階層分権システムの障壁法による新しい解法

志 水 清 孝*・相 吉 英太郎*

Hierarchical Decentralized System and Its New Solution Method by a Barrier Method

Kiyotaka SHIMIZU* and Eitaro AIYOSHI*

We study on hierarchical optimization of the power-decentralized system, in which a central system and plural regional systems (subsystems) possess their own objective functions. The lower level consists of N regional systems each of which possesses its own decision variable vector, objective function and constraint conditions. The central system in the higher level has a function of coordinating the regional systems. The basic principle of planning is that the central system allocates resources so as to optimize its own objective, while the subsystems optimize their own objective using the given resources. Accordingly, the respective subsystem generates an optimal parametric solution w. r. t. the given resource. The central decision-maker, then, chooses an optimal resource allocation based on knowledge about subsystems' behavior. Such problems with precedence in decisive powers can be solved in principle by a parametric approach.

In the past, most studies of two-level planning were limited to the cases in which the central objective is a function of subsystems' objectives. By use of directional derivatives, then, nondifferentiable programming was applied to improve resource allocation successively.

In this paper, we are concerned with the cases in which the central objective consists of subsystems' optimal parametric solutions generally. Such problem is regarded as the most general resource allocation problem.

A new computational method is proposed such that a nonlinear programming problem approximating the original hierarchical one is solved iteratively by applying a penalty function method to the lower level problems. It is proved that a sequence of approximated solutions converges to the optimal solution.

The two-level planning mentioned above is the same with the so-called Stackelberg Strategy, and thus the purpose of this paper is also to study an algorithm for a Stackelberg problem with plural optimization subproblems in the lower level.

1. はじめに

複数の部分システムと上位レベルの中央システムからなる階層分権システムの最適化問題を考える。中央は中央の目的関数に基づき、部分システムの最適パラメータ値を決定し、部分システムは中央から与えられたパラメータ値のもとで自己の目的関数を最適化する。ここでパラメータとは、部分システムへ配分する資源量、予算などの設計パラメータである。

階層分権システムの最適化問題はすでに文献 4) ~ 6) で研究したが、この種の問題は上位の制約条件の一部にパラメータ化された下位最適化問題を含むため、下位問題のパラメトリック最適解を陽的に求めねばならず、このことが一般的な解法を与えることの困難な原因になっている。文献 6) では下位問題が線形計画問題であって、パラメトリック最適解が求まる場合に限って解法を与えている。また文献 2), 4), 5) では上位の目的関数が下位の目的関数の関数になっているとき、パラメトリック最適解を陽的に求めることなく、パラメータを逐次改良していく種類の解法を与えている。しかし上位目的関数が下位問題のパラメトリック最適解の一般関数になっている場合の解法はみあたらない。本論文で提案する解法は、下位問題に障壁法を適用した元問題の近似非線形計画問題を解く近似解法であり、一連の近似問題を解けば真の最適解に収束することが証明される。このような方法によれば、上位変数と下位変数の制約条件が非分離の最も一般的な階層分権システムの解法も与えることができる。

上述のような本質的にパラメトリックアプローチに立脚した 2 レベル構造の最適化問題は、一般に Stac-

* 慶応義塾大学工学部 横浜市港北区日吉町 3-14-1

* Faculty of Engineering, Keio University, Yokohama
(Received April 13, 1979)

kelberg 問題^{7),8)}と呼ばれる問題と同じである。したがって本論文は、下位レベルが複数の部分最適化問題からなる Stackelberg 問題の解法を研究するということにもなる。

2. 問題の定式化と変換

一般的な2レベル分権システムの最適化はつぎのように定式化される。

$$\min_x F(x, \tilde{y}(x)) \quad (1.a)$$

$$\text{subj. to } G(x, \tilde{y}(x)) \leq 0 \quad (1.b)$$

$$f_n(\tilde{y}_n(x), x) = \min_{y_n} f_n(y_n, x) \quad (1.c)$$

$$\text{subj. to } g_n(y_n, x) \leq 0 \quad (1.d)$$

$$y_n \in Y_n =$$

$$\{y_n | h_n(y_n) \leq 0\} \quad (1.e)$$

$$n=1, \dots, N$$

ここで F , G および x はおのおの上位の目的関数、制約関数および決定変数パラメータである。また下位レベルは N 個の部分システムからなり、 f_n, g_n, y_n は部分システム n の目的関数、制約式、決定変数で、 $\tilde{y}_n(x)$ はパラメータ x を与えたときの下位問題 (1.c~e) のパラメトリック最適解である。ただし、 $\tilde{y}(x) = (\tilde{y}_1(x)^T, \dots, \tilde{y}_N(x)^T)^T$ 。ここで上つき T は転置を表す。問題 (1) は最適なパラメータ x^* とそれに対応した $\{y_n^* = \tilde{y}_n(x^*)\}$ を求めることである。また (1.b)~(1.e) を満たす $(x, \tilde{y}(x))$ が存在するものと仮定する。

上の2レベル問題では、部分システムの最適化問題の集合が最適資源配分のために課せられた制約条件とみなされる。したがって問題 (1) を解くためには、 $\tilde{y}_n(x)$ を x の関数として与えられることが必要であり、このために問題 (1.c~e) はパラメトリック計画として解かねばならないことに注意しよう。

さて、部分システムの制約式 (1.d, e) が等式条件

$$g_n(y_n, x) = 0, \quad h_n(y_n) = 0$$

ならば、Lagrange 乗数法によりパラメトリック最適解 $\tilde{y}_n(x)$ が満たすべき最適性条件 (必要条件ではあるが十分条件とはかぎらない)

$$\nabla_{y_n} f_n(y_n, x) + \lambda_n^T \nabla_{y_n} g_n(y_n, x) + r_n^T \nabla_{y_n} h_n(y_n) = 0$$

$$g_n(y_n, x) = 0, \quad h_n(y_n) = 0$$

で制約 (1.c~e) を置き換えて問題 (1) を解く方法も考えられる。ここで λ_n, r_n は Lagrange 乗数である。このとき、問題 (1) は $x, y_n, n=1, \dots, N, \lambda_n, n=1, \dots, N, r_n, n=1, \dots, N$ を決定変数とする等式制約条件つき最適化問題に帰着される。ところが問題 (1) のように部分システムの制約式が不等号の場合には、上

の式に加えて相補条件

$$g_n(y_n, x) \leq 0, \quad \lambda_n^T g_n(y_n, x) = 0, \quad \lambda_n \geq 0$$

$$h_n(y_n) \leq 0, \quad r_n^T h_n(y_n) = 0, \quad r_n \geq 0$$

が必要であり、さらにこの不等式群の中から活性な不等式を捜し出して等式に帰着させる手続きが必要であり、下位問題 (1.c~e) に直接最適性条件を用いることは得策ではない。そこで問題 (1) を変換することを考える。まず障壁法 (SUMT)¹⁾ の考えに基づき、部分システムの制約条件をその目的関数に組み込んだ新しい関数の制約なし最小化問題で問題 (1.c~e) を置き換える。この新しい関数を拡張目的関数とよび、部分システム n の最小化問題

$$\min_{y_n} f_n(y_n, x) \quad (1.c)$$

$$\text{subj. to } g_n(y_n, x) \leq 0 \quad (1.d)$$

$$y_n \in Y_n = \{y_n | h_n(y_n) \leq 0\} \quad (1.e)$$

に対してつぎのように定義する。

$$P_n^r(y_n, x) = f_n(y_n, x) - r \left\{ \sum_{i=1}^{m_n} \frac{1}{g_{ni}(y_n, x)} + \sum_{i=1}^{q_n} \frac{1}{h_{ni}(y_n)} \right\}, \quad r > 0 \quad (2)$$

ただし、 $m_n = \dim g_n$, $q_n = \dim h_n$ である。そして、元の2レベル最適化問題 (1) において、問題 (1.c~e) を拡張目的関数の制約なし最小化問題

$$\min_{y_n} P_n^r(y_n, x), \quad n=1, \dots, N \quad (3)$$

で置き換えたつぎのような問題を考える。

$$\min_x F(x, \tilde{y}^r(x)) \quad (4.a)$$

$$\text{subj. to } G(x, \tilde{y}^r(x)) \leq 0 \quad (4.b)$$

$$P_n^r(\tilde{y}_n^r(x), x) = \min_{y_n} P_n^r(y_n, x) \quad (4.c)$$

$$n=1, \dots, N$$

ただし $\tilde{y}_n^r(x)$ はペナルティ定数 r が与えられたときの問題 (3) のパラメトリック最適解である。(4.b, c) 式を満たす x は存在すると仮定する。

ここで元の2レベル最適化問題 (1) と問題 (4) の関係を、障壁法 (SUMT) の理論をもとに考えるため、つぎの仮定をおく。ただしこれらの仮定は任意に固定された x に対して成り立つものとする。

(i) 制約領域の内部は $S_n(x) = \{y_n | g_n(y_n, x) < 0, h_n(y_n) < 0\}$, $n=1, \dots, N$ 空でない。

(ii) 関数 $f_n(y_n, x)$, $g_n(y_n, x)$, $h_n(y_n)$, $n=1, \dots, N$ は y_n に関して2階連続微分可能である。

(iii) $f_n(y_n, x)$ は制約領域 $\{y_n | g_n(y_n, x) \leq 0, h_n(y_n) \leq 0\}$ で下に有界である。 $n=1, \dots, N$ 。

(iv) 任意の K に対し集合 $\{y_n | f_n(y_n, x) \leq K, g_n(y_n, x) \leq 0, h_n(y_n) \leq 0\}$, $n=1, \dots, N$ は有界である。

(v) 関数 $f_n(y_n, x)$ は y_n に関し狭義に凸、関数

$g_n(\mathbf{y}_n, \mathbf{x})$, $h_n(\mathbf{y}_n)$ は $\mathbf{y}_n$ に関し単に凸である。このとき $1/g_{ni}(\mathbf{y}_n, \mathbf{x})$, $i=1, \dots, m_n$, $1/h_{ni}(\mathbf{y}_n)$, $i=1, \dots, q_n$ は $S_n(\mathbf{x})$ 上で凹となり、関数 $P_n^r(\mathbf{y}_n, \mathbf{x})$ は $S_n(\mathbf{x})$ 上で狭義に凸となる。 $n=1, \dots, N$ 。

このとき、つぎの定理が成り立つ。

《定理 1》 r に対する問題(3)の解を $\tilde{\mathbf{y}}_n^r(\mathbf{x})$ とするとき、仮定(i)~(v)が成り立つならば、任意に固定された $\mathbf{x}$ に対し

$$\lim_{r \rightarrow 0} \tilde{\mathbf{y}}_n^r(\mathbf{x}) = \tilde{\mathbf{y}}_n(\mathbf{x})$$

が成り立つ。

(証明) SUMT の定理¹⁾と f_n の狭義の凸性より明らか。■

定理 1 は、 $\mathbf{x}$ を固定して r をゼロに近づけると問題(3)の解 $\{\tilde{\mathbf{y}}_n^r(\mathbf{x})\}$ が問題(1.c~e)の最適解 $\tilde{\mathbf{y}}_n(\mathbf{x})$ に収束することを保証している。

《定理 2》 $\mathbf{Y}_n, n=1, \dots, N$ がコンパクト、 F, G が $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ に関し、 f_n, g_n が $(\mathbf{x}, \mathbf{y}_n)$ に関し連続であり、かつ仮定(i)~(v)が成り立つものとする。このとき問題(1)の解 $\mathbf{x}^*$ に対し、

$$G(\mathbf{x}^*, \tilde{\mathbf{y}}(\mathbf{x}^*)) < 0$$

および問題(4)の解 $\mathbf{x}^r$ に対し

$$\lim_{r \rightarrow 0} (\mathbf{x}^r, \tilde{\mathbf{y}}^r(\mathbf{x}^r)) = (\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}})$$

であるならば

$$F(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}) = F(\mathbf{x}^*, \tilde{\mathbf{y}}(\mathbf{x}^*))$$

が成り立つ。つまり $(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}})$ は 2 レベル問題(1)の解である。

(証明) まず $(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}})$ が問題(1)の許容解であることを示す。定理 1 より任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$r < R(\mathbf{x}) \text{ のとき, } \|\tilde{\mathbf{y}}^r(\mathbf{x}) - \tilde{\mathbf{y}}(\mathbf{x})\| < \varepsilon$$

となるような正数 $R(\mathbf{x})$ が $\mathbf{x}$ に対応して存在する。ここで $R = \inf_{\mathbf{x}} R(\mathbf{x})$ とすると上の言明より、任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$r < R \text{ のとき, } \|\tilde{\mathbf{y}}^r(\mathbf{x}) - \tilde{\mathbf{y}}(\mathbf{x})\| < \varepsilon \text{ for any } \mathbf{x}$$

となる正数 R が存在するといえる。ここで $\mathbf{x} = \mathbf{x}^r$ とすると

$$r < R \text{ のとき, } \|\tilde{\mathbf{y}}^r(\mathbf{x}^r) - \tilde{\mathbf{y}}(\mathbf{x}^r)\| < \varepsilon$$

が成り立つ。すなわち $r \rightarrow 0$ のとき $\|\tilde{\mathbf{y}}^r(\mathbf{x}^r) - \tilde{\mathbf{y}}(\mathbf{x}^r)\| \rightarrow 0$ である。また文献 3) の系 8.2 より $\tilde{\mathbf{y}}(\mathbf{x})$ は連続だから、 $\mathbf{x}^r \rightarrow \tilde{\mathbf{x}}$ のとき $\tilde{\mathbf{y}}(\mathbf{x}^r) \rightarrow \tilde{\mathbf{y}}(\tilde{\mathbf{x}})$ である。したがって三角不等式

$$\|\tilde{\mathbf{y}}^r(\mathbf{x}^r) - \tilde{\mathbf{y}}(\tilde{\mathbf{x}})\| \leq \|\tilde{\mathbf{y}}^r(\mathbf{x}^r) - \tilde{\mathbf{y}}(\mathbf{x}^r)\| + \|\tilde{\mathbf{y}}(\mathbf{x}^r) - \tilde{\mathbf{y}}(\tilde{\mathbf{x}})\|$$

より $r \rightarrow 0$ のとき $\mathbf{x}^r \rightarrow \tilde{\mathbf{x}}$ ならば必ず $\tilde{\mathbf{y}}^r(\mathbf{x}^r) - \tilde{\mathbf{y}}(\tilde{\mathbf{x}})$ が成り立つ。すなわち $\tilde{\mathbf{y}} \equiv \tilde{\mathbf{y}}(\tilde{\mathbf{x}})$ となり、 $\tilde{\mathbf{x}}$ は制約(1.c~e)に対し許容解となる。さらに $G(\mathbf{x}^r, \tilde{\mathbf{y}}^r(\mathbf{x}^r)) \leq 0$ と G の連続性より $G(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}(\tilde{\mathbf{x}})) \leq 0$ となり、 $\tilde{\mathbf{x}}$ は

問題(1)の許容解となる。

さて、 $(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}} \equiv \tilde{\mathbf{y}}(\tilde{\mathbf{x}}))$ が最適解でないと仮定する。すなわち、 $F(\mathbf{x}^*, \tilde{\mathbf{y}}(\mathbf{x}^*)) < F(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}})$ と仮定する。ここで

$$F(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}) - F(\mathbf{x}^*, \tilde{\mathbf{y}}(\mathbf{x}^*)) = 2\varepsilon, \varepsilon > 0 \quad (5)$$

とおくと、 $(\mathbf{x}^r, \tilde{\mathbf{y}}^r(\mathbf{x}^r)) \rightarrow (\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}})$, $(\mathbf{x}^*, \tilde{\mathbf{y}}^r(\mathbf{x}^*)) \rightarrow (\mathbf{x}^*, \tilde{\mathbf{y}}(\mathbf{x}^*))$ であることと F の連続性より、上のような ε に対しある $\tilde{R}, R^*$ が存在して

$$|F(\mathbf{x}^r, \tilde{\mathbf{y}}^r(\mathbf{x}^r)) - F(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}})| < \varepsilon \text{ for } \forall r < \tilde{R} \quad (6)$$

$$|F(\mathbf{x}^*, \tilde{\mathbf{y}}^r(\mathbf{x}^*)) - F(\mathbf{x}^*, \tilde{\mathbf{y}}(\mathbf{x}^*))| < \varepsilon \text{ for } \forall r < R^*$$

(7)

となる。さらに $R = \min(\tilde{R}, R^*)$ とすると、(7), (5), (6) 式を順に使うことにより、すべての $r < R$ に対して

$$\begin{aligned} F(\mathbf{x}^*, \tilde{\mathbf{y}}^r(\mathbf{x}^*)) &< F(\mathbf{x}^*, \tilde{\mathbf{y}}(\mathbf{x}^*)) + \varepsilon \\ &= F(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}) - \varepsilon \\ &< F(\mathbf{x}^r, \tilde{\mathbf{y}}^r(\mathbf{x}^r)) \end{aligned} \quad (8)$$

となる。ところで G の連続性と仮定 $G(\mathbf{x}^*, \tilde{\mathbf{y}}(\mathbf{x}^*)) < 0$ よりある R' が存在して

$$G(\mathbf{x}^*, \tilde{\mathbf{y}}^r(\mathbf{x}^*)) \leq 0 \text{ for } \forall r < R'$$

となり、 $r < R'$ なる r に対して $(\mathbf{x}^*, \tilde{\mathbf{y}}^r(\mathbf{x}^*))$ は問題(4)の許容解となる。したがって $r < \min(R, R')$ なる r を考えると、関係式(8)より $(\mathbf{x}^r, \tilde{\mathbf{y}}^r(\mathbf{x}^r))$ が $r < \min(R, R')$ なる r に対する問題(4)の解であることに矛盾する。ゆえに $F(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}) = F(\mathbf{x}^*, \tilde{\mathbf{y}}(\mathbf{x}^*))$ である。■

定理 2 により、十分小さな正数 r に対して得られる問題(4)の最適解 $\mathbf{x}^r$ は元の問題(1)の最適解 $\mathbf{x}^*$ の十分近傍に存在し、対応する $\tilde{\mathbf{y}}^r(\mathbf{x}^r)$ も $\tilde{\mathbf{y}}(\mathbf{x}^*)$ の十分近傍に存在することが保証される。したがって問題(4)の解が問題(1)の十分よい近似解となるように、パラメータ r が与えられていれば、問題(1)のかわりに問題(4)を考えればよいことがわかる。そこで以下の節で変換問題(4)の数値解法を考える。

3. 変換問題の解法

この節では定数 r は、問題(4)の解が問題(1)の解の十分よい近似解となるように与えられているものとする。このとき、 $\tilde{\mathbf{y}}_n^r(\mathbf{x})$ が問題(3)の最適解であるための必要条件は、 $\tilde{\mathbf{y}}_n^r(\mathbf{x})$ が $\mathbf{y}_n$ に関するつぎの停留条件を満たすことである。

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{y}_n} P_n^r(\mathbf{y}_n, \mathbf{x}) &= \nabla_{\mathbf{y}_n} f_n(\mathbf{y}_n, \mathbf{x}) + r \left\{ \sum_{i=1}^{m_n} \frac{\nabla_{\mathbf{y}_n} g_{ni}(\mathbf{y}_n, \mathbf{x})}{\{g_{ni}(\mathbf{y}_n, \mathbf{x})\}^2} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^{q_n} \frac{\nabla_{\mathbf{y}_n} h_{ni}(\mathbf{y}_n)}{\{h_{ni}(\mathbf{y}_n)\}^2} \right\} = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

また P_n^r が凸であれば、これは十分条件にもなる。仮定(v)のもとでは、制約領域の内部 $S_n(\mathbf{x})$ におい

て P_n^* は凸になるから、十分性のためには

$$y_n \in S_n(x) \quad (10)$$

であればよいことがわかる。

以上により、問題(4)の解はつぎの問題の解である。

$$\min_{x, y} F(x, y) \quad (11. a)$$

$$\text{subj. to } G(x, y) \leq 0 \quad (11. b)$$

$$\nabla_{y_n} P_n^*(y_n, x) = 0, \quad n=1, \dots, N \quad (11. c)$$

逆に、問題(11)の解が(10)式を満たすとき、問題(4)の解になる。ここでつぎの仮定をおく。

(vi) 任意の x に対し関数 $P_n^*(y_n, x)$ の Hessian $\nabla^2_{y_n y_n} P_n^*(y_n, x)$ は正則である。

このとき、 x を独立変数、 $y_n, n=1, \dots, N$ を従属変数とすると、

$$\nabla_{y_n} P_n^*(y_n, x) = 0, \quad n=1, \dots, N \quad (12)$$

となるような連続な勾配をもつ陰関数

$$y_n = \eta_n(x), \quad n=1, \dots, N$$

が存在し、その勾配は

$$\nabla \eta_n(x) = -[\nabla^2_{y_n y_n} P_n^*(y_n, x)]^{-1} \nabla^2_{y_n x} P_n^*(y_n, x) \quad n=1, \dots, N \quad (13)$$

で与えられる。さらに仮定

(vii) F, G が (x, y) に関して微分可能である。のもとで微分可能な関数 $\tilde{F}(x) = F(x, \eta(x))$, $\tilde{G}(x) = G(x, \eta(x))$ の存在も保証され、それらの勾配は(13)式よりつぎのようになる。

$$\begin{aligned} \nabla \tilde{F}(x) &= \nabla_x F(x, y) + \sum_{n=1}^N \nabla_{y_n} F(x, y) \nabla \eta_n(x) \\ &= \nabla_x F(x, y) - \sum_{n=1}^N \nabla_{y_n} F(x, y) \\ &\quad \times [\nabla^2_{y_n y_n} P_n^*(y_n, x)]^{-1} \nabla^2_{y_n x} P_n^*(y_n, x) \\ &= \nabla_x F(x, y) - \nabla_y F(x, y) \\ &\quad \times [\nabla^2_{yy} P^*(y, x)]^{-1} \nabla^2_{yx} P^*(y, x) \quad (14) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla \tilde{G}(x) &= \nabla_x G(x, y) - \nabla_y G(x, y) \\ &\quad \times [\nabla^2_{yy} P^*(y, x)]^{-1} \nabla^2_{yx} P^*(y, x) \quad (15) \end{aligned}$$

ただし、

$$y = \eta(x) = (\eta_1(x)^T, \dots, \eta_N(x)^T)^T$$

$$[\nabla^2_{yy} P^*(y, x)]^{-1} = \begin{bmatrix} \nabla^2_{y_1 y_1} P_1^*(y_1, x)^{-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \nabla^2_{y_N y_N} P_N^*(y_N, x)^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\nabla_y F(x, y) = [\nabla_{y_1} F(x, y), \dots, \nabla_{y_N} F(x, y)]$$

$$\nabla^2_{yx} P^*(y, x) = \begin{bmatrix} \nabla^2_{y_1 x} P_1^*(y_1, x) \\ \vdots \\ \nabla^2_{y_N x} P_N^*(y_N, x) \end{bmatrix}$$

それゆえ、問題(11)は(12)式のもとでつぎの問題と等価である。

$$\min_x F(x, \eta(x)) \quad (16. a)$$

$$\text{subj. to } G(x, \eta(x)) \leq 0 \quad (16. b)$$

問題(4)のかわりに問題(16)を解くことを考える。

ところで関数 $\eta(x)$ を陽に与えることができないため、非線形計画法を直接問題(16)に適用することは困難である。しかし非線形計画法の計算に必要なものは、現在の点における目的関数や制約関数の値とそれらの勾配の値だけであることが多い。われわれの問題においても、制約なし問題(3)を解くことによって(14), (15)式からこれらの数値を求めることができる。すなわち現在の点を x^t とすると、問題(3)の解 $y^t \equiv \eta(x^t)$ を適当な降下法によって求め、この値から

$$\tilde{F}(x^t) = F(x^t, \eta(x^t)) = F(x^t, y^t)$$

$$\tilde{G}(x^t) = G(x^t, \eta(x^t)) = G(x^t, y^t)$$

および(14), (15)式より $\nabla \tilde{F}(x^t)$, $\nabla \tilde{G}(x^t)$ が得られる。これらの数値を用いれば、従来の非線形計画法の適用が考えられる。以下では Zoutendijk の許容方向法⁹⁾を用いて問題(16)を解く場合のアルゴリズムを示す。

アルゴリズム

(ステップ1) 初期点 x^1 を、それに対応する問題(3)の解 $y_n^1 = \tilde{y}_n^*(x^1)$, $n=1, \dots, N$ が $G(x^1, y^1) \leq 0$ を満たすように選ぶ。 $t=1$ とおく。

(ステップ2) x^t に対応した N 個の制約なし最小化問題

$$\min_{y_n} P_n^*(y_n, x^t), \quad n=1, \dots, N$$

を適当な山降り法で解き、その最適解 $\tilde{y}_n^*(x^t)$ を y_n^t とおき、 $\tilde{F}(x^t) = F(x^t, y^t)$ を計算する。

(ステップ3) $\nabla_x F(x^t, y^t)$, $\nabla_{y_n} F(x^t, y^t)$, $n=1, \dots, N$, $\nabla_x G(x^t, y^t)$, $\nabla_{y_n} G(x^t, y^t)$, $n=1, \dots, N$, $\nabla^2_{y_n y_n} P_n^*(y_n^t, x^t)$, $n=1, \dots, N$, $\nabla^2_{y_n x} P_n^*(y_n^t, x^t)$, $n=1, \dots, N$ および $[\nabla^2_{y_n y_n} P_n^*(y_n^t, x^t)]^{-1}$, $n=1, \dots, N$ を計算し、これらをもとに(14), (15)式から $\nabla \tilde{F}(x^t)$, $\nabla \tilde{G}(x^t)$ を計算する。 $\tilde{G}(x^t) = G(x^t, y^t)$ も求める。

(ステップ4) つぎの方向発見問題を解く。

$$\min_{(s, \xi)} \xi \quad (17. a)$$

$$\text{subj. to } \nabla \tilde{F}(x^t) s \leq \xi \quad (17. b)$$

$$\begin{aligned} \nabla \tilde{G}_i(x^t) s &\leq \theta_i \xi, \quad \theta_i \geq 0, \\ i &\in I = \{i \mid \tilde{G}_i(x^t) = 0\} \end{aligned} \quad (17. c)$$

$$-1 \leq s_i \leq 1, \quad i=1, \dots, \dim x \quad (17. d)$$

ここで θ_i , $i \in I$ は安全係数である。

(ステップ5) 方向発見問題の最適値 ξ^* に対し、 $\xi^* > -\varepsilon_1$ が成り立てば計算を終了し、 x^t を問題(1)の近似解とする。ただし ε_1 はあらかじめ与え

られた正数である。そうでなければステップ6へ行く。

(ステップ6) 1次元最小化問題 $\min_{\alpha} \{\bar{F}(\mathbf{x}^t + \alpha \mathbf{s}^t) | \mathbf{G}(\mathbf{x}^t + \alpha \mathbf{s}^t) \leq 0\}$ を解き、最適ステップ幅 α^t を求める。 $\mathbf{x}^{t+1} = \mathbf{x}^t + \alpha^t \mathbf{s}^t$ とする。

(ステップ7) $\mathbf{x}^{t+1}$ に対応した N 個の制約なし最小化問題(3)を解き、最適解 $\tilde{\mathbf{y}}_n^r(\mathbf{x}^{t+1})$ を $\mathbf{y}_n^{t+1}$ とおき、新しい点での目的関数値 $\bar{F}(\mathbf{x}^{t+1}) = F(\mathbf{x}^{t+1}, \mathbf{y}^{t+1})$ を計算する。

(ステップ8) $\bar{F}(\mathbf{x}^t) - \bar{F}(\mathbf{x}^{t+1}) < \varepsilon_2$ かつ $\|\mathbf{x}^{t+1} - \mathbf{x}^t\| < \varepsilon_3$ ならば計算を終了する。そうでなければステップ9へ行く。ただし $\varepsilon_2, \varepsilon_3$ はあらかじめ与えられた正数である。

(ステップ9) $t := t + 1$ としステップ3から繰り返す。

ゼロに向かって狭義に減少する r の数列 $\{r^k\}$ に対応した一連の問題(16)に対し、上のアルゴリズムを適用して得られる解は元の問題(1)の最適解に収束する。なお r の更新は単に $r^{k+1} = r^k/c$, $c > 1$ である。

4. 数値例

製品の販売と資源の配分を行う中央と、配分された資源を消費して2種類の製品を生産する2工場を部分システムとしてもつ簡単な企業モデルを考える。中央は製品の販売によって得られる総利益を最大にするように工場へ配分する資源量を決定し、各工場は独自の評価基準に基づいて決まる生産目標を達成しようとする。記号をつぎのように定義する。

x_{ni} : 工場 n へ配分される資源 i の量。

y_{nj} : 工場 n から生産される製品 j の量。

Y_j : 製品 j の総生産量で、つぎのようにおく。

$$Y_j = y_{1j} + y_{2j}$$

$F(\mathbf{Y})$: 総生産 $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2)^T$ から得る利益関数。

$f_n(\mathbf{y}_n)$: 工場 n の生産目標を表わす目的関数。

$\tilde{\mathbf{y}}_n(\mathbf{x})$ および $\tilde{Y}_j(\mathbf{x})$: 資源配分 $\mathbf{x} = (x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22})$ に関する y_{nj} および Y_j のパラメトリック最適解。

中央による資源配分問題としてつぎのような数値例を考える。

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{x}} F(\tilde{\mathbf{Y}}(\mathbf{x})) &= (200 - \tilde{Y}_1(\mathbf{x}))\tilde{Y}_1(\mathbf{x}) \\ &\quad + (160 - \tilde{Y}_2(\mathbf{x}))\tilde{Y}_2(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

$$\text{subj. to } x_{11} + x_{12} + x_{21} + x_{22} \leq 40$$

$$0 \leq x_{11} \leq 10, 0 \leq x_{12} \leq 5$$

$$0 \leq x_{21} \leq 15, 0 \leq x_{22} \leq 20$$

$$f_1(\tilde{\mathbf{y}}_1(\mathbf{x}))$$

$$= \min_{\mathbf{y}_1} [(y_{11} - 4)^2 + (y_{12} - 13)^2]$$

$$\text{subj. to } 0.4y_{11} + 0.7y_{12} \leq x_{11}$$

$$0.6y_{11} + 0.3y_{12} \leq x_{12}$$

$$0 \leq y_{11}, y_{12} \leq 20$$

$$f_2(\tilde{\mathbf{y}}_2(\mathbf{x}))$$

$$= \min_{\mathbf{y}_2} [(y_{21} - 35)^2 + (y_{22} - 2)^2]$$

$$\text{subj. to } 0.4y_{21} + 0.7y_{22} \leq x_{21}$$

$$0.6y_{21} + 0.3y_{22} \leq x_{22}$$

$$0 \leq y_{21}, y_{22} \leq 40$$

ただし、 $\tilde{Y}_j(\mathbf{x}) = \tilde{y}_{1j}(\mathbf{x}) + \tilde{y}_{2j}(\mathbf{x})$, $j = 1, 2$ である。下位問題の不等式制約式の左辺は、生産 $\mathbf{y}_n = (y_{n1}, y_{n2})^T$ によって消費される資源1および2の量を表わし、係数は製品に含まれる資源の比率を表わす。

さて、拡張目的関数を(2)式に基づいて定義し、つぎのような変換問題を構成する。

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{x}} F(\tilde{\mathbf{Y}}^r(\mathbf{x})) &= (200 - \tilde{Y}_1^r(\mathbf{x}))\tilde{Y}_1^r(\mathbf{x}) \\ &\quad + (160 - \tilde{Y}_2^r(\mathbf{x}))\tilde{Y}_2^r(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

$$\text{subj. to } x_{11} + x_{12} + x_{21} + x_{22} \leq 40$$

$$0 \leq x_{11} \leq 10, 0 \leq x_{12} \leq 5$$

$$0 \leq x_{21} \leq 15, 0 \leq x_{22} \leq 20$$

$$P_1^r(\tilde{\mathbf{y}}_1^r(\mathbf{x}), \mathbf{x}) = \min_{\mathbf{y}_1} P_1^r(\mathbf{y}_1, \mathbf{x})$$

$$P_2^r(\tilde{\mathbf{y}}_2^r(\mathbf{x}), \mathbf{x}) = \min_{\mathbf{y}_2} P_2^r(\mathbf{y}_2, \mathbf{x})$$

ただし、 $\tilde{Y}_j^r(\mathbf{x}) = \tilde{y}_{1j}^r(\mathbf{x}) + \tilde{y}_{2j}^r(\mathbf{x})$, $j = 1, 2$ である。

この問題を解くためにわれわれが提案したアルゴリズムを適用する。以下では r を0.1とした場合の数値例について特に述べる。まず初期点 $\mathbf{x}^1 = (x_{11}^1, x_{12}^1, x_{21}^1, x_{22}^1) = (5.0, 5.0, 15.0, 15.0)$ に対応した制約なし最適化問題を解くと

$$\tilde{\mathbf{y}}_1^r(\mathbf{x}^1) = (0.914, 6.51), \tilde{\mathbf{y}}_2^r(\mathbf{x}^1) = (24.85, 0.135)$$

が求まる。このとき $\bar{F}(\mathbf{x}^1) = F(\tilde{\mathbf{Y}}^r(\mathbf{x}^1)) = 5506$ であり、ステップ3に基づき勾配 $\nabla \bar{F}(\mathbf{x}^1)$ を計算すると、 $\nabla \bar{F}(\mathbf{x}^1) = [-244, -0.127, -0.0078, -248]$ となる。つぎに方向発見問題(17)を構成し、現在の目的関数を改良する方向 $\mathbf{s}^1 = (s_{11}^1, s_{12}^1, s_{21}^1, s_{22}^1) = (1.0, -1.0$

Table 1 Values corresponding to r and true values

r	x_{11}	x_{12}	x_{21}	x_{22}	$y_{11}^r(\mathbf{x})$	$y_{12}^r(\mathbf{x})$	$y_{21}^r(\mathbf{x})$	$y_{22}^r(\mathbf{x})$	$F(\tilde{\mathbf{Y}}(\mathbf{x}))$
0.1	6.69	3.31	12.04	17.96	0.78	8.96	29.69	0.11	6536
0.01	6.78	3.22	12.03	17.97	0.58	9.34	29.88	0.03	6577
True values	7.00	3.00	12.00	18.00	0.00	10.00	30.00	0.00	6600

$-1.0, 1.0)$ を求める. 直線 $\mathbf{x}^1 + \alpha \mathbf{s}^1$ に沿った1次元最適化を行うことにより, 新しい点 $\mathbf{x}^2 = (x_{11}^2, x_{12}^2, x_{21}^2, x_{22}^2) = (7.0, 3.0, 13.0, 17.0)$ を得る. 以下同様にして資源配分パラメータ $\mathbf{x}$ を5回更新することにより, つぎの値を得る.

$$\mathbf{x}^6 = (x_{11}^6, x_{12}^6, x_{21}^6, x_{22}^6)$$

$$= (6.69, 3.31, 12.04, 17.96)$$

$$\tilde{\mathbf{y}}_1^r(\mathbf{x}^6) = (0.78, 8.96), \quad \tilde{\mathbf{y}}_2^r(\mathbf{x}^6) = (29.69, 0.11)$$

$$\tilde{F}(\mathbf{x}^6) = F(\tilde{\mathbf{Y}}(\mathbf{x}^6)) = 6536$$

$r=0.1$ と 0.01 の場合の結果を真値とともに Table 1 に与えておく.

本論文では, 2 レベル分権システムの一般的な資源配分問題の新解法の基礎理論とアルゴリズムを与えた. しかし数値計算上改良しなければならない点もいくつかある. たとえば障壁法に固有の欠点に起因するつぎのような問題点がある. すなわち真値の十分近くに解を得るため r を十分小さくすると, 関数 $P_n^r(\mathbf{y}_n, \mathbf{x})$ が許容領域の境界付近で急激に増加する関数となり, 制約なし問題(3)の正しい解が求めにくくなり, また変数変化に対する関数 $P_n^r(\mathbf{y}_n, \mathbf{x})$ の感度が非常に大きくなり, 丸め誤差も生じてしまう. このことが上の計算結果の精度に重大な影響を及ぼしている. このため上の数値例において r の値をさらに小さい 0.001 としても, 0.01 の場合と比べて真値への目だった漸近は見られなかった.

5. おわりに

分権階層システムに関連して, 部分システムの利益を考慮した中央によるパラメータ配分問題を2レベル問題として定式化し, 最も一般的な形の2レベル問題

に対する最適化方法を考えた. このような問題の構造は Stackelberg 問題や min-max 問題などほかにも数多くみられ, これらの問題に対してもわれわれの計算方法の適用が可能である. また, ここで定式化したような最も一般的な形の2レベル問題に対しては, まだ有効な計算方法が開発されていないことを考えれば, われわれの提案した方法は有意義なものと思う. しかしアルゴリズムの効率や得られた解の精度など, いくつかの問題点も存在する. これら数値計算上の問題点は SUMT の改善手法と同様の手法で改善される.

参考文献

- 1) A. V. Fiacco and G. P. McCormik: The Sequential Unconstrained Minimization Technique for Non-linear Programming, *Management Science*, **10**-2, 601/617 (1964)
- 2) A. M. Geoffrion and W. W. Hogan: Coordination of Two-Level Organization with Multiple Objectives, *Techniques of Optimization* (A. V. Balakrishnan), 455/466, Academic Press (1972)
- 3) W. W. Hogan: Point-to-Set Maps in Mathematical Programming, *SIAM Review*, **15**-3, 591/603 (1973)
- 4) 志水, 相吉, 上野: 分権的最適化システムとある種の輸送問題への応用, 計測自動制御学会論文集, **13**-6, 29/36 (1977)
- 5) 志水, 相吉: 階層多目的システムと階層分権システム, 第7回制御理論シンポジウム資料, 特 17/22 (1978)
- 6) 志水, 安西: 地方自治権をもつ階級制システムの最適化, 計測自動制御学会論文集, **10**-1, 63/70 (1974)
- 7) M. Simaan and J. B. Cruz, Jr.: On the Stackelberg Strategy in Nonzero-Sum Games, *J. of Optimization Theory and Applications*, **11**-5, 533/555 (1973)
- 8) M. Simaan: Stackelberg Optimization of Two-Level Systems, *IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics*, **SMC**-7-4, 554/557 (1977)
- 9) G. Zoutendijk: *Methods of Feasible Directions*, Elsevier (1960)