離散形リアプノフ行列方程式の解の評価

森 武 宏*・小 亀 英 己**

On Bounds for the Solution to the Discrete Lyapunov Matrix Equation

Takehiro MORI* and Hideki KOKAME**

1. ま え が き

この小報告は、離散形リアプノフ代数行列方程式、

$$A'PA - P = -Q, \quad (') : \text{転置記号}$$

ただし、 $A, Q \in \mathbf{R}^{n \times n}$, Q は正定対称行列, A は正則かつ $|\lambda_i(A)| < 1$ とする.

の解行列 P の適当な尺度による“大きさ”の限界を, Q, A などの“大きさ”により評価したものである. 連続形のリアプノフ方程式に関しては, 同様の趣旨の報告がすでにいくつか公表されている^{1)~5)}. 本報告の目的は, 離散形方程式に対しても連続形方程式に対する結果と並行した評価式を得ておくことにある. 以下では, P, Q の固有根を順にそれぞれ, $0 < \alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_n$, $0 < \beta_1 \leq \dots \leq \beta_n$ とし, 行列 $X \in \mathbf{R}^{n \times n} (\mathbf{C}^{n \times n})$ に対して $\|X\|$ で, $\cdot = 1, 2, \infty$ などの適当な行列ノルムを示し, $\mu_1(X)$ を $\|X\|$ より導かれた行列メジャー⁷⁾として $\mu_1[X]$ を次式のように定める.

$$\mu_1[X] = \max \{-\mu_1(-X), -\mu_1(X)\}$$

また, 行列 A のスペクトル半径を $\rho(A)$ で表わせば, $\rho(A) < 1$ である.

2. 評価式とその証明

以下に, ここでの結果を列記する.

$$\textcircled{1} \quad 1 - \|A\| \cdot \|A'\| \leq \frac{\|Q\|}{\|P\|}, \quad \text{ただし, } \|A\| \cdot \|A'\| < 1 \text{ とする.}$$

$$\textcircled{2} \quad 1 - \min_j |\lambda_j(A)|^2 \leq \frac{\beta_n}{\alpha_1}$$

$$\textcircled{3} \quad \frac{\beta_1}{\alpha_n} \leq 1 - \rho^2(A)$$

$$\textcircled{4} \quad \frac{\beta_1}{\alpha_1} \leq 1 - \|A^{-1}\|_2^{-2} \quad \text{ただし, } \|A^{-1}\|_2 > 1 \text{ とする.}$$

$$\textcircled{5} \quad 1 - \mu_2^{-2}[A^{-1}] \leq \frac{\beta_n}{\alpha_n} \quad \text{ただし, } \mu_2[A^{-1}] > 1 \text{ とする.}$$

つぎに, 以上の結果の証明を順次行う.

(①の証明) 離散形方程式の解 P は, $\rho(A) < 1$ のとき,

$$P = \sum_{i=0}^{\infty} A'^i Q A^i$$

のように無限級数で表示できる. 以下の各証明では, この表示法を用いる. 上の式から, ただちにつぎの不等式を得ることができる.

$$\begin{aligned} \|P\| &\leq \left\| \sum_{i=0}^{\infty} A'^i Q A^i \right\| \leq \sum_{i=0}^{\infty} \|A'^i Q A^i\| \\ &\leq \|Q\| \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \|A'^i\| \cdot \|A^i\| \\ &\leq \|Q\| \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \|A'\|^i \cdot \|A\|^i \\ &\leq \frac{\|Q\|}{1 - \|A\| \cdot \|A'\|}. \end{aligned}$$

(②の証明) (*) を共役転置記号として次式を得る.

$$\begin{aligned} \alpha_1 = \lambda_{\min}(P) &= \min_{z \neq 0} \frac{z^* \sum_{i=0}^{\infty} A'^i Q A^i z}{z^* z} \\ &= \min_{z \neq 0} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{z^* A^{*i} Q A^i z}{z^* z} \end{aligned}$$

上式で z として, A の絶対値最小となる固有根に対する固有ベクトル z_1 をとれば,

$$\text{上式} \leq \frac{z_1^* Q z_1}{z_1^* z_1} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \{\min_j |\lambda_j(A)|\}^{2i} \leq \frac{\beta_n}{1 - \min_j |\lambda_j(A)|^2}$$

を得る.

(③の証明) ②と同様にして次式が成り立つ.

$$\alpha_n = \lambda_{\max}(P) = \max_{z \neq 0} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{z^* A^{*i} Q A^i z}{z^* z}$$

z として, $\rho(A)$ を与える A の固有根に対応する固有ベクトル z_2 を選ぶと, つぎの評価が得られる.

$$\alpha_n \geq \frac{z_2^* Q z_2}{z_2^* z_2} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \rho^{2i}(A) \geq \frac{\beta_1}{1 - \rho^2(A)}.$$

(④の証明)

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \min_{z \neq 0} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{z^* A^{*i} Q A^i z}{z^* z} \\ &\geq \sum_{i=0}^{\infty} \min_{z \neq 0} \frac{z^* A^{*i} Q A^i z}{z^* z} \end{aligned}$$

が成り立つ. ところで, 行列 Q を, $Q = Q_1^2$, $Q_1' = Q_1$ と表わすと,

$$\min_{z \neq 0} \frac{z^* A^* Q A z}{z^* z} = \left\{ \max_{y \neq 0} \frac{y^* Q_1^{-1} (A A^*)^{-1} Q_1^{-1} y}{y^* y} \right\}^{-1}$$

* 京都大学工学部 宇治市五ヶ庄.

** 京都大学原子エネルギー研究所 宇治市五ヶ庄
(Received July 28, 1979)

$$\begin{aligned}
 &= \{\lambda_{\max}(Q_1^{-1}(AA')^{-1}Q_1^{-1})\}^{-1} \\
 &\geq \{\lambda_{\max}(A'^{-1}A^{-1})\lambda_{\max}(Q_1^{-2})\}^{-1} \\
 &= \beta_1 \|A^{-1}\|_2^{-2}
 \end{aligned}$$

となる。ここで、最後の不等式にはつぎの結果⁶⁾,

$$\lambda_{\max}(CBC) \leq \lambda_{\max}(B)\lambda_{\max}(C^2), B=B', C=C'$$

を用いている。上記の関係を利用すると,

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=0}^{\infty} \min_{z \neq 0} \frac{z^* A^{*i} Q A^i z}{z^* z} &\geq \beta_1 \sum_{i=0}^{\infty} \|A^{-i}\|_2^{-2} \\
 &\geq \beta_1 \sum_{i=0}^{\infty} \|A^{-1}\|_2^{-2i} = \frac{\beta_1}{1 - \|A^{-1}\|_2^{-2}}
 \end{aligned}$$

を得る。

(⑤の証明)

$$\begin{aligned}
 \alpha_n &= \max_{z \neq 0} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{z^* A^{*i} Q A^i z}{z^* z} \\
 &\leq \sum_{i=0}^{\infty} \max_{z \neq 0} \frac{z^* A^{*i} Q A^i z}{z^* z} \\
 &= \sum_{i=0}^{\infty} \max_{A^{-i} y_i \neq 0} \frac{y_i^* Q y_i}{|A^{-i} y_i|_2^2}
 \end{aligned}$$

である。ただし、 $y_i = A^i z$ としている。一般に、1章で定めた $\mu[X]$ については、任意のノルム $\|\cdot\|$ に対して、 $\|Xx\| \geq \mu[X] \|x\|$ なる関係が成り立つことが知られているから⁷⁾、 $|A^{-i} y_i|_2 \geq \mu_2^i[A^{-1}] \|y_i\|_2$ が成り立つ。これを上式に用いると、

$$\begin{aligned}
 \text{上式} &\leq \sum_{i=0}^{\infty} \max_{A^{-i} y_i \neq 0} \frac{y_i^* Q y_i}{|y_i|_2^2} \cdot \mu_2^{-2i}[A^{-1}] \\
 &\leq \beta_n \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \mu_2^{-2i}[A^{-1}] = \frac{\beta_n}{1 - \mu_2^{-2}[A^{-1}]}
 \end{aligned}$$

を得る。

3. 検討と数値例

本節では、2章の結果についてのいくつかの注釈を述べ、簡単な数値例を示す。まず、①については、 $\|A\|, \|A'\| < 1$ となるような適当なノルムを選ばなければ、評価は得られない。一般に、 $\rho(A) < 1$ である限り、 $\|A\|$ 、自身については、 $\|A\| < 1$ となるようなノルム $\|\cdot\|$ が存在する⁸⁾。あるノルムについて、 $\|A\|, \|A'\| \ll 1$ が確認できれば、他のノルムについても同じ式が成り立つであろうと予想される。しかし、 $\|A\|$ が1に近ければ、 $\|A\|, \|A'\| < 1$ を成り立たしめるノルムの存否の確認や、その選択は難しくなると考えられる。④、⑤の仮定についても類似の事情であろう。①については、また、 $\cdot=1, \infty$ などのノルムを採用すると、 $\cdot=2$ の場合などのように行列の固有根を計算する必要がなく、評価が簡単に行えることに注意されたい。①の $\cdot=2$ の場合と⑤はともに β_n/α_n の下限を与えているが、両者の値の優劣を一般的に比較することは困難である。②、③はそれぞれ④、①あるいは⑤と

ともに、解行列の最小、最大固有根の存在範囲を与えている。

つぎに、簡単な数値例を挙げ、2章の結果を例証しよう。方程式 $A'PA - P = -Q$ において、

$$A = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad Q = I \text{ (単位行列)}$$

とすると、 $P = 9/7 \cdot I$ である。したがって、

$$\beta_n/\alpha_n = \beta_1/\alpha_1 = \|Q\|_{\infty}/\|P\|_{\infty} = \|Q\|_1/\|P\|_1 = 7/9$$

となっている。このとき、 A^{-1} は、

$$A^{-1} = \frac{3}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

となり、 $\|A^{-1}\|_2 = 3\sqrt{2}/2$, $\mu_2[A^{-1}] = 3/2$ が得られる。また、 $\rho^2(A) = \min |\lambda_i(A)|^2 = 2/9$ である。以上の結果から、① $\cdot=1, 2, \infty$ の場合、および②から⑤までの各評価式の左辺および右辺の値を計算すると、つぎのような評価が得られる。

① ($\cdot=2$)、②、③、④の場合 等号成立

① ($\cdot=1, \infty$)、⑤の場合 左辺=5/9, 右辺=7/9

4. むすび

離散形リアプノフ方程式において、解行列の“大きさ”の評価式を、連続形方程式に対する結果に対応した形で得た。評価式は、行列 Q, P の適当なノルムや最小固有根などの比の上限あるいは下限を示す形で与えられている。行列 A のクラスを限定すると、より精密な評価式が得られるであろうと考えられる。

参考文献

- 1) E. Y. Shapiro: On the Lyapunov Matrix Equation, IEEE Trans. on Automatic Control, **AC-19-5**, 594/596 (1974)
- 2) J. J. Montemayor and B. F. Womack: Comments on "On the Lyapunov Matrix Equation", *ibid.*, **AC-20-6**, 814/815 (1975)
- 3) W. H. Kwon and A. E. Peavson: A Note on the Algebraic Matrix Riccati Equation, *ibid.*, **AC-22-1**, 143/144 (1977)
- 4) R. V. Patel and M. Toda: On Norm Bounds for Algebraic Riccati and Lyapunov Equation, *ibid.*, **AC-23-1**, 87/88 (1978)
- 5) 森・桑原: リアプノフ行列方程式に関する覚書, システムと制御, **23-5**, 277/278 (1979)
- 6) 児玉・須田: システム制御のためのマトリクス理論, 計測自動制御学会, p.292 (1978)
- 7) *Ibid.*, 240/242
- 8) J. M. Ortega: Numerical Analysis, Academic, **23/25** (1972)

(注1) ①の証明で、評価 $\|A^i\| \leq M r^i$, $M > 0$, $0 < r < 1$ などを用いると、 $\|A\|, \|A'\| < 1$ を満たすノルムの選択は不要となるが、通常 M, r は手近には得られない。また、連続形に対しても事情は同じであるが、この場合には $\|A\|, \|A'\| < 1$ に相当する条件の判定も厄介になる。