むだ時間系の極配置問題[†]

山下 勝比 弘*

Pole Assignment in Multivariable Delay Systems

Katsuhiko YAMASHITA*

The pole assignment problem in multivariable delay systems is investigated. The delays may be lumped or distributed, and contained in the state and the input. Delay operators are introduced so that the study can be made within an algebraic framework. Sufficient conditions are found and a method for obtaining feedback matrices is proposed based on the algorithm used for delay-free systems. The study of pole assignable structures is also done and two types of structures are found.

1. は し が き

通常の時間不変線形系の状態フィードバックによる極配置問題はすでに解決されていて、何種類かのアルゴリズムが提案されている^{9), 9)-11)}。また、極配置可能条件は可制御条件と等価になることがわかっている。むだ時間系については問題は未解決で、その複雑さの程度も系およびフィードバックループに含まれるむだ時間要素の種類によって異なる。比較的簡単な

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=0}^r A_i x(t-ih) + \sum_{i=0}^s B_i u(t-ih), \quad (h>0)$$

で表わされるむだ時間系の場合、Morse⁷⁾ および Sontag^{4), 8)} がフィードバック行列 K に時間 ih の純むだ時間要素を使用できるものとして、必要十分条件を導出している。しかし、 K を求めるアルゴリズムは得られておらず、問題の完全な解決には至っていない。また、

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=0}^r A_i x(t-h_i) + \sum_{i=0}^s B_i u(t-k_i),$$

$$(h_0=k_0=0, h_i>0, k_i>0)$$

なる系に対し、必要条件が Sontag^{4), 8)} により得られている。さらに、Kamen⁴⁾ は上述の系で 1 入力の場合

について K に分布むだ時間要素を使用できるものとし（極配置可能性が高まる）必要十分条件を求めたが、対象の系がこの条件を満たすかどうかのチェックは試行錯誤的な方法に頼らねばならない。しかし、分布むだ時間要素の K への積極的な導入は新しい試みである。また、Morse, Sontag, Kamen とともに抽象代数学を駆使する代数学的アプローチを取っていて、むだ時間系の制御問題にこれまでよく用いられてきた関数解析的アプローチ（たとえば、文献 6））との対比をなしている。

本稿では系自体が純むだ時間だけでなく分布むだ時間要素も含む場合を考え、むだ時間オペレータを導入して代数学的に極配置可能条件を求める。得られる結果は十分条件で前述の各結果同様、問題を完全に解決するとはいえないが、フィードバック行列を求める方法を与え、極配置可能な系の構造について検討する。

2. 記号の説明

本稿では以下の表示法を用いる。

R : 実数集合

$R[d_1, \dots, d_s]$: 係数が実数の $d_1, \dots, d_s$ に関する多項式集合

$\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$: 実軸対称な複素数集合（閉ループ根）

$\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$: $\prod_{i=1}^n (p - \beta_i) = p^n + \alpha_1 p^{n-1} + \dots + \alpha_n$
（閉ループ特性方程式の係数）

(A, B) : 行列対 A, B

$[A, B]$: $[B, AB, \dots, A^{n-1}B]$

$(M)_{m \times m}$: $n \times m$ 行列 M の $m \times m$ 小行列, ($n \geq m$)

M_0 : 行列 $M \in R^{n \times m}[d_1, \dots, d_s]$ の定数項行列。したがって、 $M_0 \in R^{n \times m}$

M_d : $M - M_0$

p : $f(t) \rightarrow \frac{d}{dt}f(t)$, (微分オペレータ)

[†] 第 21 回自動制御連合講演会で発表（昭 53・11）

* 東京芝浦電気(株) 府中市東芝町 1

* Toshiba Corp., Fuchu

(Received December 11, 1978)

3. むだ時間オペレータによる系の記述

まず, 以下のオペレータを導入する.

i) 純むだ時間オペレータ

$$d: f(t) \rightarrow f(t-a), \quad (a>0) \quad (1)$$

ii) 分布むだ時間オペレータ

$$d: f(t) \rightarrow \int_0^a \theta(\tau) f(t-\tau) d\tau, \quad (a>0) \quad (2)$$

ここで $\theta(t)$ は Lebesgue 可測, 可積分で, 区間 $[0, a]$ 以外では零.

(1)と(2)式のエペレータを用いて, 本稿で取り扱う系を表現すると,

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (3)$$

ここで, $A \in R^{n \times n}[d_1, \dots, d_s]$, $B \in R^{n \times m}[d_1, \dots, d_s]$ で $d_1, \dots, d_s$ は (1), (2) 式で定義されたむだ時間オペレータである.

【例題】 つぎのむだ時間系を考える.

$$\dot{x}_1(t) = x_1(t-1) + \int_0^a \theta(\tau) x_2(t-\tau) d\tau + u_1(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = x_1(t) + x_2(t-2) + u_1(t-1) + u_2(t)$$

2 種類のオペレータ

$$d_1: f(t) \rightarrow f(t-1) \text{ および}$$

$$d_2: f(t) \rightarrow \int_0^a \theta(\tau) f(t-\tau) d\tau$$

を定義すると,

$$A = \begin{bmatrix} d_1 & d_2 \\ 1 & d_1^2 \end{bmatrix} \text{ および } B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ d_1 & 1 \end{bmatrix}$$

4. 極配置可能条件

まず, 極配置可能性の定義を与える.

【定義】 系 (3) において任意の実軸対称複素数集合 $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$ が与えられた時,

$$\det(pI - A - BK) = \prod_{i=1}^n (p - \beta_i)$$

なる行列 $K \in R_a^{m \times n}$ が存在する時, 系 (3) は R_a に関して極配置可能であるという. ただし, R_a は実現可能なむだ時間オペレータに関する多項式集合.

なお, 以下ではつぎの仮定が成立するものとする.

i) 行列 B において, $n \geq m$ で $\text{rank } B = m$ である (B は最大階数をもつ).

ii) 系に含まれた分布むだ時間要素はすべて実現可能である.

《定理 1》 系 (3) が $R[d_1, \dots, d_s]$ に関して極配置可能な十分条件は,

1) すべての $(B)_{m \times m}$ に対して $\det(B)_{m \times m} \in R$

2) $\text{rank } [A_0, B_0] = n$

3) $\text{rank } [A_0 + B_0 K_0, B_0 \tau] = n$ となる $K_0 \in R^{n \times n}$ と $\tau \in R^{m \times 1}$ に対して, $[A + B_0 K_0, B_0 \tau]$ がユニモデュラである.

定理 1 の証明にあたって, 以下の補題が必要になる.

【補題 1】 $\text{rank } M = m$ なる行列 $M \in R^{n \times m}[d_1, \dots, d_s]$, $(n \geq m)$ が与えられたとき, $M = M_0 U$ と分解できるための必要十分条件は, すべての $(M)_{m \times m}$ に対して $\det(M)_{m \times m} \in R$ が成立することである. ただし, $U \in R^{n \times m}[d_1, \dots, d_s]$ でユニモデュラである.

(証明) (十分性) $\text{rank } M = m$ だから,

$$M = T \begin{bmatrix} I_m \\ P \end{bmatrix} V$$

ここで $T \in R^{n \times n}$ は $V \in R^{m \times m}[d_1, \dots, d_s]$ が常に正則行列になることを保証するために必要な基本行変換を行う行列である (すなわち, M の m 本の線形独立な行を選び出す). いま, $\det(M)_{m \times m} \in R$ がすべての小行列 $(M)_{m \times m}$ について成り立つとすると, $\det V \neq 0$ で $\det V \in R$ となる. したがって, 行列 $\begin{bmatrix} I_m \\ P \end{bmatrix}$ のすべての $m \times m$ 小行列の行列式の値は零か実定数にならねばならない. これより, $M = M_R V$, ($M_R \in R^{n \times m}$) となる. 一方, $V = V_0 + V_d$ と分解すると $M_0 = M_R V_0$ となる. さらに, ユニモデュラな行列 V に対して V_0 が正則行列になることは容易に証明できるから,

$$\begin{aligned} M &= M_R V \\ &= M_R V_0 V_0^{-1} V \\ &= M_0 U, \quad \text{ここで, } U = V_0^{-1} V \end{aligned}$$

となり, U もユニモデュラとなる.

(必要性) $M = M_0 U$ と分解できるとすると, すべての $(M)_{m \times m}$ に対し,

$$\begin{aligned} \det(M)_{m \times m} &= \det \{(M_0)_{m \times m} U\} \\ &= \det(M_0)_{m \times m} \det U \in R \end{aligned}$$

【補題 2】 むだ時間系

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + b_0 u(t) \quad (4)$$

ここで, $A \in R^{n \times n}[d_1, \dots, d_s]$ および $b_0 \in R^{n \times 1}$ が極配置可能なための十分条件は, $[A, b_0]$ が $R[d_1, \dots, d_s]$ 上でユニモデュラとなることである.

(証明)

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n-1} & \dots & a_1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} [A^{n-1} b_0, A^{n-2} b_0, \dots, b_0]^{-1}$$

ここで, $\det(pI - A) = p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n$ を変換行列とすると,

$$\hat{A} = SAS^{-1} \quad \hat{b}_0 = Sb_0$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

となる。したがって、いかなる $\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ に対しても、

$$\hat{k}^T = [a_n - \alpha_n, a_{n-1} - \alpha_{n-1}, \dots, a_1 - \alpha_1] \\ \in R^{1 \times n}[d_1, \dots, d_s]$$

とすると、

$$\det(pI - \hat{A} - \hat{b}_0 \hat{k}^T) = p^n \alpha_1 p^{n-1} + \dots + \alpha_n \\ = \prod_{i=1}^n (p - \beta_i)$$

となることがわかる。また、 $\det(pI - \hat{A} - \hat{b}_0 \hat{k}^T) = \det(pI - A - b_0 k^T S)$ だから、系(4)に対するフィードバック行列は $k^T = \hat{k}^T S$ となる。しかし、 $[A, b_0]$ がユニモデュラであれば、 S が $R[d_1, \dots, d_s]$ 上の行列となるから $k^T = \hat{k}^T S \in R^{1 \times n}[d_1, \dots, d_s]$ でむだ時間要素で実現可能である。

重要なポイントは、もしも、 S が $R[d_1, \dots, d_s]$ 上の行列でなければ、 k が、たとえば、 d^{-1} なる要素を含む可能性があり、 d_1 が純むだ時間要素ならば、 d_1^{-1} は $x(t)$ なる入力に対して $x(t+a)$ 、($a > 0$) なる出力を生成する予測要素になり、実現不可能となる。

(定理1の証明) 条件1) および補題1より、 $B = B_0 U$ 。 U はもちろんユニモデュラである。 $v(t) = Uu(t)$ を定義すると、

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ = Ax(t) + B_0 v(t) \quad (3')$$

となる。いま、系(3')の極配置問題を考える。条件2) と Heymann の補題³⁾より、 $[A_0 + B_0 K_0, B_0 \tau]$ が最大階数をもつような $K_0 \in R^{m \times n}$ および $\tau \in R^{m \times 1}$ が存在する。さらに、条件3) および、補題2より

$$\det(pI - A - B_0 K_0 - B_0 \tau k^T) \\ = \det\{pI - A - B_0(K_0 + \tau k^T)\} \\ = \prod_{i=1}^n (p - \beta_i)$$

なる $k \in R^{n \times 1}[d_1, \dots, d_s]$ が存在する。したがって $B_0 = B U^{-1}$ より $K = U^{-1}(K_0 + \tau k^T)$ となる。しかし、 U がユニモデュラであるから、 $U^{-1} \in R^{m \times m}[d_1, \dots, d_s]$ で K も $R[d_1, \dots, d_s]$ 上の行列となる。

(K_0, τ) が条件3) を満たさない場合は、試行錯誤的

に別の対 (K_0', τ') を用いて条件3) のチェックを行えばよい。

以下では、極配置可能な系の構造についての検討を行う。まず、つぎの特性方程式に関する補題を与える。

[補題3] $A \in R^{n \times n}[d_1, \dots, d_s]$, $b, k \in R^{n \times 1}[d_1, \dots, d_s]$ が与えられた時

$$\det(pI - A - b k^T) \\ = \det(pI - A) - k^T \text{adj}(pI - A)b$$

(証明)

$$\det(pI - A - b k^T) \\ = \det\{[pI - A][I - (pI - A)^{-1} b k^T]\} \\ = \det(pI - A) \det\{I - (pI - A)^{-1} b k^T\}$$

しかし、 $X \in R^{n \times m}[d_1, \dots, d_s]$ および、 $Y \in R^{m \times n}[d_1, \dots, d_s]$ に対して

$$\det(I_n + XY) = \det(I_m + YX)$$

なる関係があるから¹⁾、

$$\det(pI - A - b k^T) \\ = \det(pI - A) \{1 - k^T (pI - A)^{-1} b\} \\ = \det(pI - A) - k^T \text{adj}(pI - A)b$$

この関係は Kamen が文献4) で与えたもので、その証明は文献4) では省かれているが、帰納法を用いて行くと記されている。したがって、ここでの証明は新しいもので、より簡単なものと思われる。

《定理2》系(4)が $R[d_1, \dots, d_s]$ に関し極配置可能なための十分条件は

- 1) $\text{rank}[A_0, b_0] = n$
- 2) $(S_0 A_0 S_0^{-1}, S_0 b_0)$ が可制御標準形²⁾になるような行列 $S_0 \in R^{n \times n}$ に対して

$$\hat{A}_d = S_0 A_d S_0^{-1} \quad (A_d = A - A_0)$$

$$= \begin{bmatrix} X & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ X & \cdots & \cdots & X \end{bmatrix}, \quad n \times n \text{ 下三角行列}$$

あるいは、

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & X & \cdots & X \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

$n \times n$ ($n-2$)-上三角行列 (ただし、 $n > 2$)

ここで X は $R[d_1, \dots, d_s]$ の零とは限らない要素 (証明) ($\hat{A}_d$ が下三角行列の場合) $\hat{A} = S_0 A S_0^{-1}$ および $\hat{b}_0 = S_0 b_0$ とすると、

$$\text{adj}(pI - \hat{A})\hat{b}_0 = \text{adj} \begin{bmatrix} p - \hat{a}_{11}^d & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ & p - \hat{a}_{22}^d & & & 0 \\ & & \ddots & & -1 \\ a_n^0 - \hat{a}_{n1}^d & a_{n-1}^0 - \hat{a}_{n2}^d & \cdots & p + a_1^0 - \hat{a}_{nn}^d & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ = [q_1, q_2, \dots, q_n]^T$$

ここで, $\det(pI - A_0) = p^n + a_1^0 p^{n-1} + \cdots + a_n^0$

$$\begin{cases} q_1 = 1 \\ q_i = p^{i-1} + \sum_{j=1}^{i-1} r_{i,j} p^{i-j-1}, \quad (i=2, 3, \dots, n) \\ r_{ij} \in R[d_1, \dots, d_s]^T \end{cases}$$

したがって,

$$\text{adj}(pI - A_0 d)\hat{b}_0 = \begin{bmatrix} 1 & h_{12} & \cdots & h_{1n} \\ 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ p \\ \vdots \\ p^{n-1} \end{bmatrix} \\ \triangleq H[1, p, \dots, p^{n-1}]^T$$

G の逆行列は明らかに $R[d_1, \dots, d_s]$ 上の行列となる。

補題2より

$$\begin{aligned} \det(pI - A - b_0 k^T) \\ = \det(pI - A) - \hat{k}^T \text{adj}(pI - \hat{A})\hat{b}_0 \end{aligned}$$

だから,

$$\hat{k}^T = [a_n - a_n, \dots, a_1 - a_1] G^{-1} \in R^{n \times 1}[d_1, \dots, d_s]$$

ただし, $\det(pI - A) = p^n + a_1 p^{n-1} + \cdots + a_n$ とする,

$$\begin{aligned} \hat{k}^T \text{adj}(pI - \hat{A})\hat{b}_0 \\ = [a_n - a_n, \dots, a_1 - a_1][1, p, \dots, p^{n-1}]^T \end{aligned}$$

となる。したがって, $k^T = \hat{k}^T S_0$ は $R[d_1, \dots, d_s]$ 上の行列で望みのフィードバック行列になる。

($\hat{A}_d$ が $(n-2)$ -上三角行列の場合)

$$\begin{aligned} \text{adj}(pI - \hat{A})\hat{b}_0 \\ = \text{adj} \begin{bmatrix} p & -1 & -\hat{a}_{13}^d & \cdots & -\hat{a}_{1n}^d \\ 0 & & & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & \cdots & 0 & p & -1 \\ a_n^0 & a_{n-1}^0 & \cdots & p + a_1^0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ = [q_1, q_2, \dots, q_n]^T \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{cases} q_i = p^{i-1} + \sum_{j=1}^{n-i-1} r_{i,i+j} p^{i+j-1}, \quad (i=1, \dots, n-2) \\ q_i = p^{i-1}, \quad (i=n-1, n) \\ r_{ij} \in R[d_1, \dots, d_s] \end{cases}$$

であるから,

$$\text{adj}(pI - \hat{A})\hat{b}_0$$

$$\triangleq G[1, p, \dots, p^{n-1}]^T$$

と書ける。したがって, G は $R[d_1, \dots, d_s]$ 上のユニモデュラな行列となる。以下 $\hat{A}_d$ が下三角行列の場合と同様に証明できる。

つぎの命題は定理1と定理2で極配置可能な系の集合間の関係を与えるもので, 後者は前者に含まれることを示している。

【命題】 (A, b_0) が定理2の構造条件を満たす時, $[A, b_0]$ はユニモデュラな行列となる。

(証明)

$$\begin{aligned} \text{adj}(pI - \hat{A})\hat{b}_0 \\ = \{\det(pI - \hat{A})\}(pI - \hat{A})^{-1}\hat{b}_0 \\ = (p^n + a_1 p^{n-1} + \cdots + a_n) \frac{1}{p} \left(I + \frac{1}{p} \hat{A} + \frac{1}{p^2} \hat{A}^2 + \cdots \right) \hat{b}_0 \end{aligned}$$

ここで, $S_0 \in R^{n \times n}$ は $(\hat{A}_0, \hat{b}_0)$ が可制御標準形になる変換行列で, $\hat{A} = S_0 \hat{A}_0 S_0^{-1}$ および $\hat{b}_0 = S_0 b_0$ である。

$\text{adj}(pI - \hat{A})$ は p に関して $(n-1)$ 次の多項式行列となるから

$$\begin{aligned} \text{adj}(pI - \hat{A})\hat{b}_0 \\ = \left\{ p^{n-1} I + (\hat{A} + a_1 I) p^{n-2} + (\hat{A}^2 + a_1 \hat{A} + a_2 I) p^{n-3} \right. \\ \left. + \cdots + \sum_{i=0}^{n-1} a_i \hat{A}^{n-i-1} \right\} \hat{b}_0 \quad (\text{ただし, } a_0 = 1) \\ = [\hat{A}^{n-1} \hat{b}_0, \hat{A}^{n-2} \hat{b}_0, \dots, \hat{b}_0] \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & & 0 \\ a_{n-1} & \cdots & a_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ p \\ \vdots \\ p^{n-1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

一方, (A, b_0) は定理2の構造条件を満たすから

$$\text{adj}(pI - \hat{A})\hat{b}_0 = G[1, p, \dots, p^{n-1}]^T$$

したがって,

$$G = [\hat{A}^{n-1} \hat{b}_0, \hat{A}^{n-2} \hat{b}_0, \dots, \hat{b}_0] \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & & 0 \\ a_{n-1} & \cdots & a_1 & 1 \end{bmatrix}$$

定理2の証明より G はユニモデュラであるから

$$[\hat{A}^{n-1} \hat{b}_0, \hat{A}^{n-2} \hat{b}_0, \dots, \hat{b}_0]$$

もユニモデュラとなる。すなわち、列の順序を逆にすると $[\hat{A}, \hat{b}_0]$ がユニモデュラであることがわかる。さらに S_0 の定義より $[A, b_0] = S_0^{-1}[\hat{A}, \hat{b}_0]$ だから $[A, b_0]$ はユニモデュラとなる。■

5. 現時点の状態フィードバックがない系

現時点の状態がフィードバックされない系は一般に

$$\dot{x}(t) = Ax(t-a) + Bu(t) \quad (5)$$

と表わすことができる。ここで、 $a > 0$, $A \in R^{n \times n}[d_1, \dots, d_s]$ および $B \in R^{n \times m}[d_1, \dots, d_s]$ である。(5)式は $d: f(t) \rightarrow f(t-a)$ とすると $\dot{x}(t) = Adx(t) + Bu(t)$ とも表わせ(したがって、 $Ad \in R^{n \times n}[d_1, \dots, d_s, d]$)系(3)の A_0 に対応する項が零で、定理1の極配置可能条件を満たさないことがわかる。この節では(5)式の系でも K を Ad と同じ $R[d_1, \dots, d_s, d]$ 上の行列と限定せず、 $R[d_1, \dots, d_s, d, d_0]$ 上の行列、つまり、もうひとつのむだ時間オペレータ d_0 の追加を行うと極配置可能になる場合があることを示す。なお、系によっては、 d および d_0 のどちらか、あるいは、両方が、 $d_1, \dots, d_s$ のどれかと一致する場合がある。まず、Kamen により得られたつぎの定理⁵⁾を与える。

《定理3 (Kamen)》 むだ時間系

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t-a) + b_0 u(t) \quad (6)$$

ここで、 $A_0 \in R^{n \times n}$ および $b_0 \in R^{n \times 1}$

は $[A_0, b_0]$ が最大階数をもつ時、 $R[d, d_0]$ に関して極配置可能である。ただし、

$$d_0: f(t) \rightarrow \int_0^a f(t-\tau) d\tau$$

定理3の証明は文献5)で省略されているので、付録に筆者による証明を示した。定理3と本稿で得られた結果を組み合わせるとつぎの定理が得られる。

《定理4》 むだ時間系

$$\dot{x}(t) = Ax(t-a) + b_0 u(t) \quad (7)$$

ここで、 $A \in R^{n \times n}[d_1, \dots, d_s]$ および $b_0 \in R^{n \times 1}$ は $[A, b_0]$ がユニモデュラの時 $R[d_1, \dots, d_s, d, d_0]$ に関して極配置可能である。

(証明) 変換行列を

$$S = \left\{ [A^{n-1}b_0, \dots, Ab_0, b_0] \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_1' & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n-1}' & \dots & a_1' & 1 \end{bmatrix} \right\}^{-1}$$

ここで、 $\det(pI - A) = p^n + a_1'p^{n-1} + \dots + a_n'$ とすると、

$$\hat{A} = SAS^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n' & -a_{n-1}' & \dots & -a_1' \end{bmatrix},$$

$$\text{および } \hat{b}_0 = Sb_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

したがって、

$$\begin{aligned} \text{adj}(pI - \hat{A}d)\hat{b}_0 &= [d^{n-1}, d^{n-2}p, \dots, p^{n-1}]^T \\ &= H[1, p, \dots, p^{n-1}]^T \end{aligned}$$

H は付録で定義された $R[d_0]$ 上のユニモデュラ行列である。また、補題3より

$$\begin{aligned} \det(pI - Ad - b_0 k^T) &= \det(pI - Ad) - k^T \text{adj}(pI - Ad)b_0 \\ &= \det(pI - Ad) - k^T S^{-1} \text{adj}(pI - \hat{A}d)\hat{b}_0 \end{aligned}$$

だから、

$$k^T = [a_n - \alpha_n, \dots, a_1 - \alpha_1] H^{-1} S$$

ただし、 $\det(pI - Ad) = p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n$ とすれば、

$$\begin{aligned} \det(pI - Ad - b_0 k^T) &= p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + \alpha_n \\ &= \prod_{i=1}^n (p - \beta_i) \end{aligned}$$

となる。 S は $[A, b_0]$ がユニモデュラであるから、 $R[d_1, \dots, d_s]$ 上の行列となり、また、 H は $R[d_0]$ 上でユニモデュラだから、 k は $R[d_1, \dots, d_s, d, d_0]$ 上の行列となる。したがって、任意の実軸対称複素数集合 $\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ に対して極配置可能となる。

なお、オペレータ d_0 で表わされる分布むだ時間要素は、サンプル値制御系で知られている零次ホールド回路と同一のインパルス応答をもっている。

この結果の系(5)への拡張は容易で、極配置可能条件は定理1と同様のものになることは自明であろう。

6. あとがき

純むだ時間および分布むだ時間が入力と状態に含まれる多変数むだ時間系の極配置問題について検討した。極配置が可能なための十分条件を求め、フィードバック行列を求める方法を示した。また、極配置が可能な系の構造について検討し、2種類の構造を報告した。フィードバック行列 K には対象の系のむだ時間を打ち消すようなむだ時間要素が含まれる。

むだ時間系の極配置問題は奥深く、その程度も A, B, K それぞれの行列に含まれるむだ時間要素の種類によって異なる。本稿で得られた結果は十分条件であり、今後さらにその条件を緩和することが必要である。Kamenの結果⁴⁾を見てもわかるように、分布むだ時間要素が含まれる場合、試行錯誤的でなく直接的にチェックできる必要十分条件を求めることはほとんど不可能といえよう。これは p を含む各オペレータ間の

R 上での代数的独立性が失われることに起因する^{4), 12)}.

A, B, K がただ一つの純むだ時間オペレータで表現できる系, すなわち, むだ時間が $h > 0$ またはその整数倍であるような系については Morse⁷⁾ や Sontag^{4), 8)} により必要十分条件が得られており, これに対応した K を求めるアルゴリズムの開発を行うことも今後の研究課題の一つであろう.

なお, 定理1の条件2) $\text{rank}[A_0, B_0] = n$ は, A, B, K に純むだ時間要素だけが含まれる場合は必要条件にもなることがわかっている¹²⁾. 条件2) は (A_0, B_0) に対応する系が可制御であるという条件である.

むだ時間系の可制御性の定義は種々提案されている(たとえば, 文献6) およびその中の参考文献). これらの可制御性と極配置問題との関連づけを行うことも, 今後の重要な研究課題である.

参考文献

- 1) S. Barnett: Introduction to Mathematical Control Theory, Clarendon Press, Oxford (1975)
- 2) C.T. Chen: Introduction to Linear System Theory, Holt, Rinehart and Winston, Inc., New York (1970)
- 3) M. Heymann: Comments on Pole Assignment in Multi-Input Controllable Linear Systems, IEEE Trans. on Automatic Control, **AC-13-6**, 747/748 (1968)
- 4) E.W. Kamen: An Operator Theory of Linear Functional Differential Equations, J. Diff. Eqs., **27-2**, 274/297 (1978)
- 5) E.W. Kamen: Private Communication (1977)
- 6) A. Manitius and R. Triggiani: Function Space Controllability of Linear Retarded Systems; A Derivation from Abstract Operator Conditions, SIAM J. on Contr. and Optim., **16-4**, 599/645 (1978)
- 7) A.S. Morse: Ring Models for Delay-Differential Systems, Automatica, **12-5**, 529/531 (1976)
- 8) E. Sontag: Linear Systems over Commutative Rings; A Survey, Ricerche Automatica, **7**, 1/34 (1976)
- 9) J.C. Willems and S.K. Mitter: Controllability, Observability, Pole Allocation and State Reconstruction, IEEE Trans. on Automatic Control, **AC-**

16-6, 582/595 (1971)

- 10) W.M. Wonham: On Pole Assignment in Multi-Input Controllable Linear Systems, IEEE Trans. on Automatic Control, **AC-12-6**, 660/665 (1967)
- 11) W.M. Wonham: Linear Multivariable Control, A Geometric Approach, Springer-Verlag, Berlin (1974)
- 12) K. Yamashita: Ph. D. Thesis, Imperial College, Univ. of London (1978)

《付 録》

定理3の証明

$[A_0, b_0]$ が最大階数をもつから (A_0, b_0) を可制御標準形に変換する R 上の行列が存在する. したがって, 一般性を失うことなく, (A_0, b_0) がすでに可制御標準形であると仮定できるから

$$\text{adj}(pI - A_0 d) b_0 = [d^{n-1}, d^{n-2}p, \dots, p^{n-1}]^T$$

となり, さらに,

$$\begin{aligned} \text{adj}(pI - \hat{A}) \hat{b}_0 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ r_{21} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{n1} & \cdots & r_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ p \\ \vdots \\ p^{n-1} \end{bmatrix} \\ &\triangleq G[1, p, \dots, p^{n-1}]^T \end{aligned}$$

ここで, $h_{ij} = (-d_0)^{j-i} nC_{n-j}$, $nC_m = \frac{n!}{(n-m)!m!}$

を得る. 上の展開で p および d_0 の定義から

$$d_0 p: f(t) \rightarrow \{f(t) - f(t-a)\},$$

すなわち, $d_0 p = 1 - d$

なる関係を用いた. したがって, $\det(pI - A_0 d) = p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n$ とすると, 補題3より

$$k^T = [a_n - \alpha_n, \dots, a_1 - \alpha_1] H^{-1}$$

に対して

$$\begin{aligned} \det(pI - A_0 d - b_0 k^T) &= \det(pI - A_0 d) - k^T \text{adj}(pI - A_0 d) b_0 \\ &= \prod_{i=1}^n (p - \beta_i) \end{aligned}$$

となる. H は $R[d_0]$ 上のユニモデュラ行列だから, $H^{-1} \in R^{n \times n}[d_0]$ で $k \in R^{n \times n}[d, d_0]$ となり, 任意の $\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ に対して, 極配置可能となる. ■