} \Phi_e^*(\tau, s) C_\tau^* R_\tau^{-1} C_\tau \Phi_e(t, \tau) d\tau \cdot K_t v \\ &\quad (t < s \leq t_1) \end{aligned}$$

上式を再び (5.9) 式に代入することにより次式を得る。

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t \bar{u}_0^*(s) z(s) ds &= v^* \int_{t_0}^t \Phi_e(t, s) K_s C_s^* R_s^{-1} z(s) ds \\ &\quad - v^* K_t \int_t^{t_1} \Phi_e^*(\tau, t) C_\tau^* R_\tau^{-1} C_\tau \Phi_e(\tau, t) d\tau \\ &\quad \cdot \int_{t_0}^t \Phi_e(t, s) K_s C_s^* R_s^{-1} z(s) ds \\ &= v^* \hat{x}(t|t) - v^* K_t \int_t^{t_1} \Phi_e^*(\tau, t) C_\tau^* R_\tau^{-1} C_\tau \\ &\quad \cdot \int_{t_0}^t \Phi_e(\tau, s) K_s C_s^* R_s^{-1} z(s) ds d\tau \end{aligned}$$

同様にして、次式が得られる。

$$\begin{aligned} \int_t^{t_1} \bar{u}_0^*(s) z(s) ds &= -v^* K_t \int_t^{t_1} \int_s^{t_1} \Phi_e^*(\tau, t) C_\tau^* R_\tau^{-1} C_\tau \Phi_e(\tau, s) K_s C_s^* R_s^{-1} z(s) d\tau ds \\ &\quad + v^* K_t \int_t^{t_1} \Phi_e^*(\tau, t) C_\tau^* R_\tau^{-1} z(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (5.11)$$

ここで、(5.11)式第1項の積分順序を変更すれば

$$\begin{aligned} \int_t^{t_1} \bar{u}_0^*(s) z(s) ds &= v^* K_t \left[\int_t^{t_1} \Phi_e^*(\tau, t) C_\tau^* R_\tau^{-1} \left\{ z(\tau) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - C_\tau \int_t^\tau \Phi_e(\tau, s) K_s C_s^* R_s^{-1} z(s) ds \right\} d\tau \right] \end{aligned}$$

が得られる。一方、

$$v^* \hat{x}(t|t_1) = \int_{t_0}^t \bar{u}_0^*(s) z(s) ds + \int_t^{t_1} \bar{u}_0^*(s) z(s) ds$$

であるから、最適推定値 $\hat{x}(t|t_1)$ として次式を得る。

$$\begin{aligned} \hat{x}(t|t_1) &= \hat{x}(t|t) + K_t \int_t^{t_1} \Phi_e^*(\tau, t) C_\tau^* R_\tau^{-1} \{ z(\tau) \\ &\quad - C_\tau \hat{x}(t|\tau) \} d\tau \end{aligned} \quad (5.12)$$

ここに、

$$\hat{x}(t|\tau) = \int_{t_0}^\tau \Phi_e(\tau, s) K_s C_s^* R_s^{-1} z(s) ds$$

は観測値 $\{z(s) | t_0 \leq s \leq \tau\}$ に基づく状態の推定値である。

(5.10)式および(5.12)式は、平滑問題における基本式を与えている^{3),9)}。

6. あとがき

状態推定、予測、平滑問題が、線形作用素を導入して統一的な立場から考察され、関数空間記述のもとでの双対問題、ウィナー・ホッフの方程式が導かれた。さらに、それぞれの問題に対して、関数空間で記述された双対問題の具体的な表現式を導き、これを解くことにより、従来得られた成果が簡単に見通しよく導かれることが示された。

特に、平滑問題に対する双対問題が、状態変数に飛躍のある2次形式評価の最適化問題として記述されることは従来導かれておらず、この手法による新しい成果である（ただし、ひとたび双対問題の形が知られば、より簡単な導出方法も考えられる¹¹⁾）。

最後に、日頃ご指導、ご鞭撻くださる豊田工業高等専門学校長 市川真人先生ならびに名古屋大学教授 中村嘉平先生に感謝の意を表します。

参考文献

- 1) R.E. Kalman and R.S. Bucy: New Results in Linear Filtering and Prediction Theory, ASME Trans. J. Basic Eng., **83-D**, 95/108 (1961)

- 2) T. Kailath: An Innovations Approach to Least Squares Estimation—Part I; Linear Filtering in Additive White Noise, IEEE Trans. on Automatic Control, **AC-13-6**, 646/655 (1968)
- 3) T. Kailath and P. Frost: An Innovations Approach to Least Square Estimation—Part II; Linear Smoothing in Additive White Noise, IEEE Trans. on Automatic Control, **AC-13-6**, 655/660 (1968)
- 4) J.S. Meditch: Orthogonal Projection and Discrete Optimal Linear Smoothing, SIAM J. on Control, **5-1**, 74/89 (1967)
- 5) J.S. Meditch: Optimal Fixed Point Continuous Time Smoothing, Proc. Joint Automatic Control Conf. June, 249/257 (1967)
- 6) J.S. Meditch: On Optimal Linear Smoothing Theory, Information and Control **10**, 598/615(1967)
- 7) J.S. Meditch: Stochastic Optimal Linear Estimation and Control, McGraw-Hill Inc. (1969)
- 8) A.P. Sage: Maximum A-posteriori Filtering and Smoothing Algorithms, Int. J. Control, **11-4**, 641/658 (1970)
- 9) A.P. Sage and J.L. Melsa: Estimation Theory with Applications to Communications and Control, McGraw-Hill (1971)
- 10) S. Omatu, T. Soeda and Y. Tomita: Linear Fixed-Point Smoothing by Using Functional Analysis, IEEE Trans. on Automatic Control, **AC-22-1**, 9/18 (1977)
- 11) 市川邦彦: 自動制御系の設計理論, 産業図書 (1977)
- 12) R.S. Liptser and A.N. Shirayeyo: Statistics of Random Processes I General Theory, Springer-Verlag (1977)
- 13) N. Minamide and K. Nakamura: A Mimimum Cost Control Problem in Banach Space, J. Math. Anal. and Appl., **36-1**, 73/85 (1971)
- 14) T. Kailath: A View of Three Decades of Linear Filtering Theory, IEEE Trans. on Information Theory, **IT-20-2**, 146/181 (1974)
- 15) 杉坂政典: Invariant Imbedding による新しいシーケンシャルウィナー形フィルタ: 固有値・固有関数法, 計測自動制御学会論文集, **13-6**, 553/560 (1977)

《付 録》

ここでは, 積分核 $F(t, s)$ がウィナーホッフの積分方程式を満たすことを示す.

すでに指摘したように, 作用素 F は関数空間記述における積分方程式(4.7)の解として求められる. すなわち, 任意の $z \in L^2[t_0, t_1]$ に対して作用素 F は

$$\begin{aligned} Fz + FS\Sigma S^*z + FHH^*z \\ = GH^*z + \Phi(t, t_0)\Sigma S^*z \end{aligned} \quad (\text{A. 1})$$

を満足しなければならない.

$t=t_1$ である推定問題の場合について, 積分核を用いて具体的に(A.1)式を書き表わすと

$$\begin{aligned} (FS\Sigma S^* + FHH^*)z + Fz \\ = \int_{t_0}^t \left[\int_{t_0}^s F(t, s)C_u K(s, u)C_u^* D_u^{*-1} ds \right] z(u) du \\ + \int_{t_0}^t F(t, u)D_u^* z(u) du \\ \{GH^* + \Phi(t, t_0)\Sigma S^*\} z \\ = \int_{t_0}^t K(t, u)C_u^* D_u^{*-1} z(u) du \end{aligned}$$

となる. ここに,

$$\begin{aligned} K(s, u) \triangleq E[x(s)x^*(u)] = \Phi(s, t_0)\Sigma\Phi^*(u, t_0) \\ + \int_{t_0}^{s \wedge u} \Phi(s, \tau)B_\tau B_\tau^* \Phi(u, \tau) d\tau \end{aligned}$$

である. したがって任意の $z \in L^2[t_0, t_1]$ に対して(A.1)式が成立しなければならないことから次式が得られる.

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t F(t, s)C_s K(s, u)C_u^* ds + F(t, u)R_u \\ = K(t, u)C_u^* \quad (t_0 \leq u \leq t) \end{aligned}$$

まったく同様にして, $t > t_1$ および $t < t_1$ の場合についてもつぎのウィナーホッフの積分方程式が得られる.

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} F(t, s)C_s K(s, u)C_u^* ds + F(t, u)R_u \\ = K(t, u)C_u^* \quad (t_0 \leq u \leq t_1) \end{aligned}$$

これらの結果は直交射影の定理を用いて導出することができる^{12), 14), 15)}.