Min-Max 計画法—理論と計算方法[†]

相 吉 英太郎*・志 水 清 孝*

Min-Max Programming—Theory and Algorithm

Eitaro ARYOSHI* and Kiyotaka SHIMIZU*

This paper is concerned with a min-max problem for decision-making under uncertainty that excludes even stochastic information. A min-max solution is sought for the problem that a function to be maximized with respect to the maximizer's variables is to be minimized with respect to the minimizer's variables. The solution is rational in the sense that the minimizer makes an optimal decision against the worst case that might be chosen by the opponent (the maximizer).

First we present a necessary condition and a computational method for the min-max problem in which the minimizer and the maximizer are constrained separately. This condition is stated in a form like that of Kuhn-Tucker's Theorem and is closely related to the subgradients of a Lagrangian. The proposed computational method is based on a relaxation procedure. We next study the min-max problem of the minimizer and the maximizer subject to unseparated constraint. It is shown that the results obtained for the separated case can be applied for the unseparated one by the use of duality theory.

1. はじめに

この論文では、ある一部の変数に関して最大化した関数を残りの変数に関して最小化する min-max 問題を研究する。min-max 問題の解（以後これを min-max 解とよぶ）はゲーム理論で重要な役割をもっており、とくに確率的な情報すら使うことができない不確実下での計画および制御のための合理的な解概念の一つである。

min-max 問題の研究は、Danskin^{3), 4)} と Bram²⁾ が方向導関数を用いた不等式の形で min-max 解の必要

条件を与えたのが最初である。最近、Schmitendorf¹¹⁾ により、等式の形でその必要十分条件が与えられたが、そこでは方向導関数や Bram の不等式条件との関係が明らかにされておらず、また min-max 問題を解く計算方法に関しても何も述べられていない。

ところで、従来研究の対象となった min-max 問題は、最小化変数と最大化変数の制約式が互いに分離した（最大化変数の制約集合が最小化変数の値に依存しない）ものが大部分であり、最小化変数と最大化変数の制約式が非分離の問題に関する研究はほとんどない。この論文では、まずはじめに制約式が分離した従来の min-max 問題に対して、min-max 解の必要条件と計算方法を与える。min-max 解条件は Schmitendorf とは異なる方法で Bram の不等式条件から導き、Bram の条件が方向導関数を用いた条件であるのに対し、われわれの条件が Lagrange 関数の重勾配を用いた最適性条件であることを説明する。また計算方法に関しては、最大化変数をインデックス化した最大成分最小化形の min-max 問題⁵⁾ や最大化変数の集合が有限個の要素からなる問題⁷⁾ に対してのみ、勾配法に準ずる計算方法が与えられているが、最大化変数の集合が無限集合の場合にも適用でき、しかも理論的な裏付けのある解法はまだ開発されていない。そこで min-max 解条件と密接な関係がある緩和法に基づく方法を与える。つぎに、双対理論を利用すれば、これらの結果が、最小化変数と最大化変数の制約式が非分離の一般的な min-max 問題にも応用できることを示す。最後に簡単な数値例を与える。

2. min-max 問題の定式化

制約条件 $G(x, y) \leq 0$ のもとでの $f(x, y)$ の $y \in Y$ に関する最大値関数 $\phi(x) = \max_y f(x, y)$ を、 $x \in X$ に関して最小化する問題を min-max 問題とよびつぎのように定式化する。

$$\min_x \max_{y \in Y} f(x, y) \quad (1. a)$$

[†] 第 4 回システムシンポジウムで発表（昭 53・7）

* 慶応義塾大学工学部 横浜市港北区日吉町 3-14-1

* Faculty of Engineering, Keio University, Yokohama
(Received January 10, 1979)

$$\text{subj. to } G(x, y) \leq 0 \quad (1. b)$$

$$x \in X = \{x | g(x) \leq 0\} \quad (1. c)$$

あるいは 2-レベル形式で

$$\min_x f(x, g(x)) \quad (2. a)$$

$$\text{subj. to } x \in X = \{x | g(x) \leq 0\} \quad (2. b)$$

$$x \in V = \{x | \text{There exists } y \text{ such that } G(x, y) \leq 0\} \quad (2. c)$$

$$f(x, g(x)) = \max_y f(x, y) \quad (2. d)$$

$$\text{subj. to } G(x, y) \leq 0 \quad (2. e)$$

$$y \in Y \quad (2. f)$$

ここで $x \in R^n$, y はベクトル変数で, X, Y は x の固有の制約集合であり, $g \in R^m$ は x の制約関数, $G \in R^r$ は変数 x, y に共通の制約関数である. $g(x)$ は x が与えられたもとの y に関する最大化問題(2. d)~(2. f)の最適解であり, このような $(x, g(x))$ に対して

$$G(x, g(x)) \leq 0$$

が成り立つことは自明である. また(2. c)式は制約条件 $G \leq 0$ が y に関して許容であるための x の条件であり, また $X \cap V \neq \emptyset$ (空集合)とする. さらに任意の $x \in X \cap V$ に対して下位問題の制約条件(2. e)かつ(2. f)は許容であると仮定する. 以後問題(1)または(2)の最適解 x^* を min-max 解とよぶことにする.

問題(2)はたとえばつぎのような状況を描いている. サイド2のアクティビティつまり戦略 y は, 制約式(2. e)を介してサイド1のとり戦略 x によって限定される. サイド2は制約式(2. e, f)のもとで y に関して自己の目的関数を最適化するような決定を行うかもしれないが, サイド1はサイド2の戦略についてなにも情報がないので, 自己にとって最悪の戦略をとってくるものとして min-max 戦略をとらざるをえない. このような問題は兵器配分に関する軍事戦略モデル¹⁾や生産-市場競争における意思決定問題などにみられる.

制約条件 $G \leq 0$ が存在しない場合, すなわち変数 x および y の制約式が互いに分離している場合, 問題(1)または(2)はおおのつぎようになる.

$$\min_{x, y \in Y} \max f(x, y) \quad (3. a)$$

$$\text{subj. to } x \in X = \{x | g(x) \leq 0\} \quad (3. b)$$

または

$$\min_x f(x, g(x)) \quad (4. a)$$

$$\text{subj. to } x \in X = \{x | g(x) \leq 0\} \quad (4. b)$$

$$f(x, g(x)) = \max_y f(x, y) \quad (4. c)$$

$$\text{subj. to } y \in Y \quad (4. d)$$

以後問題(1)または(2)を制約式非分離形 min-max 問題, 問題(3)または(4)を制約式分離形 min-max 問題とよぶことにする.

3. min-max 解の必要条件

本節では, 制約式非分離形 min-max 問題(2)の解析に先立ち, その基礎となる分離形 min-max 問題(4)の解条件と解法を考える.

つぎの仮定を置く.

(i) 関数 f は x および y に関し, g は x に関し微分可能で, 偏導関数 $\partial f / \partial x_i, \partial g / \partial x_i, i=1, \dots, n$ は連続である. ただし $x=(x_1, \dots, x_n)^T$ である.

(ii) 集合 Y は非空コンパクトである.

仮定(i), (ii)のもとで任意の x に対し最大化の解集合

$$\hat{Y}(x) = \{g(x) | g(x) \text{ maximizes } f(x, y) \text{ over } Y\} \quad (5)$$

は非空コンパクトであり, 関数

$$\phi(x) = \max_{y \in Y} f(x, y) = f(x, g(x)) \quad (6)$$

がすべての x に対し定義される. このとき関数 $\phi(x)$ を集合 X 上で最小にする解が min-max 解である.

まず, Danskin と Bram の定理を示す.

《定理1》(Danskin^{3), 4)} 仮定(i), (ii)のもとでは, 任意の点 $x \in R^n$ で任意の方向 s への関数 ϕ の方向微係数 $D\phi(x; s)$ が存在し, つぎの式で与えられる.

$$D\phi(x; s) = \max_{y \in \hat{Y}(x)} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} s \quad (7)$$

《定理2》(Bram²⁾) 仮定(i), (ii)が成り立ち, 制約関数 g は x^* で Kuhn-Tucker 制約想定を満たすものとする. このとき x^* が min-max 問題(4)の解であるための必要条件は, つぎの式を満たすようなベクトル λ が存在することである.

$$D\phi(x^*; s) + \lambda^T \frac{\partial g(x^*)}{\partial x} s \geq 0 \quad \text{for all } s \in R^n \quad (8. a)$$

$$g(x^*) \leq 0, \quad \lambda^T g(x^*) = 0, \quad \lambda \geq 0 \quad (8. b)$$

不等式条件式(8. a)を, それと等価な等式条件式に変形するためにつぎの補題を用意する.

[補題] 閉集合 $A \subset R^n$ に対し

$$\max_{a \in A} a^T s \geq 0 \quad \text{for all } s \in R^n \quad (9)$$

が成り立つならば,

$$\sum_{i=1}^t \mu_i \mathbf{a}^i = \mathbf{0} \quad (10)$$

であるような整数 t , $1 \leq t \leq n+1$, ベクトル $\mathbf{a}^i \in A$, $i=1, \dots, t$, スカラー $\mu_i \geq 0$, $i=1, \dots, t$, $\sum_{i=1}^t \mu_i = 1$ が存在する。

(証明) A の凸包を $[A]$ で表わし, $\mathbf{0} \notin [A]$ と仮定する。このとき, 分離定理⁹⁾より $[A]$ と $\mathbf{0}$ を分離する超平面 $\{\mathbf{x} | \mathbf{c}^T \mathbf{x} = \alpha, \alpha < 0, \mathbf{c} \neq \mathbf{0}\}$ が存在し,

$$\mathbf{c}^T \mathbf{a} < \alpha \quad \text{for all } \mathbf{a} \in [A]$$

が成り立つ。ベクトル $\mathbf{s}$ として $\mathbf{c}$ を考えると,

$$\max_{\mathbf{a} \in A} \mathbf{a}^T \mathbf{s} \leq \max_{\mathbf{a} \in [A]} \mathbf{a}^T \mathbf{s} < \alpha < 0$$

となり, 前提条件に矛盾する。すなわち(9)式が成り立つならば $\mathbf{0} \in [A]$ である。それゆえ $\mathbf{0}$ は A の点の凸結合で表わされ, しかも Caratheodory の定理⁹⁾よりそれはたかだか $n+1$ 個の点の凸結合である。■

この補題を条件式(8. a)に適用すると, Schmitendorf¹¹⁾ とは多少異なった形の min-max 解の必要条件が得られる。また定理の導き方も Schmitendorf と較べて簡単であり, Lagrange 関数の方向導関数との密接な関係が明らかになる。

《定理3》 仮定(i), (ii) が成り立ち, 制約関数 g は $\mathbf{x}^*$ で Kuhn-Tucker 制約想定を満たすものとする。このとき, $\mathbf{x}^*$ が min-max 問題(4)の解であるための必要条件是, つぎの式を満たすような整数 t , $1 \leq t \leq n+1$, ベクトル $\mathbf{y}^i \in \hat{Y}(\mathbf{x}^*)$, $i=1, \dots, t$, スカラー $\mu_i \geq 0$, $i=1, \dots, t$, $\sum_{i=1}^t \mu_i = 1$ およびベクトル λ が存在することである。

$$\sum_{i=1}^t \mu_i \frac{\partial f(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^i)}{\partial \mathbf{x}} + \lambda^T \frac{\partial g(\mathbf{x}^*)}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{0} \quad (11. a)$$

$$g(\mathbf{x}^*) \leq 0, \quad \lambda^T g(\mathbf{x}^*) = 0, \quad \lambda \geq \mathbf{0} \quad (11. b)$$

(証明) すべてのベクトル $\mathbf{y} \in \hat{Y}(\mathbf{x}^*)$ に対応したベクトル $\partial f(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) / \partial \mathbf{x}$ の集合を W とすると, 定理1より ϕ の $\mathbf{x}^*$ における方向微係数は

$$D\phi(\mathbf{x}^*; \mathbf{s}) = \max_{\mathbf{w} \in W} \mathbf{w}^T \mathbf{s}$$

と表わされ, これを用いて(8. a)式を書き換えると,

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{w} \in W} \mathbf{w}^T \mathbf{s} + \lambda^T \frac{\partial g(\mathbf{x}^*)}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{s} \\ = \max_{\mathbf{w} \in W} \left(\mathbf{w} + \lambda^T \frac{\partial g(\mathbf{x}^*)}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \mathbf{s} \geq 0 \quad \text{for all } \mathbf{s} \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

となる。 $\partial f(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) / \partial \mathbf{x}$ の連続性と $\hat{Y}(\mathbf{x}^*)$ のコンパクト性より W もコンパクトだから, すべての $\mathbf{w} \in W$ に対応した $\left(\mathbf{w} + \lambda^T \frac{\partial g(\mathbf{x}^*)}{\partial \mathbf{x}} \right)$ の集合もコンパクトになり, これを A とみなすと補題が適用できて, $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ より

$$\sum_{i=1}^t \mu_i \left(\mathbf{w}^i + \lambda^T \frac{\partial g(\mathbf{x}^*)}{\partial \mathbf{x}} \right) = \mathbf{0}$$

となるような整数 t , $1 \leq t \leq n+1$, ベクトル $\mathbf{w}^i \in W$, $i=1, \dots, t$, スカラー $\mu_i \geq 0$, $i=1, \dots, t$, $\sum_{i=1}^t \mu_i = 1$ が存在することがわかる。すなわち

$$\sum_{i=1}^t \mu_i \frac{\partial f(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^i)}{\partial \mathbf{x}} + \lambda^T \frac{\partial g(\mathbf{x}^*)}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{0}$$

が得られる。これは(11. a)式である。■

つぎに, 条件式(11)の意味を考えよう。その準備として

(iii) 任意の $\mathbf{y} \in \hat{Y}$ に対し $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ は $\mathbf{x}$ に関し凸である。

と仮定し, まずつぎの定理を示す。

《定理4》 仮定(i)~(iii) が成り立つとき, 関数 $\phi(\mathbf{x}) = \max_{\mathbf{y} \in \hat{Y}} f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ は $\mathbb{R}^n$ 上で凸であり, 任意の $\mathbf{y} \in \hat{Y}(\mathbf{x})$ に対し $\partial f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) / \partial \mathbf{x}$ は点 $\mathbf{x}$ における関数 $\phi(\mathbf{x})$ の亜勾配である。

(証明) (前半) 任意の $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2 \in \mathbb{R}^n$ に対し,

$$\begin{aligned} & \phi((1-\theta)\mathbf{x}^1 + \theta\mathbf{x}^2) \\ &= \max_{\mathbf{y} \in \hat{Y}} f((1-\theta)\mathbf{x}^1 + \theta\mathbf{x}^2, \mathbf{y}) \\ &= f((1-\theta)\mathbf{x}^1 + \theta\mathbf{x}^2, \hat{\mathbf{y}}((1-\theta)\mathbf{x}^1 + \theta\mathbf{x}^2)) \end{aligned}$$

($\mathbf{x}$ に関する f の凸性より)

$$\begin{aligned} & \leq (1-\theta)f(\mathbf{x}^1, \hat{\mathbf{y}}((1-\theta)\mathbf{x}^1 + \theta\mathbf{x}^2)) \\ & \quad + \theta f(\mathbf{x}^2, \hat{\mathbf{y}}((1-\theta)\mathbf{x}^1 + \theta\mathbf{x}^2)) \\ & \leq (1-\theta)f(\mathbf{x}^1, \hat{\mathbf{y}}(\mathbf{x}^1)) + \theta f(\mathbf{x}^2, \hat{\mathbf{y}}(\mathbf{x}^2)) \\ & = (1-\theta)\phi(\mathbf{x}^1) + \theta\phi(\mathbf{x}^2) \end{aligned}$$

ただし θ は $0 \leq \theta \leq 1$ なる任意の定数である。ゆえに $\phi(\mathbf{x})$ は凸関数である。

(後半) 関数 $\phi(\mathbf{x})$ は $\mathbb{R}^n$ 内のすべての $\mathbf{x}$ に対し有限の値を取り, かつ $\mathbb{R}^n$ 上で凸であることから, 任意の点 $\mathbf{x}$ において ϕ のグラフの支持超平面が存在する。一方, $\mathbf{x}$ に関する f の凸性より任意の $\hat{\mathbf{y}} \in \hat{Y}(\mathbf{x})$ に対し

$$f(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{y}}) \geq f(\bar{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}) + \frac{\partial f(\bar{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}})}{\partial \bar{\mathbf{x}}} (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) \quad \text{for all } \mathbf{x}$$

が成り立つ。任意の $\hat{\mathbf{y}} \in \hat{Y}(\bar{\mathbf{x}})$ に対し $f(\bar{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}) = \phi(\bar{\mathbf{x}})$, $\phi(\mathbf{x}) = \max_{\mathbf{y} \in \hat{Y}} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq f(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{y}})$ であることから, 上の関係式より

$$\phi(\mathbf{x}) \geq \phi(\bar{\mathbf{x}}) + \frac{\partial f(\bar{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}})}{\partial \bar{\mathbf{x}}} (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) \quad \text{for all } \mathbf{x}$$

が成り立つ。したがって任意の $\hat{\mathbf{y}} \in \hat{Y}(\bar{\mathbf{x}})$ に対し $\frac{\partial f(\bar{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}})}{\partial \bar{\mathbf{x}}}$ は ϕ のグラフの点 $\bar{\mathbf{x}}$ における支持超平面の傾き, すなわち $\bar{\mathbf{x}}$ における亜勾配である。■

ここで, 問題 $\min_{\mathbf{x} \in X} \phi(\mathbf{x})$ に対する Lagrange 関数を

$$L(\mathbf{x}, \lambda) = \phi(\mathbf{x}) + \lambda^T g(\mathbf{x})$$

とし, さらにつぎの仮定をおく.

(iv) $g(x)$ は x に関し凸である.

定理4より, 仮定(Ⅲ), (iv)のもとで関数 L は x に関して凸になり, 任意の $y \in \hat{Y}(x)$ に対し $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \lambda \tau \frac{\partial g(x)}{\partial x}$ は x における L の亜勾配となる. したがって, $y^i \in \hat{Y}(x)$, $i=1, \dots, t$ に対応した t 個の亜勾配の凸結合を考えると,

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^t \mu_i \left\{ \frac{\partial f(x, y^i)}{\partial x} + \lambda \tau \frac{\partial g(x)}{\partial x} \right\} \\ &= \sum_{i=1}^t \mu_i \frac{\partial f(x, y^i)}{\partial x} + \lambda \tau \frac{\partial g(x)}{\partial x}, \quad \sum_{i=1}^t \mu_i = 1 \end{aligned}$$

となる. さらに, 凸関数の亜勾配の集合は凸であることが知られているから⁸⁾, 条件式(11. a)は x^* における L の亜勾配の凸結合でゼロベクトルが表わされること, すなわち亜勾配の集合がゼロベクトルを含むことを示している. これは微分不可能な関数 L に対する, x^* における亜勾配を用いた停留条件にはかならない.

ところで, これらの条件は min-max 解を求める数値計算にはほとんど役立たない. そこでつぎに min-max 問題を解く計算方法を与える.

4. 緩和法による min-max 計画法

f の連続性の仮定にもかかわらず, 関数 $\phi(x) = \max_{y \in Y} f(x, y)$ は x に関して必ずしも微分可能ではなく, しかも y が無限集合の場合には(7)式の方向微係数すら陽に与えることができず, 方向微係数を用いた勾配法の適用も困難である. そこで min-max 問題を解くために緩和法^{6), 12)}を適用する. 緩和法は無限個の不等式制約条件をもつ問題に対して有効な手法である. そこで y に関して最大値を求めるという操作を無限個の不等式に置き換え, これらを制約条件とする数理計画問題に問題(3)を等価変換する. そのためにまず, 新しい変数 σ を導入することにより, 問題(3)をつぎのような線形目的関数をもつ問題に変換する.

$$\min_{(x, \sigma)} \quad (12. a)$$

$$\text{subj. to } \max_{y \in Y} f(x, y) \leq \sigma \quad (12. b)$$

$$x \in X = \{x \mid g(x) \leq 0\} \quad (12. c)$$

さらに制約式(12. b)は明らかに

$$\max_{y \in Y} f(x, y) \leq \sigma \iff f(x, y) \leq \sigma \text{ for all } y \in Y$$

であるから, 結局 min-max 問題(3)はつぎのようになる.

$$\min_{(x, \sigma)} \quad (13. a)$$

$$\text{subj. to } f(x, y) \leq \sigma \text{ for all } y \in Y \quad (13. b)$$

$$x \in X = \{x \mid g(x) \leq 0\} \quad (13. c)$$

ここで集合 Y が無限集合ならば, (13. b)式は無限個の制約式からなる. またこの式より σ は x が固定されたときの y に関する f の上界であり, (12. b)式を満たす $(x, \sigma) \in R^{n+1}$ は関数 $\phi(x) = \max_{y \in Y} f(x, y)$ のエピグラフである.

問題(13)に緩和法を適用するために, 制約式(13. b)を k 個の制約式に緩和したつぎの問題を考える.

$$\min_{(x, \sigma)} \quad (14. a)$$

$$\text{subj. to } f(x, y^i) \leq \sigma \text{ for } y^i \in Y, i=1, \dots, k \quad (14. b)$$

$$x \in X = \{x \mid g(x) \leq 0\} \quad (14. c)$$

緩和問題(14)の最適解を (x^k, σ^k) とするとき, (x^k, σ^k) が非緩和問題(13)の許容解ならば, (x^k, σ^k) は非緩和問題(13)の最適解であり, x^k は元の min-max 問題(3)あるいは(4)の min-max 解となる. (x^k, σ^k) が問題(13)の許容解でないならば, 無限個の制約式(13. b)のうち少なくとも一つを侵害する. このとき, この侵害された制約式のうち最も侵害されたものを見つけ, これを緩和問題の制約条件(14. b)に付加し, $k=k+1$ としてあらためて問題(14)を解く. このような過程を繰り返すのが緩和法の手続きである.

緩和問題(14)の最適解 (x^k, σ^k) が非緩和問題(13)の許容解であるか否かの判定と, (x^k, σ^k) が最も侵害する制約式の生成は, $x = x^k$ に対する最大化問題 $\max_{y \in Y} f(x, y)$ を解くことによりつぎのようにして行われる.

$$(1) \quad \phi(x^k) = \max_{y \in Y} f(x^k, y) \leq \sigma^k \text{ ならば明らかに}$$

$$f(x^k, y) \leq \sigma^k \text{ for all } y \in Y$$

となり, (x^k, σ^k) は無限個の制約式(13. b)に関して許容解となる.

$$(2) \quad \phi(x^k) = \max_{y \in Y} f(x^k, y) > \sigma^k \text{ ならば, } (x^k, \sigma^k) \text{ は制約式}$$

$$f(x, y^{k+1}) \leq \sigma$$

を最も侵害する. ただし y^{k+1} は最大化問題 $\max_{y \in Y} f(x^k, y)$ の解である. したがって, この制約式が緩和問題の k 個の制約式(14. b)に付加される.

このようなアルゴリズムは, 曲面 $f(x, y^i) = \sigma$ を逐次付加し, 制約式(12. b)に関して非許容な領域の一部をカットしながら関数 $\phi(x) = \max_{y \in Y} f(x, y)$ のエピグラフを近似していく非線形切除平面法とみなすこともできる.

min-max 解条件との関係

緩和問題(14)の最適解 (x^k, σ^k) が非緩和問題(13)の

許容解になり計算が終了したとき, $\mathbf{x}^k$ が min-max 解であるための条件式(11)を満たすことを示す. 緩和問題(14)に対する Lagrange 関数をつぎのように定義する.

$$L(\mathbf{x}, \sigma, \mu, \lambda) = \sigma + \sum_{i=1}^k \mu_i (f(\mathbf{x}, \mathbf{y}^i) - \sigma) + \lambda^T \mathbf{g}(\mathbf{x})$$

ただし $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_k)^T$ である. このとき $(\mathbf{x}^k, \sigma^k)$ が問題(14)の最適解であるための Kuhn-Tucker 条件は,

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} = 1 - \sum_{i=1}^k \mu_i = 0 \quad (15. a)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} = \sum_{i=1}^k \mu_i \frac{\partial f(\mathbf{x}^k, \mathbf{y}^i)}{\partial \mathbf{x}} + \lambda^T \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x}^k)}{\partial \mathbf{x}} = 0 \quad (15. b)$$

$$\mu_i (f(\mathbf{x}^k, \mathbf{y}^i) - \sigma^k) = 0, \quad f(\mathbf{x}^k, \mathbf{y}^i) \leq \sigma^k, \quad \mu_i \geq 0 \quad i=1, \dots, k \quad (15. c)$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}^k) \leq 0, \quad \lambda^T \mathbf{g}(\mathbf{x}^k) \leq 0 \quad \lambda \geq 0 \quad (15. d)$$

を満たすような Lagrange 乗数 $\mu_i, i=1, \dots, k, \lambda \in R^m$ が存在することである. ここでつぎのようにおく.

$$I_a = \{i | f(\mathbf{x}^k, \mathbf{y}^i) = \sigma^k\}, \quad k_a; I_a \text{ の要素の数}$$

$$I_a = \{i | f(\mathbf{x}^k, \mathbf{y}^i) < \sigma^k\}, \quad k_a'; I_a \text{ の要素の数}$$

$$J_a = \{j | g_j(\mathbf{x}^k) = 0\}, \quad k_a'; J_a \text{ の要素の数}$$

$$J_a = \{j | g_j(\mathbf{x}^k) < 0\}, \quad k_a'; J_a \text{ の要素の数}$$

まず $\mu_i = 0, i \in I_a$ および $\lambda_j = 0, j \in J_a$ である.

さらに $k_a + k_a' > n+1$ のとき, $i \in I_a$ および $j \in J_a$ に対応した $(k_a + k_a')$ 個の活性な制約式の, 点 $(\mathbf{x}^k, \sigma^k)$ における勾配ベクトルのうち互いに 1 次独立なものを考えると, $(\mathbf{x}, \sigma) \in R^{n+1}$ だからその個数はたかだか $n+1$ 個である. したがって, 活性な制約式に対応する Lagrange 乗数 $\mu_i, i \in I_a, \lambda_j, j \in J_a$ のうち少なくとも $k_a + k_a' - (n+1)$ 個をさらにゼロとおくことができ, 1 次従属な勾配ベクトル $\partial f(\mathbf{x}^k, \mathbf{y}^i)/\partial \mathbf{x}$ を(15. b)式から除くことができる. 結局 I_a の中から用意しなければならぬ最大個数は, $J_a = \phi$ (空集合) つまり $k_a' = 0$ の場合を考慮するとたかだか $n+1$ 個であるから, (15)式はつぎのように書き換えられる.

$$\sum_{i=1}^t \mu_i = 1 \quad (16. a)$$

$$\sum_{i=1}^t \mu_i \frac{\partial f(\mathbf{x}^k, \mathbf{y}^i)}{\partial \mathbf{x}} + \lambda^T \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x}^k)}{\partial \mathbf{x}} = 0 \quad (16. b)$$

$$f(\mathbf{x}^k, \mathbf{y}^i) = \sigma^k, \quad \mu_i \geq 0, \quad i=1, \dots, t \quad (16. c)$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}^k) \leq 0, \quad \lambda^T \mathbf{g}(\mathbf{x}^k) = 0, \quad \lambda \geq 0 \quad (16. d)$$

$$1 \leq t \leq n+1 \quad (16. e)$$

$1 \leq k_a + k_a' \leq n+1$ のとき $k_a \leq n+1$ だから $t = k_a$ とすれば同様のことがいえる.

ところでイテレーションが終了したとき

$$f(\mathbf{x}^k, \mathbf{y}^i) \leq \max_{\mathbf{y} \in Y} f(\mathbf{x}^k, \mathbf{y}) \leq \sigma^k, \quad i=1, \dots, t$$

であるから, これと(16. c)の第 1 式より

$$f(\mathbf{x}^k, \mathbf{y}^i) = \max_{\mathbf{y} \in Y} f(\mathbf{x}^k, \mathbf{y}), \quad i=1, \dots, t$$

となり, $\mathbf{y}^i \in \hat{Y}(\mathbf{x}^k), i=1, \dots, t$ である. ゆえに $\mathbf{x}^k$ は条件式(11)を満たすことがわかる.

イテレーション過程

ステップ 1 任意の初期点 $\mathbf{y}^1 \in Y$ を選び $k=1$ とする.

ステップ 2 緩和問題

$$\min_{(\mathbf{x}, \sigma)} \sigma \quad (17. a)$$

$$\text{subj. to } f(\mathbf{x}, \mathbf{y}^i) \leq \sigma, \quad i=1, \dots, k \quad (17. b)$$

$$\mathbf{x} \in X \quad (17. c)$$

を解き, 最適解 $(\mathbf{x}^k, \sigma^k)$ を求める.

ステップ 3 $\mathbf{x} = \mathbf{x}^k$ に対応した最大化問題

$$\max_{\mathbf{y} \in Y} f(\mathbf{x}^k, \mathbf{y}) \quad (18)$$

を解き, 最適解 $\mathbf{y}^{k+1} = \hat{\mathbf{y}}(\mathbf{x}^k)$, 最大値 $\phi(\mathbf{x}^k) = f(\mathbf{x}^k, \hat{\mathbf{y}}(\mathbf{x}^k))$ を求める.

ステップ 4 $\phi(\mathbf{x}^k) \leq \sigma^k + \varepsilon$ ならばイテレーションを終了し, $\mathbf{x}^k$ を問題(3)または(4)の min-max 解とする. $\phi(\mathbf{x}^k) > \sigma^k + \varepsilon$ ならば $k = k+1$ としてステップ 2 へもどる. ε はあらかじめ与えられた十分小さな正数である.

任意の正定数 ε に対し, 上のアルゴリズムが有限回のイテレーションで終了することを, 文献 6) の定理 2.5 と同様の手法で示すことができる.

《定理 5》 仮定(i), (ii)が成り立ち, かつ X がコンパクトであるとする. このとき任意に与えられた正定数 ε に対し, 緩和法によるアルゴリズムは有限回のイテレーションで終了する.

(証明) 一連の緩和問題(17)を解いて得られる点列 $(\mathbf{x}^k, \sigma^k)$ は, $\{\mathbf{x}^k\}$ がコンパクト集合 X 内の点列であることと, $\{\sigma^k\}$ が上に有界な非減少数列であることから, ある点 $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\sigma})$ に収束する部分点列をもち, さらにこの部分点列の適当な部分点列 $\{(\mathbf{x}^{k_i}, \sigma^{k_i})\}$ を考えることによって, Y のコンパクト性より, これに対応して問題(18)より生成される $\mathbf{y}^{k+1}$ の部分点列 $\{\mathbf{y}^{k_i+1}\}$ がある点 $\bar{\mathbf{y}} \in Y$ に収束することを保証できる. $k^{i+1} \geq k^i + 1$ だから k^{i+1} 番目のイテレーションの緩和問題には制約式

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}^{k_i+1}) \leq \sigma$$

が存在し, 解 $(\mathbf{x}^{k_i+1}, \sigma^{k_i+1})$ に対し

$$f(\mathbf{x}^{k_i+1}, \mathbf{y}^{k_i+1}) \leq \sigma^{k_i+1}$$

が成り立つ. $k \rightarrow \infty$ のとき $\mathbf{x}^{k_i+1} \rightarrow \bar{\mathbf{x}}, \sigma^{k_i+1} \rightarrow \bar{\sigma}, \mathbf{y}^{k_i+1} \rightarrow \bar{\mathbf{y}}$ であることと, f の連続性より

$$f(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}) \leq \bar{\sigma} \quad (19)$$

が成り立つ。

ところで文献 10) の定理 1.5 より, 点対集合写像 $\hat{Y}(x) = \{\hat{y}(x) | f(x, \hat{y}(x)) = \max_{y \in Y} f(x, y)\}$ は上半連続であるから

$$\hat{y} \in \hat{Y}(\bar{x})$$

である。したがって

$$\phi(\bar{x}) = \max_{y \in Y} f(\bar{x}, y) = f(\bar{x}, \hat{y}) \quad (20)$$

であり, (19), (20) 式より

$$\phi(\bar{x}) \leq \bar{\sigma}$$

が成り立つ。これと文献 10) の補題 1.2 より関数 $\phi(x)$ が点 $\bar{x} \in X$ で上半連続であることから, 十分大きな k に対し

$$\phi(x^k) \leq \sigma^k + \varepsilon$$

が成り立ち, 有限回のイテレーションで終了する。■

以上の議論は Y が無限集合の場合について行ったが, Y が有限集合の場合についてもそのまま適用される。

5. 制約式非分離形問題への応用

制約式分離形問題(4)に対して得られた結果を制約式非分離形問題(2)に応用することを考える。議論を簡単にするために問題(2)においてつぎの仮定をおく。

(v) $X \subset V$, すなわち任意の $x \in X$ に対し制約条件 $G(x, y) \leq 0$ は y に関し許容である。

さらに, y に関する最大化問題(2. d)~(2. f)に双対性理論を適用するためにつぎの仮定を設ける。

(vi) 任意に固定された x に対し $f(x, y)$ および $G(x, y)$ は y に関しそれぞれ凹および凸関数である。

(vii) 任意に固定された x に対し $G(x, y) < 0$ なる $y \in Y$ が存在する。

(viii) Y は凸集合である。

仮定(vi)~(viii)のもとでは凸計画の双対定理¹²⁾より, 任意に固定された x に対し y に関する最大化問題の双対問題

$$\min_{\nu} h(x, \nu) \quad (21. a)$$

$$\text{subj. to } \nu \in D \quad (21. b)$$

に最適解 $\hat{\nu}(x) \geq 0$ が存在し,

$$h(x, \hat{\nu}(x)) = f(x, \hat{y}(x)) \quad (22)$$

となる。ただし h および ν はおのおの双対関数および双対変数とよばれ

$$h(x, \nu) = \max_{y \in Y} [f(x, y) - \nu^T G(x, y)] \quad (23)$$

である。また変数 ν の制約領域 D は

$$D = \{\nu | \nu \geq 0\}$$

$$\text{There exists } \max_{y \in Y} [f(x, y) - \nu^T G(x, y)]$$

で与えられる。もし

(ix) $G(x, y)$ が y に関し連続である。

ならば, 仮定(i)よりすべての $\nu \geq 0$ に対し $f(x, y) - \nu^T G(x, y)$ がすべての $y \in Y$ で連続となり, さらに仮定(ii)が成り立つとき集合 D は

$$D = \{\nu | \nu \geq 0\}$$

で与えられる¹²⁾。

(22)式の関係はすべての $x \in X$ に対しても成り立つから, min-max 問題(2)における y に関する f の最大化を ν に関する h の最小化で置き換えると, min-max 問題はつぎのようになる。

$$\min_x h(x, \hat{\nu}(x)) \quad (24. a)$$

$$\text{subj. to } x \in X = \{x | g(x) \leq 0\} \quad (24. b)$$

$$h(x, \hat{\nu}(x)) = \min_{\nu} h(x, \nu) \quad (24. c)$$

$$\text{subj. to } \nu \in D = \{\nu | \nu \geq 0\} \quad (24. d)$$

さらにこの問題は明らかに

$$\min_{(x, \nu)} h(x, \nu)$$

$$\text{subj. to } x \in X = \{x | g(x) \leq 0\}, \\ \nu \in D = \{\nu | \nu \geq 0\}$$

と等価であり, (23)式により h を具体的に表わすと, 制約式非分離形 min-max 問題はつぎのような制約式分離形 min-max 問題に等価的に変換されることがわかる。

$$\min_{(x, \nu)} \max_{y \in Y} [f(x, y) - \nu^T G(x, y)] \quad (25. a)$$

$$\text{subj. to } x \in X = \{x | g(x) \leq 0\}, \\ \nu \in D = \{\nu | \nu \geq 0\} \quad (25. b)$$

以上により, 問題(25)に3, 4節の理論を適用することによって, 非分離形問題の min-max 解条件およびその計算方法を与えることができる。まず min-max 解条件はつぎのようになる。

《定理 6》 仮定(i), (ii), (v)~(ix)が成り立ち, 制約関数 g は x^* で Kuhn-Tucker 制約想定を満たすものとする。このとき, x^* が制約式非分離形 min-max 問題(2)の解であるための必要条件は, つぎの式を満たすような整数 t , $1 \leq t \leq n+r+1$, ベクトル $y^i \in \hat{Y}(x^*)$, $i=1, \dots, t$, スカラー $\mu_i \geq 0$, $i=1, \dots, t$, $\sum_{i=1}^t \mu_i = 1$ およびベクトル λ, ν が存在することである。

$$\sum_{i=1}^t \mu_i \frac{\partial f(x^*, y^i)}{\partial x} - \nu^T \sum_{i=1}^t \mu_i \frac{\partial G(x^*, y^i)}{\partial x} \\ + \lambda^T \frac{\partial g(x^*)}{\partial x} = 0 \quad (26. a)$$

$$\sum_{i=1}^t \mu_i \mathbf{G}(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^i) \leq 0,$$

$$\mathbf{v}^T \sum_{i=1}^t \mu_i \mathbf{G}(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^i) = 0, \quad \mathbf{v} \geq 0 \quad (26. b)$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}^*) \leq 0, \quad \lambda^T \mathbf{g}(\mathbf{x}^*) = 0, \quad \lambda \geq 0 \quad (26. c)$$

ただし, $\hat{Y}(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y}(\mathbf{x}) | \mathbf{y}(\mathbf{x}) \text{ maximizes } f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \text{ over } \mathbf{y} | \mathbf{y} \in Y, \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq 0\}$ である.

(証明) $\mathbf{x}^*$ に対応する双対問題(21)の最適解を $\mathbf{v}^*$ とすると, $\mathbf{x}^*$ が元の min-max 問題(2)の解であることと, $(\mathbf{x}^*, \mathbf{v}^*)$ が問題(25)の解であることと等価である. したがって問題(25)に対し定理3の結果を適用すると, $(\mathbf{x}^*, \mathbf{v}^*)$ が問題(25)の解であるための必要条件は, $\mathbf{x} \in R^n$, $\mathbf{v} \in R^r$ だから, つぎの式を満たすような整数 t , $1 \leq t \leq n+r+1$, ベクトル $\mathbf{y}^i \in \hat{Y}(\mathbf{x}^*, \mathbf{v}^*)$, $i=1, \dots, t$, スカラー $\mu_i \geq 0$, $i=1, \dots, t$, $\sum_{i=1}^t \mu_i = 1$ およびベクトル λ_1, λ_2 が存在することである.

$$\sum_{i=1}^t \mu_i \left[\frac{\partial f(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^i)}{\partial \mathbf{x}} - \mathbf{v}^{*T} \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^i)}{\partial \mathbf{x}} \right] + \lambda_1^T \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x}^*)}{\partial \mathbf{x}} = 0 \quad (27. a)$$

$$\sum_{i=1}^t \mu_i [-\mathbf{G}(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^i)^T] - \lambda_2^T \mathbf{I} = 0 \quad (27. b)$$

$\mathbf{I}$; $r \times r$ 単位マトリクス

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}^*) \leq 0, \quad \lambda_1^T \mathbf{g}(\mathbf{x}^*) = 0, \quad \lambda_1 \geq 0 \quad (27. c)$$

$$-\mathbf{v}^* \leq 0, \quad -\lambda_2^T \mathbf{v}^* = 0, \quad \lambda_2 \geq 0 \quad (27. d)$$

ただし λ_1, λ_2 はおのおの制約式 $\mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq 0$ と $\mathbf{v} \geq 0$ に対する Lagrange 乗数である. また $\hat{Y}(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ は

$$\hat{Y}(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = \{\mathbf{y}(\mathbf{x}, \mathbf{v}) | \mathbf{y}(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \text{ maximizes } f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \mathbf{v}^T \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \text{ over } Y\}$$

である. (27. b)式と(27. d)の第3,2式より

$$\sum_{i=1}^t \mu_i \mathbf{G}(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^i) \leq 0, \quad \mathbf{v}^{*T} \sum_{i=1}^t \mu_i \mathbf{G}(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^i) = 0 \quad (28)$$

を得る. $\mathbf{v}^*$ を $\mathbf{v}$, λ_1 を λ とみなせば(27. a)式, (27. d)第1式, (28)式, (27. c)式は条件式(26)である. また双対定理より $\hat{Y}(\mathbf{x}^*, \mathbf{v}^*) \equiv \hat{Y}(\mathbf{x}^*)$ であることは明らかである. ■

制約式非分離形問題(2)の解は, 4節とまったく同様に, 問題(25)に対する緩和法の適用によって求めることができる. 以下ではイテレーション過程のみを述べる.

ステップ1 任意の初期点 $\mathbf{y}^1 \in Y$ を選び $k=1$ とする.

ステップ2 緩和問題

$$\min_{(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \sigma)} \sigma \quad (29. a)$$

$$\text{subj. to } f(\mathbf{x}, \mathbf{y}^i) - \mathbf{v}^T \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}^i) \leq \sigma \quad \text{for } \mathbf{y}^i \in Y, \quad i=1, \dots, k \quad (29. b)$$

$$\mathbf{x} \in X = \{\mathbf{x} | \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq 0\},$$

$$\mathbf{v} \in D = \{\mathbf{v} | \mathbf{v} \geq 0\} \quad (29. c)$$

を解き, 最適解 $(\mathbf{x}^k, \mathbf{v}^k, \sigma^k)$ を求める.

ステップ3 $\mathbf{x} = \mathbf{x}^k$, $\mathbf{v} = \mathbf{v}^k$ に対応した最大化問題

$$\max_{\mathbf{y}} [f(\mathbf{x}^k, \mathbf{y}) - \mathbf{v}^{kT} \mathbf{G}(\mathbf{x}^k, \mathbf{y})] \quad (30. a)$$

$$\text{subj. to } \mathbf{y} \in Y \quad (30. b)$$

を解き, 最適解 $\mathbf{y}^{k+1} \equiv \mathbf{y}(\mathbf{x}^k, \mathbf{v}^k)$ および最適値 $h(\mathbf{x}^k, \mathbf{v}^k) \equiv f(\mathbf{x}^k, \mathbf{y}^{k+1}) - \mathbf{v}^{kT} \mathbf{G}(\mathbf{x}^k, \mathbf{y}^{k+1})$ を求める.

ステップ4 もし $h(\mathbf{x}^k, \mathbf{v}^k) \leq \sigma^k + \varepsilon$ ならばイテレーションを終了し, $\mathbf{x}^k$ を問題(1)または(2)の min-max 解とする. $h(\mathbf{x}^k, \mathbf{v}^k) > \sigma^k + \varepsilon$ ならば $k := k+1$ としてステップ2へもどる.

6. 数値例

定理6と緩和法による計算方法を例証するために簡単な数値例を考える. 制約式非分離形問題(2)において

$$f(x, y) = -2x + (x-1)y$$

$$G(x, y) = -x + y$$

$$X = \{x | 0 \leq x \leq 2\}, \quad Y = \{y | 0 \leq y \leq 2\}$$

と置き, 緩和法を適用すると以下ようになる.

まず初期点として $\mathbf{y}^1 = 0$ とする. このときの緩和問題(29)は

$$\begin{aligned} \min_{(x, y, \sigma)} \quad & \sigma \\ \text{subj. to } & x(y-2) \leq \sigma \\ & 0 \leq x \leq 2, \quad y \geq 0 \end{aligned}$$

で, 最適解 $(x^1, y^1, \sigma^1) = (2, 0, -4)$ を得る. これに対応する最大化問題(30)は $\max_{0 \leq y \leq 2} y - 4$ で最適解 $y^2 = 2$, 最適値 $h(x^1, y^1) = 2$ を得る. このとき $h(x^1, y^1) > \sigma^1$ で, (x^1, y^1, σ^1) によって最も侵害される制約式として $(x-2)y - 2 \leq \sigma$ が生成されて上の緩和問題に付加される. あらためてこの緩和問題を解き最適解 $(x^2, y^2, \sigma^2) = (3/2, 1/2, -9/4)$ を得る. これに対応する y の最大化問題の解は $0 \leq y \leq 2$ を満たすすべての y で, その最適値 $h(x^2, y^2) = -9/4$ を得る. このとき $h(x^2, y^2) = \sigma^2$ となり終了判定条件が満たされ, $\mathbf{x}^* = 3/2$ が min-max 解となる. 対応する y の値は $y(x^*) = 3/2$ である. 一方,

$$\frac{\partial f(x^*, y)}{\partial x} = -2 + y, \quad \frac{\partial G(x^*, y)}{\partial x} = -1,$$

$$\hat{Y}(x^*) = \{3/2\}$$

であるから, $t=1$, $y^1 = 3/2$, $\mu_1 = 1$, $\lambda = 0$, $\mathbf{v} = 1/2$ の

とき $x^*=3/2$ は必要条件式(26)を満たすことがわかる。

若干の数値例を検討した結果、緩和法は一見してアルゴリズムからうる印象よりもかなり収束性がよいといえる。本論文では緩和法は最も基本的なものをを用いたが、緩和法自体の効率改善(文献 8)参照)は当然可能である。

7. おわりに

min-max 解は敵対者あるいは外乱の影響を受ける決定問題に対しては重要な解概念の一つであり、min-max 問題を解く計算方法がたびたび必要となる。この論文では前半で、最小化変数と最大化変数の制約式が分離した問題の min-max 解条件を導き、この条件が Lagrange 関数 $L = \max_{y \in Y} f(x, y) + \lambda^T g(x)$ の亜勾配を用いた必要条件であることを指摘し、緩和法に基づく計算方法を与えた。後半では、これらの結果を最小化変数と最大化変数の制約式が非分離のより一般的な min-max 問題に応用した。

参考文献

1) J. Bracken, J.E. Falk and F.A. Miercort: A

- Strategic Weapons Exchange Allocation Model, Operations Research, **25**-6, 968/976 (1977)
- 2) J. Bram: The Lagrange Multiplier Theorem for Max-Min with Several Constraints, J. SIAM Appl. Math., **14**-4, 665/667 (1966)
- 3) J.M. Danskin: The Theory of Max-Min, with Applications, J. SIAM Appl. Math., **14**-4, 641/665 (1966)
- 4) J.M. Danskin: The Theory of Max-Min and Its Application to Weapons Allocation Problems, Springer-Verlag, Berlin (1967)
- 5) V.F. Demjanov: Algorithms for Some Minimax Problems, Journal of Computer and System Sciences, **2**-4, 342/380 (1968)
- 6) A.M. Geoffrion: Generalized Benders Decomposition, J. Optimiz. Theory Appl., **10**-4, 237/260 (1970)
- 7) J.E. Heller and J.B. Cruz, Jr: An Algorithm for Minimax Parameter Optimization, Automatica, **8**-3, 325/335 (1972)
- 8) L.S. Lasdon (志水訳): 大規模システムの最適化理論, 5.2 章, 付録 2, 日刊工業新聞社 (1973)
- 9) O.L. Mangasarian (関根訳): 非線形計画法, 培風館 (1972)
- 10) R. Meyer: The Validity of a Family of Optimization Methods, SIAM J. Control, **8**-1, 41/54 (1970)
- 11) W.E. Schmitendorf: Necessary Conditions and Sufficient Conditions for Static Minmax Problems, J. Math. Anal. and Appl., **57**-3, 683/693 (1977)
- 12) 志水: システム最適化理論, 3.8, 224/225, コロナ社 (1976)