冷間圧延機の変数制御

山 田 武*・木 村 英 紀**

Multivariable Control of Cold Tandem Mill

Takeshi YAMADA* and Hidenori KIMURA**

The main function of the control system of a tandem cold-rolling mill is to produce the strip with a prescribed thickness accuracy and to maintain the interstand tensions within a reasonable range in the rolling operation, against disturbances such as the mill input thickness, the stand set-up error, the drift of ingoing strip hardness, the coefficient of friction and so on. In a conventional control scheme, the output thickness is controlled by adjusting the screw position, while the interstand tension is controlled by updating the roll speed. Since the output thickness is strongly coupled with interstand tension, it is natural to consider that the integration of thickness control and tension control will result in a better control performance.

In this paper we demonstrate an integrated control scheme for output thickness and interstand tension using the modern state-space approach. A state-space model for 5-stand cold-rolling mill is derived and an optimal feedback control law is calculated for this model, incorporated with an integral action to eliminate the tension off-set. The output thickness of the preceding stand is employed as a feed-forward signal to update the screw position of each stand.

Simulation results are exhibited in comparison with that of a conventional control scheme. It is concluded that our system demonstrates a better control performance over the conventional one. Moreover it suggests an approach for shape control by adjusting weighting matrices of the performance index.

1. ま え が き

冷間圧延工程は熱間圧延工程で得たホットコイルを

製品厚に圧延する工程であり、高度の板厚精度、形状の良さが要求される鋼板圧延における最終工程である。現在、この工程はタンデムミル（5～6 スタンド）による連続圧延方式が採用されている。

コールドタンデムミルの制御に関しては、スカラー制御論による種々の制御方式が採用されているが、本システムは各スタンド出口板厚、各スタンド間張力が強い相互干渉をもつ典型的な多変数制御系であり、現代制御論による多変数制御を行うことにより、制御性能を改善することが期待できる。

本論文において、最終スタンド出口板厚のみならず各スタンド出口板厚、各スタンド間張力をも常に一定に保つことを目的として、最適制御によるコールドタンデムミルの制御を考える。

また、タンデムミルにおいて、各スタンド入口板厚は前スタンド出口板厚を測定することにより予測可能である。それでこの情報を用いたフィードフォワード制御をも考慮する。

2. コールドタンデムミルの制御

5-スタンドタンデムミルの概要を Fig. 1 に示す。各スタンド出口板厚、各スタンド間張力は、おのおのX線厚み計、張力計により測定可能である。ただし、X線厚み計については、実際に Fig. 1 のように全スタンド出口に設置されていることはないが、本論文においては、各スタンド出口板厚が必要であるので Fig. 1 のように設置されているものと仮定する。

圧延に際しては、最初に素材板厚、材質、また製品板厚、用途に応じて各スタンド圧下率、各スタンド間張力、圧延荷重、圧下位置、圧延速度などのパススケジュールが決定される。圧延工程は、このパススケジュールに従って行われるが、これらはスタンド圧下量、およびスタンド間張力の設定誤差、ロール偏心、素材変形抵抗変化、素材板厚変化、摩擦係数変化などにより大きな影響を受ける。そこで、これらの外乱に對して、各スタンド出口板厚、各スタンド間張力をパ

* 日本電気(株) 東京都港区芝 5-33-1

** 大阪大学基礎工学部 豊中市待兼山 1-1

* Nippon Electric Co., Minato-ku, Tokyo

** Faculty of Engineering Science, Osaka University, Toyonaka

(Received November 6, 1978)

Fig. 1 Schematic diagram of five-stand cold tandem mill

スケジュール値に保つように制御する必要がある。各スタンド間張力を制御することは、鋼板の破断の防護、形状制御、後方スタンドにおける張力による板厚の微細制御などから必要である。

また、このような板厚、張力制御を行う際の操作量は、スタンド圧下とロール回転速度（ロール回転数）である。

3. コールドタンデムミル基礎方程式

3.1 記号

本論文で用いる記号はつぎのようである。

H : スタンド入口板厚 [mm]

h : スタンド出口板厚 [mm]

v_b : スタンド入口板速度 [mm/sec]

v_f : スタンド出口板速度 [mm/sec]

S : ロール設定開度 [mm]

K : ミル剛性係数 [kg/mm]

f : 先進率 [—] P : 圧延荷重 [kg]

R : ワークロール半径 [mm]

N : ワークロール回転数 [rpm]

V : ワークロール回転速度 [mm/sec]

G : 圧延トルク（ロール2本分）[kg・mm]

α^* : 駆動モータのドループ率 [1/kg・mm]

t_f : 前方張力応力 [kg/mm²]

t_b : 後方張力応力 [kg/mm²]

l : 材料の降伏応力を示す式の定数 [kg/mm²]

μ : 摩擦係数 [—] b : 板幅 [mm]

L : スタンド間距離 [mm]

t_d : 遅れ時間 [sec] E : ヤング率 [kg/mm²]

3.2 単スタンドにおける圧延基礎方程式

単スタンド下における圧延方程式を以下に示す。また Fig. 2 にその圧延概要を示す。

(1) 体積速度一定の式（板幅変化はしないと仮定する）

$$v_b \cdot H = v_f \cdot h \quad (3.1)$$

Fig. 2 Schematic diagram of the rolling phenomenon

(2) スタンド出口板厚式

$$h = S + \frac{P}{K} \quad (3.2)$$

(3) 材料の速度式

$$v_f = (1 + f) \cdot V \quad (3.3)$$

なお圧延荷重式としては Hill の近似式、圧延トルク式としてはやはり Hill の近似式、また先進率は BlandFord の理論式を用いる。詳細は文献 2) を参照されたい。

3.3 タンデムミルにおける圧延方程式

各スタンド間において次式が成立する。ただし、添字はスタンド番号を示す。

(1) スタンド間張力の式

$$t_{fi} = \frac{E}{L} \int_0^L (v_{b_{i+1}} - v_{f_i}) dt \quad (3.4)$$

(2) スタンド間張力のつりあい式

$$h_i \cdot t_{fi} = H_{i+1} \cdot t_{b_{i+1}} \quad (3.5)$$

(3) スタンド間の板厚遅れ式

$$H_{i+1}(t) = h_i(t - t_{d_{i+1}}) \quad (3.6)$$

4. システムモデル

4.1 システムモデリング

(3.1)~(3.6)式を線形化²⁾、無次元化し Δv_f^* , Δv_b^* , Δt_b^* , ΔP , ΔG , Δf を消去することにより次式を得る。ただし、 Δx はパススケジュール値 x_0 よりの変動、 Δx^* は $\Delta x^* = \Delta x / x_0$ と定義する (ΔS^* のみ $\Delta S^* = \Delta S / h$ と定義する)。

$$\begin{aligned} \Delta h_i^* = & a_{1i} \Delta S_{i-1}^* + a_{2i} \Delta S_i^* + a_{3i} \Delta t_{f_{i-1}}^* + a_{4i} \Delta t_{f_i}^* \\ & + a_{5i} \Delta H_i^* + a_{6i} \Delta H_{i-1}^* + a_{7i} \Delta H_i^* \\ & + a_{8i} \Delta \mu_i^* + a_{9i} \Delta l_i^* + a_{10i} \Delta R_i^* \quad i=1, \dots, 5 \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{d \Delta t_{f_i}^*}{dt} = & C_{1i} \Delta S_{i-1}^* + C_{2i} \Delta S_i^* + C_{3i} \Delta S_{i+1}^* \\ & + C_{4i} \Delta t_{f_{i-1}}^* + C_{5i} \Delta t_{f_i}^* + C_{6i} \Delta t_{f_{i+1}}^* \\ & + C_{7i} \Delta N_i^* + C_{8i} \Delta N_{i+1}^* + C_{9i} \Delta H_i^* \\ & + C_{10i} \Delta H_{i-1}^* + C_{11i} \Delta H_i^* \\ & + C_{12i} \Delta H_{i+1}^* + C_{13i} \Delta \mu_i^* + C_{14i} \Delta \mu_{i+1}^* \\ & + C_{15i} \Delta l_i^* + C_{16i} \Delta l_{i+1}^* + C_{17i} \Delta R_i^* \\ & + C_{18i} \Delta R_{i+1}^* \quad i=1, \dots, 5 \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\Delta^* H_{i+1}(t) = \Delta h_i^*(t - t_{d_{i+1}}) \quad i=1, \dots, 4 \quad (4.3)$$

ただし、(4.1), (4.2)式において、正確には全スタンドの変数が右辺に現われるはずであるが、実際は隣接スタンドの影響が強くそれ以外の影響は小さい。そのような項、いいかえれば係数が十分0に近い項は上式で省略してある。

ここで、スタンド圧下系は次式のような入力 u_i により駆動されるものと仮定する。

$$\frac{d\Delta S_i^*}{dt} = u_i \quad i=1, \dots, 5 \quad (4.4)$$

また、ロール回転系についての遅れはないと仮定する。さらに、(4.1), (4.2)式において $\Delta\mu_i^*, \Delta l_i^*, \Delta R_i^*$ は測定不可能であるので、以後 $\Delta\mu_i^*, \Delta l_i^*, \Delta R_i^*$ については考慮しない。

(4.1)～(4.4)式より最適制御に適したシステム方程式を導くが、(4.3)式が問題となる。(4.3)式はフィードフォワード制御を支配する式であり、この式を扱うにはつぎの2方法が考えられる。

(i) ΔH_i^* を状態変数とし、状態変数に遅れ時間が存在するシステムと考える³⁾。

(ii) ΔH_i^* を予測可能な外乱とし、予測可能な外乱をもつシステムと考える¹⁾。

(i)の方法は、(4.3)式を1次遅れ式で近似する必要があり、その結果、状態変数が増加する。(ii)の方法においては、未来全域における ΔH_i^* の予測が必要である。しかるに、タンデムミルの場合、時間遅れ t_d 先まで予測できるのみである。それで厳密な意味で最適制御を実現することはできない。

本論文においては、システム次数の増加を避けるため(ii)の方法を用いる。(4.1), (4.2), (4.4)式をベクトル形式で表わすとつぎの状態空間モデルを得る。

$$\dot{x} = Ax + Bu + Dw \quad (4.5)$$

$$y = Cx + Ew \quad (4.6)$$

ただし、状態変数 x 、出力 y 、入力 u 、予測可能な外乱 w はつぎのようである。

$$x = (\Delta S_i^*, \Delta t_{f_i}^*)',$$

$$y = (\Delta h_i^*, \Delta t_{f_j}^*)'$$

$$u = (u_i, \Delta N_i^*)', \quad w = (\Delta H_i^*)'$$

$$i=1, \dots, 5, \quad j=1, \dots, 4$$

4.2 最適制御の解

(4.5), (4.6)式で示されるシステムにおいて、評価関数

$$J = \frac{1}{2} \int_0^\infty (y' Q y + u' R u) dt \quad (4.7)$$

を最小とする最適入力 u^* は

$$u^* = -R^{-1} B' (Px - \xi) \quad (4.8)$$

である。ただし、行列 P は

$$A'P + PA - PBR^{-1}B'P + C'QC = 0 \quad (4.9)$$

で示される Riccati 代数方程式の解、ベクトル $\xi(t)$ は

$$\xi(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[- \int_0^{T-t} e^{(A' - PBR^{-1}B')\tau} \cdot (C'QE + PD)w(t+\tau) d\tau \right] \quad (4.10)$$

である。

(4.10)式において、 τ が $0 \leq \tau \leq T-t$ のとき、 $w(t) \sim w(T)$ の情報が必要である。しかし、タンデムミルの場合、 $w(t) \sim w(t+t_d)$ の情報のみが予測可能である。そこで、最適制御則と一致するには、 $t=t_d$ において $e^{(A' - PBR^{-1}B')\tau}$ が十分に0に収束していることが必要である。このとき(4.10)式は

$$\xi(t) = - \int_0^{t_d} e^{(A' - PBR^{-1}B')\tau} (C'QE + PD)w(t+\tau) d\tau \quad (4.11)$$

となる。問題は $e^{(A' - PBR^{-1}B')t_d}$ が十分に0に収束するように(4.7)式における行列 Q, R を決定することである。

そして、上記のことをも含めて、重み Q, R の決定法であるが、これについての理論的な裏付けはなく、シミュレーションを繰り返すことにより決定した。

また、Riccati 代数方程式の解は、Potter の方法⁴⁾により求めた。

5. シミュレーション結果

シミュレーションに用いたパススケジュール、および圧延機データを Table 1 に示し、(4.5), (4.6)式の各行列は付録に示す。またシステムの開ループ極は、
 $\{0, 0, 0, 0, 0, -468.17$
 $\pm 56.89j, -450.09, -405.51, -69.56\}$

Table 1 Path schedule and rolling mill data

	unit	1	2	3	4	5
H_i	mm	3.20	2.64	2.10	1.67	1.34
h_i	mm	2.64	2.10	1.67	1.34	1.20
t_{bi}	kg/mm ²	0	10.2	12.8	16.1	16.1
t_{fi}	kg/mm ²	10.2	12.8	16.1	16.1	4.5
v_{fi}	m/sec	9.27	11.66	14.66	18.27	20.40
f_i	—	0.0527	0.0309	0.0376	0.0348	0.0138
P_i	kg	592×10^3	708×10^3	798×10^3	800×10^3	647×10^3
R_i	mm	273	273	292	292	292
t_{di}	sec	0.2	0.496	0.395	0.315	0.252
$E=21,000$ [kg/mm ²] $L=4.6$ [m] $b=930$ [mm] $l=84.6$ [kg/mm ²]						
$\mu=0.07$ [—] $K=470,000$ [kg/mm] $z^*=0$ [1/kg·mm]						

である。

本論文において、素材板厚 (ΔH_1^*) が10% ステップ状に増加した場合のシミュレーションを行った。その際、つぎのことを仮定する。

(i) 第1スタンド前方 1.53 m ($v_{s1} \times 0.2$ 秒) の位置にX線厚み計を設置し、素材板厚変動が予測可能とする。

(ii) シミュレーションは、板厚変動が第1スタンド前方 1.53 m の位置にあるときを $t=0$ とする。

5.1 ゲインフィードバックによる制御

上記のような仮定のもとでシミュレーションを行い、Fig. 3(a), (b), (c), (d)に示される結果を得た。ただし、このシミュレーションにおける重み Q, R は

$$Q = \text{diag} \{60, 60, 60, 60, 60, 8, 8, 8, 8\}$$

$$R = \text{diag} \{0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01\}$$

(a) Step responses of stand exit-thickness Δh_i^*

(b) Step responses of tension Δt_{fi}^*

(c) Input U_i

(d) Input ΔN_i^*

Fig. 3 Step responses due to 10% input-thickness ΔH_1^* increase

600., 600., 600., 600., 600}

であり、閉ループ極は

$$\begin{aligned} & \{-1083.12, -960.50, -753.51, -510.27, \\ & -111.21, -65.34, -44.03, -27.22, -33.32, \\ & -12.98\} \end{aligned}$$

となる。

シミュレーション結果よりつぎのことがわかる。

(i) Δh_1^* の $t=0.2$ 秒前後の応答であるが、これは(4.11)式に示されるフィードフォワード制御によるものである。つまり、第1スタンド入口板厚が増加するという予測のもとに、前もってスタンド圧下を行い、実際に板厚変動がスタンドに入った時の出口板厚偏差を小さくしている。

(ii) フィードフォワード制御が効果的に動作しているスタンドは第1スタンドのみである。その理由は、 $\Delta h_1^* \sim \Delta h_5^*$ に対して等しい重みをつけたことによるものと思われる。

(iii) $\Delta h_2^* \sim \Delta h_5^*$ は $t=0.2$ 秒前後において、 ΔH_1^* の影響を受ける。これは、(4.1), (4.2)式で H_1 を特別に考慮していることに相当するものであり、素材板厚変動が第1スタンドに入った時、全スタンド影響を及ぼすことを示している。

(iv) $\Delta t_{f1}^* \sim \Delta t_{f5}^*$ において、オフセットが残る。これはゲインフィードバックにより制御していることを考えれば当然のことである。

(v) Fig. 3(c)に示されるように、入力 u_i は最終スタンドにおいては、ほとんど無制御である。これは重み Q を各出口板厚においてすべて等しく設定した理由による。

(vi) Fig. 3(d)に示されるように、入力 N_i は非常に急激な変化を要求される。実際のミルの速度制御系の追従特性と比較検討することが必要であろう。

5.2 積分機能をもつ制御

5.1 のシミュレーションにおいて、張力系にオフセットが生じた。これをなくするには、積分機能をもつフィードバック制御を行うことが必要である。本論文において、オフセットの生じなかった板厚系についての積分機能は考えず、張力系のみについて積分機能を考える。

ここで、張力系については、主にロール回転数により制御されると考えて積分制御を行う⁵⁾。それには、入力変数であったロール回転数を状態変数とし、新しく次式のような入力 u_i を(4.5), (4.6)式に加えればよい。

$$\frac{dN_i^*}{dt} = u_{i+5} \quad i=1, \dots, 5 \quad (5.1)$$

(a) Step responses of stand exit-thickness Δh_i^* (b) Step responses of tension Δt_{fi}^* (c) Input u_i (d) State variable ΔN_i^* **Fig. 4** Step responses due to 10% input-thickness ΔH_1^* increase. Integral type

システム方程式はつぎのようになる。

$$\dot{x} = \tilde{A}x + \tilde{B}u + \tilde{D}w \quad (5.2)$$

$$y = \tilde{C}x + \tilde{E}w \quad (5.3)$$

ただし、 x, y, u, w は

$$x = [\Delta S_i^*, \Delta t_{fi}^*, \Delta N_i^*],$$

$$y = [\Delta h_i^*, \Delta t_{fj}^*, \Delta N_i^*]$$

$$u = [u_k], \quad w = [\Delta H_1^*],$$

$$i=1, \dots, 5, \quad j=1, \dots, 4, \quad k=1, \dots, 10$$

であり、 $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D}, \tilde{E}$ は

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & B_{21} \\ A_{21} & A_{22} & B_{22} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} B_{11} & 0 \\ B_{12} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

(a) Step responses of stand exit-thickness Δh_i^* (b) Step responses of tension Δt_{fi}^* **Fig. 5** Step responses due to 10% input-thickness ΔH_1^* increase. Conventional method

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad \tilde{D} = \begin{bmatrix} D \\ 0 \end{bmatrix} \quad \tilde{E} = \begin{bmatrix} E \\ 0 \end{bmatrix}$$

である。また、行列 $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}, B_{11}, B_{12}, B_{21}, B_{22}$ は、(4.5)式の行列 A, B において、

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$$

で示される、おのこの 5×5 の行列である。

このシステムにおいて、5.1 と同様のシミュレーションを行い、その結果を **Fig. 4(a), (b), (c), (d)** に示す。また、このときの重み Q, R は

$$Q = \text{diag} \{200., 200., 200., 200., 200., 100., 100., 100., 100., 10., 10., 10., 10., 10.\}$$

$$R = \text{diag} \{0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 10, 10, 10, 10, 10\}$$

であり、閉ループ極は

$$\begin{aligned} &\{-422.7 \pm 70.65j, -332.5 \pm 166.8j, \\ &-327.0 \pm 52.02j, -229.2, -179.1, -60.05, \\ &-49.77, -9.46, -7.52, -4.76, -1.86, -0.92\} \end{aligned}$$

となる。

Fig. 4 に示されるように、張力系のオフセットは除かれる。

5.3 従来方式との比較

Fig. 5(a), (b) に現在採用されている制御方式⁸⁾ によるシミュレーション結果を示す。

従来の制御方式と比較して、スタンド出口板厚、スタンド間張力について、その整定時間が改善されていることがわかる。また、フィードフォワード制御を行うことにより、出口板厚についての行き過ぎ量は大きく改善される。

6. む す び

本論文では板厚変動のスタンド間時間おくれを予測可能な外乱としてシミュレーションを行ったが、第1スタンド出口板厚に関しては満足すべきフィードフォワード制御効果を得た。ただ Fig. 3(c) に示されるように、スタンド圧下については第1スタンドに大きな負荷を与えており、形状制御の見地からは望ましくない。この点はたとえば評価関数のなかで各スタンドに対する重み Q を適当に変えることにより改善できるようにも思われるが、数値的な検討はしていない。今後の研究課題である。

また積分機能は張力系のみについて考えたが、板厚系についても導入することが望ましい。実際、摩擦係数のステップ外乱に対して、出口板厚にオフセットが生じた。

なお、評価関数に各スタンド出口板厚、各スタンド間張力を考慮したが、さらに圧延荷重を加えた圧延荷重一定制御を行うことにより、形状制御に役立つと思われる。

最後に、本研究において圧延データおよび従来方式によるシミュレーション結果を提供していただき、同時に多くの有益なご意見をいただいた住友金属工業

（株）の美坂佳助氏、近藤勝也氏、高橋亮一氏、また本研究の過程でご助力を頂いた大阪大学 坂和愛幸教授、井上雄二郎助手、藤井信夫助手に深く感謝の意を表します。

参 考 文 献

- 1) 高橋, 美坂: Gaugemeter AGC の進歩, 塑性と加工, 16-168, 25/31 (1975)
- 2) 美坂: コールドタンデムミルの影響係数, 塑性と加工, 8-75, 188/200 (1967)
- 3) M. Tanuma: Multivariable Control of a Five-Stand Cold Mill, 4th IFAC/IFIP International Conference on Digital Computer Applications to Process Control, 75/86 (1974)
- 4) J.E. Potter: Matrix Quadratic Solutions, J. SIAM, Appl. Math., 14-3, 496/501 (1966)
- 5) C.D. Johnson: Optimal Control of the Linear Regulator with Constant Disturbances, IEEE Trans. on Automatic Control, AC-13-4, 416/421 (1968)
- 6) A.P. Sage: Optimum System Control, 87/98, Prentice-Hall (1968)
- 7) 野坂: 鉄鋼業のコンピュータ・コントロール, 231/269, 産業図書 (1970)
- 8) 山下, 他: 張力・板厚制御, 塑性と加工, 14-155, 976/987 (1973)
- 9) H.W. Smith: Dynamic Control of a Two-Stand Cold Mill, Automatica, 5, 183/190 (1969)

《付 録》

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{bmatrix} \begin{matrix} -17.98 & 1362.6 & 0 & 0 & 0 \\ 36.7 & -14.6 & 1084.8 & 0 & 0 \\ -1.5 & 34.0 & 3.7 & 883.6 & 0 \\ 0 & -6.2 & 27.8 & 70.7 & 774.8 \\ 0 & 0 & 0 & 23.6 & 449.9 \end{matrix} & \begin{matrix} -431.1 & 8.0 & 0 & 0 & 0 \\ 103.0 & -435.7 & -15.4 & 0 & 0 \\ 0 & 94.2 & -512.6 & -45.3 & 0 \\ 0 & 0 & 92.5 & -417.0 & -16.8 \\ 0 & 0 & 0 & 94.8 & -65.1 \end{matrix} \end{bmatrix} \\
 B &= \begin{bmatrix} I_5 & \begin{matrix} -4149.0 & 4148.0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4158.6 & 4158.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4156.9 & 4156.9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5180.5 & 5180.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -20695.0 \end{matrix} \end{bmatrix} \\
 C &= \begin{bmatrix} \begin{matrix} 0.352 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.016 & 0.353 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.022 & 0.290 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.024 & 0.240 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.013 & 0.171 \end{matrix} & \begin{matrix} -0.014 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.044 & -0.024 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.061 & -0.034 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.08 & -0.035 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.052 & -0.006 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{matrix} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$D = \begin{pmatrix} \begin{array}{ccccc} & & \text{O}_{5 \times 5} & & \\ \hline 971.2 & -2043.4 & 0 & 0 & 0 \\ 687.0 & -273.3 & -1290.6 & 0 & 0 \\ 498.7 & 46.4 & -435.2 & -871.3 & 0 \\ 347.6 & 0 & 62.0 & -414.1 & -733.9 \\ 126.8 & 0 & 0 & 74.1 & -415.9 \end{array} \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} \begin{array}{ccccc} 0.702 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.247 & 0.481 & 0 & 0 & 0 \\ 0.169 & -0.030 & 0.647 & 0 & 0 \\ 0.116 & 0 & -0.053 & 0.754 & 0 \\ 0.060 & 0 & 0 & -0.040 & 0.837 \end{array} \\ \hline \text{O}_{4 \times 5} \end{pmatrix}$$