旋回式クレーンの最適制御†

橋 本 泰 和*・坂 和 愛 幸**

Optimal Control of a Rotary Crane

Yasukazu HASHIMOTO* and Yoshiyuki SAKAWA**

旋回式クレーンが、旋回および荷重巻上げの複合動作を行う場合の最適制御を2次の微分動的計画法¹⁾(DDP)を用いて計算した。土屋・伊藤²⁾および山崎ら³⁾は回転速度を制御変数にとり、その制御パターンを仮定して準最適制御を計算しているが、ここでは駆動トルクを制御変数にとって最適制御を求めた。

1. 旋回式クレーンの力学的モデル

簡単のためつぎのように仮定する。(i)クレーン本体を剛体、荷重を質点と考え、ロープの重量を無視する。(ii)動力伝達部における摩擦などの損失トルクを無視する。(iii)ブームの起伏角とブームの長さは一定とする。Fig. 1 のように記号を決めておくと、荷の座標 (ξ, η, ζ) はつぎのように与えられる：

$$\xi = R \cos \theta + L \sin \beta \cos(\theta + \alpha) \quad (1)$$

$$\eta = R \sin \theta + L \sin \beta \sin(\theta + \alpha) \quad (2)$$

$$\zeta = H - L \cos \beta \quad (3)$$

ロープの張力を F 、時間を τ で表わすと、荷の運動方程式はつぎようになる：

$$m(d^2\xi/d\tau^2) = -F \sin \beta \cos(\theta + \alpha) \quad (4)$$

$$m(d^2\eta/d\tau^2) = -F \sin \beta \sin(\theta + \alpha) \quad (5)$$

$$m(d^2\zeta/d\tau^2) = -mg + F \cos \beta \quad (6)$$

また巻胴およびクレーンの旋回部分の慣性モーメントをそれぞれ J_1, J_2 、回転角を φ, θ 、駆動トルクを T_1, T_2 とすると、それぞれの回転の運動方程式は

$$J_1(d^2\varphi/d\tau^2) = bF - T_1 \quad (7)$$

$$J_2(d^2\theta/d\tau^2) = T_2 \quad (8)$$

β は微小であり、 $\cos \beta \approx 1$ が成立すると仮定すると、(3)式より $\zeta = H - L$ となる。関係式 $b\varphi = L$ および(6)、(7)式を用いると、張力 F はつぎのように表わされる。

$$F = mgJ_1[1 + (bT_1/gJ_1)]/(mb^2 + J_1) \quad (9)$$

ここで無次元量

$$X = \xi/R, Y = \eta/R, Z = \zeta/R, l = L/R \quad (10)$$

を定義し、

Fig. 1 Notations for a rotary crane.

$$K = gJ_1/(J_1 + mb^2)R, \sigma = mb^2/J_1, h = H/R$$

とおくと、(3)式より $Z = h - l$ 。また無次元化時間 t を $t = \sqrt{K} \tau$ で定義し、 t による微分を $\dot{}$ で表わす。さらに状態ベクトル $x \in R^8$ の各要素および制御ベクトル $u = (u_1, u_2)$ の各要素を

$$\begin{aligned} x_1 = X, x_2 = \dot{X}, x_3 = Y, x_4 = \dot{Y} \\ x_5 = Z, x_6 = \dot{Z}, x_7 = \theta, x_8 = \dot{\theta} \end{aligned} \quad (11)$$

$$u_1 = bT_1/gJ_1, u_2 = T_2/KJ_2$$

と定義する。(9)式を(4)―(7)式に代入して上記の関係式を用いると、つぎのような状態方程式を得る。

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = (1 + u_1)(\cos x_7 - x_1)/(h - x_5) \\ \dot{x}_3 = x_4, \dot{x}_4 = (1 + u_1)(\sin x_7 - x_3)/(h - x_5) \\ \dot{x}_5 = x_6, \dot{x}_6 = u_1 - \sigma \\ \dot{x}_7 = x_8, \dot{x}_8 = u_2 \end{aligned} \quad (12)$$

以上の方程式を簡単につぎのように書くことにする：

$$\dot{x}(t) = f(x, u(t)) \quad (13)$$

† 第22回自動制御連合講演会で発表(昭54・10)

* 久保田鉄工(株) 大阪市浪速区船出町 2-22

** 大阪大学基礎工学部 豊中市待兼山町 1-1

(Received July 6, 1979)

2. 最適制御問題とその数値解

地表面上 $\theta=0$ の点に静止している荷を、時間 t_f で目標位置 ($\theta=\theta_1, Z=h_1$) に移動して静止させ、しかも移行中の荷振れを最小にするような制御を考えよう。したがって初期条件 $x(0)=x^0$ 、終端条件 $x(t_f)=x^1$ はそれぞれつぎのように与えられる。

$$x^0=(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0) \quad (14)$$

$$x^1=(\cos \theta_1, 0, \sin \theta_1, 0, h_1, 0, \theta_1, 0) \quad (15)$$

$\phi(x)=x-x^1$ とおくと、終端条件は $\phi(x(t_f))=0$ で与えられる。

それぞれの駆動トルクの大きさには限界があり、また旋回速度および荷重巻上げ速度にも限界がある。よって制御および状態変数につぎのような制約を課す：

$$0 \leq u_1(t) \leq u_{1\max}, \quad |u_2(t)| \leq u_{2\max} \quad (16)$$

$$|x_6(t)| \leq v_{1\max}, \quad |x_8(t)| \leq v_{2\max}, \quad (17)$$

状態制約条件 (17) を直接扱うことは困難であるから、Martensson の拘束超平面法⁴⁾を用いて、(17)式が成立するための十分条件を与えよう。その結果だけを書くと、 $\alpha_i > 0 (i=1 \sim 8, \alpha_5 \neq \alpha_6, \alpha_7 \neq \alpha_8)$ を任意の正のパラメータとして、 u_1, u_2 が

$$\left. \begin{aligned} & \max \{0, \sigma - \alpha_2(x_6 + v_{1\max}), \sigma - (\alpha_5 + \alpha_6)x_6 \\ & \quad - \alpha_5\alpha_6x_5\} \\ & \leq u_1 \leq \min \{u_{1\max}, \sigma - \alpha_1(x_6 - v_{1\max}), \\ & \quad \sigma - (\alpha_7 + \alpha_8)x_6 - \alpha_7\alpha_8(x_5 - x_{5\max})\} \\ & \max \{-u_{2\max}, -\alpha_4(x_8 + v_{2\max})\} \\ & \leq u_2 \leq \min \{u_{2\max}, -\alpha_3(x_8 - v_{2\max})\} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

を満足する場合には、(16)、(17)式が満たされる。

荷の振れ幅 $D(x)$ をつぎのように定義する：

$$D(x) = [(\cos x_7 - x_1)^2 + (\sin x_7 - x_3)^2]^{1/2}$$

ε を小さい正数、 c をペナルティ定数、 $b \in R^8$ を Lagrange 乗数ベクトルとして、評価関数を

$$J = \frac{c}{2} \|\phi(x(t_f))\|^2 + b^T \phi(x(t_f)) + \int_0^{t_f} L(x(t), u(t)) dt \quad (19)$$

ただし、 $L(x, u) = D^2(x) + \varepsilon[(u_1 - \sigma)^2 + u_2^2]$ とおく。

(18)式の制約条件のもとで(19)式を最小にし、かつ $\phi(x(t_f))=0$ を満足するような最適制御を2次のDDPを用いて計算した。

$\theta_1=120^\circ$ 、 $h_1=1$ の場合、適当なシステムのパラメータ値について最適制御を計算した。Fig. 2 は最初に与えた nominal な解であり、Fig. 3 は DDP による繰返し計算の結果得られた最適解を示している。終端条件、荷振れがともに計算によって改善されてい

Fig. 2 Nominal solution

Fig. 3 Optimal solution

ることがわかる。 t_f の値は、 $\phi(x(t_f)) \approx 0$ が満たされる範囲内で徐々に t_f を小さくし、その最小値を用いた。計算には大阪大学の ACOS 900 を用いた。プログラムのステートメント数は約 1,200、最適解を得るまでの CPU 時間は約 500 s であった。

最適制御の波形はかなり複雑であり、簡単なパターン化を行うことは適当でないと考えられる。実システムに対して適用するには、あらかじめ最適制御を計算しておき、プログラム制御を行うべきであろう。

最後に、旋回式クレーンについての資料・文献を頂いた長岡技術科学大学の伊藤廣助教授に謝意を表わす。

参考文献

- 1) K. Martensson: New Approaches to the Numerical Solution of Optimal Control Problems, Student Literature, Lund Institute of Technology (1972)
- 2) 土屋、伊藤：旋回式クレーンの荷物の振れ止め制御、計測と制御、13-10、41/49 (1974)
- 3) 山崎、伊藤、久村：第 21 回自動制御連合講演会前刷、409/410 (1978)
- 4) K. Martensson: A Constraining Hyperplane Technique for State Variable Constrained Optimal Control Problems, ASME J. Dynamic Syst. Meas. Contr., 380/389 (1973)