双線形系に対する観測器の構成条件についての一考察[†]

川崎直哉*・示村悦二郎*

A Note on the Conditions of Constructing an Observer for Bilinear Systems

Naoya KAWASAKI* and Etsujiro SHIMEMURA*

1. はじめに

双線形システムに対する観測器については、その構成のための条件および構成法についていくつか報告されている^{1)~3)}。しかし入力に依存しない観測器はどのような双線形システムに対しても構成できるわけではなく、ある条件を満足するシステムに限定されると考えられる^{1), 3)}。そこで本稿では小林、示村らと与えた入力に依存しない状態観測器を構成するためのひとつの重要な条件である行列方程式 $PB + B^T P = 0$ の正定解 P の性質について若干の検討を加え、観測器を構成するうえでのひとつの有効な手がかりを与えようというものである。

2. 観測器の定義と構成条件

ここでは観測器の定義と構成のための条件³⁾を示す。(1)式のような双線形システム $\Sigma_F(A_i, B, C)$

$$\Sigma_F: \begin{cases} \dot{x} = A_0 x + \sum_{i=1}^r A_i x u_i + B u \\ y = C x \end{cases} \quad (1)$$

に対し(2)式で与えられるシステム $\Sigma_0(\hat{A}_i, \hat{B}, \hat{F}_i)$

$$\Sigma_0: \begin{cases} \dot{z} = \hat{A}_0 z + \sum_{i=1}^r \hat{A}_i z u_i + \hat{B}_0 y + \sum_{i=1}^r \hat{F}_i y u_i + \hat{B} u \end{cases} \quad (2)$$

が n 次元状態観測器であるとは初期値 $x(0), z(0)$ および入力 u に関係なく $z(t) \rightarrow x(t) \ (t \rightarrow \infty)$ が成り立つことをいうものとする。ただし(1), (2)式で与えられた $A_i, \hat{A}_i, \hat{F}_i \ (i=0, 1, \dots, r), B, \hat{B}, C$ はそれぞれ適当な大きさの定数行列とし、 $x, z \in R^n, y \in R^m$ で $\text{rank } C = m$ とする。また入力 u_i をまとめて $u = [u_1, \dots, u_r]^T$ と表わす。 Σ_0 が状態観測器となるための必要十分条件は $\hat{B} = B, \hat{A}_i = A_i - \hat{F}_i C \ (i=0, 1, \dots, r)$, かつシステム

$$\Sigma_\varepsilon: \begin{cases} \dot{\varepsilon} = \hat{A}_0 \varepsilon + \sum_{i=1}^r \hat{A}_i \varepsilon u_i \end{cases} \quad \varepsilon \in R^n \quad (3)$$

が任意の入力に対し大域的漸近安定となることであり、さらにこれが成り立つにはある行列 $\hat{F}_i \ (i=0, 1,$

$\dots, r)$ に対し、つぎの(4), (5)式を同時に満たす正定対称行列 P が存在すれば十分であることが知られている³⁾。

$$\begin{aligned} P \hat{A}_0 + \hat{A}_0^T P &= P(A_0 - \hat{F}_0 C) + (A_0 - \hat{F}_0 C)^T P \\ &= -Q < 0 \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} P \hat{A}_i + \hat{A}_i^T P &= P(A_i - \hat{F}_i C) + (A_i - \hat{F}_i C)^T P \\ &= 0 \quad (i=1, 2, \dots, r) \end{aligned} \quad (5)$$

ただし、一般に $PA + A^T P = 0$ の形の方程式を満たす正定対称行列 P が存在するための必要十分条件は、 A の固有値がすべて虚軸上に存在しかつ A が単純マトリクスであることである。

3. 構成条件の検討

前章より(4)および(5)式を満たす $\hat{F}_i$ および P が存在すれば観測器が構成可能であるが、本章ではとくに観測器の性能が入力に依存しないという観点から重要である(5)式について考えてみる。(5)式を満たす $\hat{A}_i$ は固有値をすべて虚軸上にもち、かつ単純でなければならないが、 P に関してはつぎの定理1を導くことができる。

『定理1』『(5)式を満足する正定対称行列 P は適当な分解により $P = T_i T_i^T$ と表わすことができる。ただし T_i はその各列が $\hat{A}_i^T$ の各固有ベクトルとなっているような行列である(注1)。逆に $\hat{A}_i^T$ の各固有ベクトルを各列に並べた $n \times n$ 行列を T_i とすれば(注1) $P = T_i T_i^T$ で表わされる正定対称行列 P は(5)式を満足する。』

(証明) 簡単のために $\hat{A}_i$ は0以外の重複固有値はもたないとする。その固有値 $\pm j\xi_1, \pm j\xi_2, \dots, \pm j\xi_{q_i}, 0_1, 0_2, \dots, 0_{p_i} \ (2q_i + p_i = n, \xi_k \neq \xi_l)$ とし、対応する $\hat{A}_i^T$ の固有ベクトルを $u_1 \pm jv_1, u_2 \pm jv_2, \dots, u_{q_i} \pm jv_{q_i}, w_1, w_2, \dots, w_{p_i} \ (u_k, v_k, w_k \text{ は実ベクトル})$ とする。いま $n \times n$ 行列 $\tilde{T}_i$ を

$$\tilde{T}_i = [u_1 \ v_1 \ u_2 \ v_2 \ \dots \ u_{q_i} \ v_{q_i} \ w_1 \ w_2 \ \dots \ w_{p_i}] \quad (6)$$

(注1) 固有ベクトルが複素ベクトル $u_k \pm jv_k \ (u_k, v_k \text{ は実ベクトル})$ の場合は、 u_k と v_k がそれぞれ T_i のある列に対応しているものとする。したがって T_i は実行列である。

[†] 第21回自動制御連合講演会で一部発表(昭53・11)

* 早稲田大学理工学部 東京都新宿区大久保 3-4-1

(Received February 6, 1979)

とすれば $\tilde{T}_i$ は正則でしかも

$$\tilde{T}_i^{-1} \hat{A}_i^T \tilde{T}_i = \left[\begin{array}{c|c} \tilde{A}_i & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right]_{2q_i}^{2q_i} \triangleq \hat{A}_i$$

$$\tilde{A}_i = \text{diag}(A_1 \ A_2 \ \dots \ A_{q_i})$$

$$A_k = \begin{bmatrix} 0 & \xi_k \\ -\xi_k & 0 \end{bmatrix} \quad (k=1, \dots, q_i) \quad (7)$$

を満たす。(5)式の両側から P^{-1} をかけ、さらに左から $\tilde{T}_i^T$ 、右から $\tilde{T}_i$ をかけ、また(7)式および $\hat{A}_i^T = -\hat{A}_i$ の関係を用いれば、(5)式はつぎのようになる。

$$-\hat{A}_i \tilde{T}_i^T P^{-1} \tilde{T}_i + \tilde{T}_i^T P^{-1} \tilde{T}_i \hat{A}_i = 0 \quad (8)$$

上式より正定対称行列 $\tilde{T}_i^T P^{-1} \tilde{T}_i$ は $\hat{A}_i$ と可換となっていることがわかる。いま $\tilde{T}_i^T P^{-1} \tilde{T}_i$ をつぎのようにおく。

$$\tilde{T}_i^T P^{-1} \tilde{T}_i = \begin{bmatrix} H & N^T \\ N & M \end{bmatrix}$$

$$H = H^T \in R^{2q_i \times 2q_i} \quad M = M^T \in R^{p_i \times p_i}$$

$$H > 0, \quad M > 0$$

このとき(8)式が成り立つことより $N=0$, $H\tilde{A}_i = \tilde{A}_i H$ が成立しなければならない。いま $H\tilde{A}_i$ および $\tilde{A}_i H$ をそれぞれ大きさが 2×2 の q_i^2 個の小ブロックに分け、両者の第 (k, l) ブロックを比較すると(9)、(10)式となる。

$$(H\tilde{A}_i)_{kl} = \begin{bmatrix} -\xi_k h_{2k-1 \ 2l} & \xi_l h_{2k-1 \ 2l-1} \\ -\xi_l h_{2k \ 2l} & \xi_k h_{2k \ 2l-1} \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$(\tilde{A}_i H)_{kl} = \begin{bmatrix} \xi_k h_{2k \ 2l-1} & \xi_l h_{2k \ 2l} \\ -\xi_k h_{2k-1 \ 2l-1} & -\xi_l h_{2k-1 \ 2l} \end{bmatrix} \quad (10)$$

ただし h_{ij} は行列 H の (i, j) 要素を表わす。ここで H が正定対称、 $\xi_k, \xi_l \neq 0$, $\xi_k^2 \neq \xi_l^2$ ($k \neq l$) を考慮して(9)と(10)式を比較すると、結局 $\hat{A}_i$ と可換となる正定対称行列はつぎの形の行列に限られることがわかる。

$$E = \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} \quad D = \text{diag}(D_1 \ D_2 \ \dots \ D_{q_i})$$

$$D_k = \begin{bmatrix} d_k & 0 \\ 0 & d_k \end{bmatrix} \quad (k=1 \ \dots \ q_i) \quad (11)$$

ただし M は $p_i \times p_i$ の任意の正定対称行列、 D_k の要素の d_k は任意の正数とする。ところで $\tilde{T}_i^T P^{-1} \tilde{T}_i = E$ であれば $P = \tilde{T}_i E^{-1} \tilde{T}_i^T = (\tilde{T}_i \sqrt{E^{-1}}) \cdot (\tilde{T}_i \sqrt{E^{-1}})^T$ であるから、 $T_i = \tilde{T}_i \sqrt{E^{-1}}$ とおけば $P = T_i T_i^T$ と分解できることがわかる。ただし $\sqrt{E^{-1}}$ は E^{-1} の平方根マトリクスを表わすとする。したがって、(11)式より

$$T_i = \tilde{T}_i \sqrt{E^{-1}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{d_1}} u_1 & \frac{1}{\sqrt{d_1}} v_1 & \dots & \frac{1}{\sqrt{d_{q_i}}} u_{q_i} \\ \frac{1}{\sqrt{d_{q_i}}} v_{q_i} & \sum_{k=1}^{p_i} m_{k1} w_k & \dots & \sum_{k=1}^{p_i} m_{kp_i} w_k \end{bmatrix} \quad (12)$$

となることがわかり、 T_i の各列は明らかに $\hat{A}_i^T$ の固有ベクトルと対応している。ただし m_{ij} は $\sqrt{M^{-1}}$ の

(i, j) 要素を表わすものとする。よって前半は証明された。後半は $T_i^{-1} \hat{A}_i^T T_i = \hat{A}_i$ と $\hat{A}_i + \hat{A}_i^T = 0$ より容易に成り立つことがわかる。

上の証明では 0 以外の重複固有値がないと仮定したが、この仮定がない場合でもやや複雑になるが同様に示すことができる。

一般に線形システム (A, B) が与えられたとき、 $A-BK$ の固有値として $\lambda \in C$, 固有ベクトルとして $v \in C^n$ を実現するような実行列 K が存在するための必要十分条件は、 $\mathcal{R}(B) \ni (\lambda I - A)v$ であることが知られている⁴⁾。これと定理 1 を考慮するとつぎの系 1 を導くことができる。

【系 1】『つぎのようにして与えられる正定対称行列 P はすべて(5)式を満足する。

$$P = T_i T_i^T = [t_1^i \ t_2^i \ \dots \ t_n^i] [t_1^i \ t_2^i \ \dots \ t_n^i]^T$$

$$t_j^i \in R^n \quad (13)$$

ここで t_j^i ($j=1, 2, \dots, n$) はつぎの関係を満たすものとする。

$$t_{2k-1}^i = (\xi_k^2 I + (A_i^T)^2)^{-1} (A_i^T C^T l_{2k-1}^i - \xi_k C^T l_{2k}^i)$$

$$t_{2k}^i = (\xi_k^2 I + (A_i^T)^2)^{-1} (\xi_k C^T l_{2k-1}^i + A_i^T C^T l_{2k}^i)$$

$$(k=1, 2, \dots) \quad (14)$$

ただし $l_{2k-1}^i, l_{2k}^i \in R^m$ は任意、および ξ_k は $(\xi_k^2 I + (A_i^T)^2)$ 正則となるような任意の実数であるが、 $t_1^i, t_2^i, \dots, t_n^i$ が 1 次独立になるように選ぶ必要がある。』

なおこの場合(5)式を満足する $\hat{F}_i$ はつぎで与えられる。

$$\hat{F}_i^T = [l_1^i \ l_2^i \ \dots \ l_n^i] [t_1^i \ t_2^i \ \dots \ t_n^i]^{-1} \quad (15)$$

4. おわりに

本稿ではある双線形システムの状態観測器の構成条件に対し若干の検討を行った。(5)式は双線形システムの安定化問題などにしばしば見られる式であるが、ここで得られた結果から(5)式を満足する P は $\hat{A}_i$ が与えられるとその形はかなり限定されたものとなることがわかる。最後に有益な助言を下された早稲田大学 内田健康助教授、東京農工大学 小林尚登氏に感謝します。

参考文献

- 1) 原, 古田: 双線形の観測器, 計測自動制御学会論文集, 12-6, 625/631 (1976)
- 2) 舟橋, 安達: 有界入力に対する安定な Bilinear Observer, 第 7 回制御理論シンポジウム資料 (1978)
- 3) 小林, 示村: 双線形系に対するオブザーバ, 計測自動制御学会論文集, 14-6, 620/625 (1978)
- 4) V. Sinswat and F. Fallside: Eigenvalue/Eigenvector Assignment by State-Feedback, INT. J. Control, 26-3, 389/403 (1977)