Complex System の相互干渉

高原 康彦*・中野 文平*

Interactions of Complex System

Yasuhiko TAKAHARA* and Bumpei NAKANO*

A complex large scale system is a central subject of systems engineering. However, there is no integrated theory for it partially because it has been treated on a specialized model built for a specific problem. This paper, in order to lay a foundation for a theory of a complex large scale system, introduces a general definition of a complex system in the framework of the general systems theory and characterizes an interaction which is one of the most basic concepts of a complex system.

This paper shows that every interaction consists of two primitive interactions, process and system interactions and that they have some unique representations. Models of complex systems are classified according to their types of interactions and it is shown as an application of the above analysis that this classification is relative to realization of a system, that is, a model can be transformed from one type into another without changing its significance by restructuring its input-output pair.

1. はじめに

システム工学の中心問題が複雑大規模システム（以下単に Complex System）であることはいうまでもない。この問題は通常、特定対象に対して特定の具体的モデルを建てて研究されている。このために、Complex System の研究は全体として統一された工学理論とはなっていない。本論文では Complex System を一般システム理論の枠組で定義し、それに基づいて Complex System の基本概念である相互干渉の分類と特徴づけについて考察を加える¹⁾。このような試みは統一的 Complex System 理論の基礎になるものである。

る。

Complex System の共通の認識は、システムを構成する要素自体が実はシステムになっていることである。本論文ではこの共通認識に基づき、Complex System S をつぎのように定義する。

【定義 1】 Complex System

$S_1, \dots, S_n$ をシステムを表現する集合とすると、つぎの S を要素 $S_1, \dots, S_n$ からなる Complex System と呼ぶ。

$$S \subset S_1 \times \dots \times S_n \quad (1)$$

各要素 S_i もいろいろな形を取りうるが、本論文では一般的なシステム認識の一つである入力＝出力システムとする¹⁾。すなわち

$$S_i \subset X_i \times Y_i \quad (2)$$

で、 X_i, Y_i はそれぞれ入力オブジェクト、出力オブジェクトと呼ばれる集合である。ただし、 $X_i = \mathcal{D}S_i (= \{x_i | (\exists y_i)((x_i, y_i) \in S_i)\})$ 、かつ $Y_i = \mathcal{R}S_i (= \{y_i | (\exists x_i)((x_i, y_i) \in S_i)\})$ とする。いま $X \subset X_1 \times \dots \times X_n$ 、 $Y \subset Y_1 \times \dots \times Y_n$ とすると、(1)式に対応した入力＝出力システム $S' \subset X \times Y$ が、 $((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) \in S' \Leftrightarrow ((x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)) \in S$ と定義できる。ただし $\mathcal{D}S' = X$ 、 $\mathcal{R}S' = Y$ である。 S' は S を入力＝出力システムとして認識したもので、以後 S と S' の区別は行わない。すなわち、 S は n 個のサブシステムからなる入力＝出力システムである。

Complex System S を構成する要素 $S_1, \dots, S_n$ が互いに独立ならば、 $S_1, \dots, S_n$ を統一して扱う意味はなく、Complex System を考えるうえで相互干渉の存在が基本である。従来、システムの表現（たとえば状態表現）が与えられ、その中にサブシステムが認識されると相互干渉の表現が自動的に決定される。この意味で相互干渉の意味は明確とされ、多くの Complex System の議論はこのように決定された相互干渉のうゑになされている²⁾。相互干渉をこのように理解することが怪しいものであることを示すために、つぎの例を考える。

* 東京工業大学大学院総合理工学研究科 横浜市緑区長津田町 4259

* Graduate School of Science and Engineering, Tokyo Institute of Technology, Yokohama
(Received December 4, 1978)

[例]

二つのサブシステム S_1 と S_2 が

$$S_1: y_1 = -x_1 - 3x_2$$

$$S_2: y_2 = -3x_2 - 2x_1 \quad x_1 + x_2 \leq 10 \quad (3)$$

と表現されるとする。 x_1, x_2, y_1, y_2 はすべて実数である。すなわち、 S_1 と S_2 の固有の入力を x_1, x_2 、固有の出力を y_1, y_2 とすれば、 S_1 への相互干渉は $u_1 = -3x_2$ 、 S_2 へのは $u_2 = -2x_1$ とするのが普通である。相互干渉をこのように決めたとき、 S_1 と S_2 の固有の行動は

$$y_1 = -x_1 \quad y_2 = -3x_2 \quad x_1 + x_2 \leq 10 \quad (4)$$

で与えられるとして研究は進められている。ところが、 S_1 と S_2 の入力、出力をそれぞれ $x_1, x_2; y_1, y_2$ と固定したとしても、実は表現は一意的ではなく、つぎの表現も可能である。

$$y_1 = x_1 + y_2 \quad y_2 = 3x_2 + 2y_1 \quad y_1 - 2y_2 \leq 30 \quad (5)$$

この場合相互干渉は、 $u_1 = y_2$ 、 $u_2 = 2y_1$ 、また固有の行動は

$$y_1 = x_1 \quad y_2 = 3x_2 \quad y_1 - 2y_2 \leq 30 \quad (6)$$

となり、(4)式とは本質的に異なる(符号の反転)。

以上のことからわかるように、Complex System では相互干渉の存在が本質的であり、また相互干渉をシステムの特定の表現によって定義すると結論を大きく誤まる可能性がある。本論文では定義1をもとにして、相互干渉の本質的意味を明らかにすることを試みる。

2. 相互干渉の定義と分類

上述のごとく、Complex System 論において最も基本的なことは相互干渉の存在である。それでは『システムが相互干渉を有する。あるいはシステムが独立である』ということはどういうことかが Complex System を考えるうえで最初に問題になる。この章では、これらの概念について定義を与え、相互干渉を分類し、それらの性質を考察し、この分類がある意味で十分であることを示す。

定義を与える前に記号と notation の説明をする。

$\bar{s}_i$ は $\bar{s}_i = (s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n) \in S_1 \times \dots \times S_{i-1} \times S_{i+1} \times \dots \times S_n$ を意味する。 $\bar{x}_i, \bar{y}_i$ についても同様である。さらに $\bar{s}_i$ は $\bar{s}_i = (\bar{x}_i, \bar{y}_i)$ と表現する。 $s = (x, y)$ も必要に応じて $s = (s_1, \dots, s_n)$ 、あるいは $s = (s_i, \bar{s}_i)$ と表現する。つぎに集合 $\{\bar{s}_i | (\exists s_i)((s_i, \bar{s}_i) \in S)\}$ を $\bar{S}_i$ で表わし、同様に $\bar{X}_i \equiv \{\bar{x}_i | (\exists s_i)(\exists \bar{y}_i)((s_i, \bar{x}_i, \bar{y}_i) \in S)\}$ 、 $\bar{Y}_i \equiv \{\bar{y}_i | (\exists s_i)(\exists \bar{x}_i)((s_i, \bar{x}_i, \bar{y}_i) \in S)\}$ とする。また、関数 $S_i^*: \bar{S}_i \rightarrow \mathcal{P}(S_i)$ ($\mathcal{P}(S_i)$ は S_i のべき集合を表わす。以下同じ)を $s_i \in S_i^*(\bar{s}_i) \Leftrightarrow$

$(s_i, \bar{s}_i) \in S$ で、関数 $\mathcal{D}S_i^*: S_i \rightarrow \mathcal{P}(X_i)$ を $x_i \in \mathcal{D}S_i^*(\bar{s}_i) \Leftrightarrow (\exists y_i)((x_i, y_i), \bar{s}_i) \in S$ で、関数 $\bar{S}_i^*: S_i \rightarrow \mathcal{P}(\bar{S}_i)$ を $\bar{s}_i \in \bar{S}_i^*(s_i) \Leftrightarrow (s_i, \bar{s}_i) \in S$ で定義する。さらに、 $S_i^*(\bar{s}_i)(x_i) \equiv \{y_i | ((x_i, y_i), \bar{s}_i) \in S\}$ である。

以上の準備のもとで Complex System の相互干渉を定義する。

【定義 2】 相互独立性

$S = S_1 \times \dots \times S_n$ となっているとき、 S は相互独立であるといい、 $S \subsetneq S_1 \times \dots \times S_n$ のとき S は相互干渉を有するという。また、 $S = S_i \times \bar{S}_i$ のとき S_i は $\bar{S}_i$ から独立であるといい、 $S \subsetneq S_i \times \bar{S}_i$ のとき S_i は $\bar{S}_i$ と相互干渉を有するという。

【定義 3】 非プロセス干渉 (Non-Process Interaction)

S_i が非プロセス干渉的とは、任意の $\bar{s}_i, \bar{s}_i' \in \bar{S}_i$ 、任意の $x_i \in X_i$ に対して、 $x_i \in \mathcal{D}S_i^*(\bar{s}_i) \cap \mathcal{D}S_i^*(\bar{s}_i')$ ならば $S_i^*(\bar{s}_i)(x_i) = S_i^*(\bar{s}_i')(x_i)$ が成立することを用いる。そうでないとき、 S_i はプロセス干渉を有する (Process Interaction) という。各 S_i が非プロセス干渉的のとき、全体システム S が非プロセス干渉的であるといい、そうでないとき S はプロセス干渉を有するという。

定義3の意味は、 $S_i^*(\cdot)(x_i): \bar{S}_i \rightarrow \mathcal{P}(Y_i)$ が定関数すなわち入力が x_i のときの S_i の行動は他のサブシステムの行動 $\bar{s}_i$ には依存しないことである。(4)式のモデルはプロセス干渉をもたない。つぎにプロセス干渉とは違ったタイプの相互干渉の定義を与える。

【定義 4】 強非システム干渉 (Strong Non-System Interaction)

S_i が強非システム干渉的とは、任意の $\bar{s}_i \in \bar{S}_i$ に対して $\mathcal{D}S_i^*(\bar{s}_i) = X_i$ 、すなわち $\mathcal{D}S_i^*$ が定関数であることをいう。ある $\bar{s}_i$ に対して $\mathcal{D}S_i^*(\bar{s}_i) \neq X_i$ となるとき、 S_i は弱いシステム干渉を有する (Weak System Interaction) という。 S が強非システム干渉的とは、各 S_i が強非システム干渉的のことをいい、そうでないとき S は弱いシステム干渉を有するという。

【定義 5】 弱非システム干渉 (Weak Non-System Interaction)

S_i が弱非システム干渉的とは、 $X = X_i \times \bar{X}_i$ が成立することであり、 $X \subsetneq X_i \times \bar{X}_i$ のとき S_i は強いシステム干渉を有する (Strong System Interaction) という。 $X = X_1 \times \dots \times X_n$ のとき、 S は弱非システム干渉的であるといい、 $X \subsetneq X_1 \times \dots \times X_n$ のとき、 S は強いシステム干渉を有するという。

システム干渉というのは、本質的にはサブシステム S_i の取りうる入力の集合が、他のサブシステムの行

動から影響を受けるかどうかを問題とする。(3)式で、制約条件 $x_1 + x_2 \leq 10$ は強いシステム干渉の存在を意味している。(3)式で制約式を取り除いてしまえば、弱非システム干渉的になる。他のサブシステムの行動として、入力、出力の組合せを考えるかあるいは単に入力のみを考えるかで干渉の強弱が生ずる。これらの二つのシステム干渉の間にはつぎの関係がある。以下証明はすべて付録にまわす。

【命題 1】 S_i が強非システム干渉的ならば、弱非システム干渉的である。逆に S_i が強いシステム干渉を有するならば弱いシステム干渉を有する。

プロセス干渉とシステム干渉が独立な概念であることは紙数の都合上省略するが、実例を作ること示せる。すなわち

【命題 2】 プロセス干渉とシステム干渉は独立な概念である。

つぎに相互干渉は、この二つの概念、プロセス干渉とシステム干渉で cover されていることを示す。

【命題 3】 つぎの三つは同等である：

- (1) $S = S_i \times \bar{S}_i$ すなわち S_i は $\bar{S}_i$ から独立。
- (2) S_i が強非システム干渉的かつ非プロセス干渉的。
- (3) S_i が弱非システム干渉的かつ非プロセス干渉的および $\bar{S}_i$ が非プロセス干渉的。

命題 3 は、プロセス干渉およびシステム干渉がなければシステムに相互干渉はなく、また相互干渉がなくなるのはそのときに限ることを示している。(4)式で、制約条件を除いたときは何ら干渉は存在しない。命題 2 と考え合せると、相互干渉は基本的にはプロセス干渉とシステム干渉から構成されていると考えてよいことになる。なお命題 3 で S_i が独立であるための条件は、(2)のほうは強非システム干渉性を用いて与えているが、これを弱めたらその代わりに $\bar{S}_i$ が非プロセス干渉的ということが必要になることを(3)は示している。上記命題は S_i の独立性を示しているが、システム全体の独立性は命題 3 からつぎのように導ける。まず

【補題 1】 各 S_i が非プロセス干渉的なときは、各 $\bar{S}_i$ が非プロセス干渉的である。
が成立する。その結果

【命題 4】 $S = S_1 \times \cdots \times S_n$ であるための必要十分条件は、 S が弱非システム干渉的かつ非プロセス干渉的なことである。

以上で、一般に相互干渉は基本的な二つの相互干渉の形、すなわちプロセス干渉とシステム干渉から構成されていることを示した。つぎにプロセス干渉とシ

テム干渉の性質を調べる。特に Complex System S 自体を関数システム (たとえば S が(3)式のような静的システムであるとか、あるいは初期状態が固定されたシステム) とすることにより、基本的相互干渉の間の関係が明らかになってくる。まず最初につぎの補題を与える。

【補題 2】 各 S_i が関数ならば S も関数である。特に $S = S_1 \times \cdots \times S_n$ のときは逆も成り立つ。

S が関数のときは、つぎの命題によってプロセス干渉が特徴づけられる。

【命題 5】 S が関数のとき、 S がプロセス干渉を有することと、ある S_i が非関数であることは同値である。同じことであるが、 S が非プロセス干渉的ということと、各 S_i が関数ということは同値である。

このことにより、 S が関数のときは関数でない S_i が存在するかどうかで、 S がプロセス干渉を有するかどうか判断できる。(3)式の例では、 S_1 と S_2 は関数的でないからプロセス干渉を有することがわかる。この事情はつぎの補題によってより明白に与えられる。

【補題 3】 S_i が関数のとき、 S_i は非プロセス干渉的である。特に S が関数のときは逆も成り立つ。

つぎにシステム干渉について考察する。命題 1 により強非システム干渉性は弱非システム干渉性を含意するが、関数システムの場合は強非システム干渉性は弱非システム干渉性の他に $\bar{S}_i$ についての情報を一部含んでいることを示せる。

【補題 4】 S が関数のときは、 S_i が強非システム干渉的ならば $\bar{S}_i$ は関数、したがって非プロセス干渉的である。

補題 4 によりつぎの系をうる。

【系 1】 S が関数のとき、 S が強非システム干渉的なら S は非プロセス干渉的である。

S_i が強非システム干渉的であるための十分条件、特に S が関数のときの必要十分条件は、つぎの補題で与えられる。

【補題 5】 $\bar{S}_i$ が非プロセス干渉的で S_i が弱非システム干渉的ならば、 S_i は強非システム干渉的である。特に S が関数なら逆も成立する。

【命題 6】 S が関数ならば、 S が相互独立であるための必要十分条件は、各 S_i が強非システム干渉的であることである。

命題 6 に示すように、強非システム干渉性の定義は相当強い内容を含んでいることがわかる。強非システム干渉性の特徴づけは補題 5 で完全に与えられている。

3. 相互干渉の表現

1 章では、表現によって相互干渉を定義することは不適切であることを指摘した。逆に、明示的表現なしに相互干渉を取扱うのは不便である。この章では、2 章で定義した相互干渉が、ある意味でユニークな表現をもつことを示す。基本的相互干渉に与えられた名称は、これらの表現に対応してつけられたものである。まず始めに、 S_i が弱非システム干渉的な場合の表現、すなわちプロセス干渉のみが存在する可能性がある場合の表現を与える。（一般的な動的システムの状態空間表現に対しての基本事項は参考文献 1 を参照のこと）。

【命題 7】 S_i が弱非システム干渉的、すなわち $X = X_i \times \bar{X}_i$ であることと、つぎの表現 $P_i: C \times X_i \times \bar{X}_i \rightarrow Y_i$ を有することは同等である。ただし集合 C は Complex System S の状態空間である。

命題 7 は、 S_i が弱非システム干渉的なときはプロセス干渉の存在が $\bar{x}_i$ を通して存在するだけでなく、状態空間 C が各 S_i に共通にとられるという意味でも相互依存関係が存在しうること示している。各 S_i が他のサブシステムと独立な状態空間をもつ表現のほう都合が良いことが多いが、それは S_i が強非システム干渉的なときに与えられる。

【命題 8】 S_i が強非システム干渉的であることと、ある集合 C_i, U_i および適当な関数 $P_i: C_i \times X_i \times U_i \rightarrow Y_i$ および $K_i: \bar{S}_i \rightarrow U_i$ が存在して、 S_i が $y_i = P_i(c_i, x_i, u_i)$ & $u_i = K_i(\bar{s}_i)$ で与えられることとは同等である。ここで u_i は他のサブシステムからの影響を表す。

命題 8 によると、相互干渉としてはプロセス干渉が表現されるだけで、他の変数は独立であることがわかる。特に、全体システム S が強非システム干渉的なときの表現における状態空間 C は $C = C_1 \times \dots \times C_n$ で与えられ、各サブシステムごとに独立に状態変数を選ぶことができる。この点が弱非システム干渉的なときとの重要な表現における差である。

つぎに、非プロセス干渉的すなわちシステム干渉のみが存在する可能性がある表現をつぎの命題で与える。そのために非プロセス干渉的な場合に対する表現を定義しておく。

【定義 6】 S_i の非プロセス干渉表現

ある集合 C_i とある関係 $P_i: C_i \times X_i \rightarrow Y_i$ が存在して、任意の s_i に対して $P_i|C_i \times X_i(s_i)$ が $S_i^*(s_i)$ の状態表現になっているとき、これを S_i の非プロセス干渉表現とよぶ。ただし $X_i(s_i) = \mathcal{D}S_i^*(s_i)$ である。

【命題 9】 S_i が非プロセス干渉的であることと、それが非プロセス干渉表現をもつことは同等である。

以上により、強非システム干渉的、弱非システム干渉的、非プロセス干渉的な場合に対する表現を与えた。命題 9 は見かけ上他のサブシステムと独立な形で表現されているが、実は $X_i(s_i)$ が一般には X_i とは異なるゆえ、 s_i に依存して $X_i(s_i)$ が決まるという形を通して相互干渉が存在する。

4. Complex System の分類

2 章で、相互干渉は独立な二つの基本的相互干渉から構成されていることを示した。これに基づいて、Complex System の分類を考えることができる。システム干渉は強いシステム干渉を有するとき、弱いシステム干渉を有するとき、弱非システム干渉的なとき、強非システム干渉的な場合の四つが存在するが、強いシステム干渉の否定が弱非システム干渉、弱いシステム干渉の否定が強非システム干渉であるから、実質的には強いシステム干渉、弱いシステム干渉を有するが、強いシステム干渉を有しない場合、強非システム干渉の 3 分類になる。一方、プロセス干渉のほうはプロセス干渉を有する場合と、有しない場合の 2 分類があるので、プロセス干渉とシステム干渉の独立性から、Complex System は全部で 6 通りに分類される。1 章の例 (3) はプロセス干渉および強いシステム干渉を有する例である。制御系の Complex System のモデルとしては、つぎの形のものがよく使われている²⁾。

$$\dot{x} = f(x_1, \dots, x_n, t)$$

あるいは

$$\dot{x}_i = f_i(x_i, t) + g_i(\bar{x}_i, t).$$

このような Interconnected System のモデルは、主としてプロセス干渉に注目したもので、プロセス干渉を有しかつ弱非システム干渉的なものに分類されるシステムである。また、いま一つの代表的モデルである経済システムモデル、たとえば Arrow-Hurwicz らのモデルでは、Complex System 表現を

$$\sum_{i=1}^n g_i(x_i) \leq g_0 \quad (\text{Global Constraints})$$

$$h_i(x_i) \leq h_{i0} \quad (\text{Local Constraints})$$

で与えている。これは相互干渉を変数間の制約条件で与えているもので、主としてシステム干渉に注目しているモデルである。事実、上記モデルは強いシステム干渉を有するが、プロセス干渉は有していない。ここで注意すべきことは、具体的システム（モデルではない）の分類を考えると、Complex System の上記の分類はある意味で相対的なものである。たとえば、経

済システムモデルではあまりプロセス干渉は考察されていない。しかし、このことはプロセス干渉がないということではなく、モデルの入力、出力オブジェクトとして何を認識するかによっている。入力、出力の認識の仕方によっては、プロセス干渉が存在するモデルで表現される Complex System も、システム干渉のみのモデルに変換できる。3章の応用としてこれを証明する。

【命題10】 プロセス干渉は、入力オブジェクトの認識を変えることによりシステム干渉に変換できる。

逆に、システム干渉をプロセス干渉に変換する問題は、ラグランジュ乗数とかかかわっている。紙数の都合上ここでは論じない。

5. 結 語

この論文では、Complex Systemと相互干渉の定義、またそれらの性質についてできる限り一般的考察を行った。つきに行われるべきことは、この論文の結果に基づく従来の Complex System 理論の再考である。特に、Coordinationの理論は相互干渉の形と密接に結びついており、それらの考察については後報の予定である³⁾。

参 考 文 献

- 1) M. D. Mesarovic and Y. Takahara: General Systems Theory, Academic Press (1975)
- 2) 高原康彦：大規模システムの理論について，経営科学，19-5, 19-6 (1975)
- 3) Mesarovic, Macko and Takahara: Theory of Hierarchical, Multilevel Systems, Academic Press (1971)

《付録（証明）》

命題 1: $X_i \times \bar{X}_i \subseteq X$ を示せばよい。任意に $x_i \in X_i$, $\bar{x}_i \in \bar{X}_i$ をとると、適当な y_i, s_i, x_i', y_i' および $\bar{y}_i'$ が存在して、 $((x_i, y_i), s_i) \in S$ および $((x_i', y_i'), (\bar{x}_i, \bar{y}_i')) \in S$ が成立する。 $s_i' = (\bar{x}_i, \bar{y}_i')$ とおけば、仮定により $\mathcal{D}S_i^*(s_i) = \mathcal{D}S_i^*(s_i')$ である。いま $x_i \in \mathcal{D}S_i^*(s_i)$ だから、 $x_i \in \mathcal{D}S_i^*(s_i')$ となる。ゆえに $(x_i, \bar{x}_i) \in X$ 。よって $X_i \times \bar{X}_i \subseteq X$ 。後半は対偶をとれば明らか。(Q. E. D.)

命題 3: (1) $\Rightarrow$ (2) を示す。任意に s_i, s_i' を取り、 $x_i \in \mathcal{D}S_i^*(s_i)$ とする。このとき適当な y_i' が存在して $((x_i, y_i'), s_i) \in S$ である。仮定により $S = S_i \times \bar{S}_i$ だから $((x_i, y_i'), s_i) \in S$ である。よって $x_i \in \mathcal{D}S_i^*(s_i')$ ，すなわち $\mathcal{D}S_i^*(s_i) \subseteq \mathcal{D}S_i^*(s_i')$ 。同様に、逆の包含関係も示せるから $\mathcal{D}S_i^*(s_i) = \mathcal{D}S_i^*(s_i')$ 。よって S_i は強非システム干渉的である。つきに、いま $x_i \in$

$\mathcal{D}S_i^*(s_i) \cap \mathcal{D}S_i^*(s_i')$, $y_i \in S_i^*(s_i)(x_i)$ とする。このとき $((x_i, y_i), s_i) \in S$ である。仮定より $S = S_i \times \bar{S}_i$ だから $((x_i, y_i), s_i) \in S$ となる。よって $y_i \in S_i^*(s_i')(x_i)$ 。ゆえに $S_i^*(s_i)(x_i) \subseteq S_i^*(s_i')(x_i)$ 。逆の包含関係も同様に示せるから $S_i^*(s_i)(x_i) = S_i^*(s_i')(x_i)$ 。よって S_i は非プロセス干渉的である。

(2) $\Rightarrow$ (3) を示す。命題 1 により強非システム干渉的ならば弱非システム干渉的だから、 $\bar{S}_i$ が非プロセス干渉的であることを示せばよい。いま $\bar{x}_i \in \mathcal{D}\bar{S}_i^*((x_i, y_i) \cap \mathcal{D}S_i^*((x_i', y_i')))$ とすると、適当な $\bar{y}_i, \bar{y}_i'$ が存在して $((x_i, y_i), (\bar{x}_i, \bar{y}_i)) \in S$ & $((x_i', y_i'), (\bar{x}_i, \bar{y}_i')) \in S$ 。ゆえに $\bar{y}_i \in \bar{S}_i^*((x_i, y_i))(\bar{x}_i)$ 。仮定により $\mathcal{D}S_i^*$ は定関数ゆえ $x_i' \in \mathcal{D}S_i^*((\bar{x}_i, \bar{y}_i)) = \mathcal{D}S_i^*((\bar{x}_i, \bar{y}_i'))$ 。よって $x_i' \in \mathcal{D}S_i^*((\bar{x}_i, \bar{y}_i)) \cap \mathcal{D}S_i^*((\bar{x}_i, \bar{y}_i'))$ 。 S_i は非プロセス干渉的だから $S_i^*((\bar{x}_i, \bar{y}_i))(x_i') = S_i^*((\bar{x}_i, \bar{y}_i'))(x_i')$ 。ところが $y_i' \in S_i^*((\bar{x}_i, \bar{y}_i'))(x_i')$ ゆえ $y_i' \in S_i^*((\bar{x}_i, \bar{y}_i))(x_i')$ 。すなわち $\bar{y}_i \in \bar{S}_i^*((x_i', y_i'))(\bar{x}_i)$ 。よって $\bar{S}_i^*((x_i, y_i))(\bar{x}_i) \subseteq \bar{S}_i^*((x_i', y_i'))(\bar{x}_i)$ 。逆の包含関係も同様に示せるから $\bar{S}_i$ は非プロセス干渉的である。

(3) $\Rightarrow$ (1) を示す。 $S_i \times \bar{S}_i \subseteq S$ を示せばよい。いま、 $((x_i, y_i), (\bar{x}_i, \bar{y}_i)) \in S_i \times \bar{S}_i$ とする。このとき適当な $(\bar{x}_i', \bar{y}_i')$, (x_i', y_i') が存在して、 $((x_i, y_i), (\bar{x}_i', \bar{y}_i')) \in S$ & $((x_i', y_i'), (\bar{x}_i, \bar{y}_i)) \in S$ となる。仮定より $X = X_i \times \bar{X}_i$ だから $(x_i, \bar{x}_i) \in X$ 。よって適当な $(y_i'', \bar{y}_i'') \in Y$ が存在して $((x_i, y_i''), (\bar{x}_i, \bar{y}_i'')) \in S$ となる。ゆえに $x_i \in \mathcal{D}S_i^*((\bar{x}_i', \bar{y}_i')) \cap \mathcal{D}S_i^*((\bar{x}_i, \bar{y}_i''))$ 。仮定より S_i は非プロセス干渉的だから $S_i^*((\bar{x}_i', \bar{y}_i'))(x_i) = S_i^*((\bar{x}_i, \bar{y}_i''))(x_i)$ 。 $y_i \in S_i^*((\bar{x}_i', \bar{y}_i'))(x_i)$ だから $y_i \in S_i^*((\bar{x}_i, \bar{y}_i''))(x_i)$ ，すなわち $((x_i, y_i), (\bar{x}_i, \bar{y}_i')) \in S$ 。よって $\bar{x}_i \in \mathcal{D}\bar{S}_i^*((x_i', y_i')) \cap \mathcal{D}\bar{S}_i^*((x_i, y_i))$ 。 $\bar{S}_i$ は、非プロセス干渉的ゆえ $\bar{S}_i^*((x_i', y_i'))(\bar{x}_i) = \bar{S}_i^*((x_i, y_i))(\bar{x}_i)$ 。ここで $\bar{y}_i \in \bar{S}_i^*((x_i', y_i'))(\bar{x}_i)$ だから $\bar{y}_i \in \bar{S}_i^*((x_i, y_i))(\bar{x}_i)$ となる。よって $((x_i, y_i), (\bar{x}_i, \bar{y}_i)) \in S$ 。ゆえに $S_i \times \bar{S}_i \subseteq S$ をうる。(Q. E. D.)

補題 1: $n=3$ としても一般性を失わない。いま $(x_2, x_3) \in \mathcal{D}\bar{S}_1^*((x_1, y_1)) \cap \mathcal{D}\bar{S}_1^*((x_1', y_1'))$ とする。このとき適当な (y_2, y_3) , (y_2', y_3') が存在して $((x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)) \in S$ & $((x_1', y_1'), (x_2, y_2'), (x_3, y_3')) \in S$ となる。 $(y_2'', y_3'') \in \bar{S}_1^*((x_1, y_1))(x_2, x_3)$ を任意にとると $((x_1, y_1), (x_2, y_2''), (x_3, y_3'')) \in S$ となる。 S_2 は非プロセス干渉的だから $S_2^*((x_1', y_1'), (x_3', y_3'))(x_2) = S_2^*((x_1, y_1), (x_3, y_3''))(x_2)$ となる。ここで、 $y_2'' \in S_2^*((x_1, y_1), (x_3, y_3''))(x_2)$ だから $y_2'' \in S_2^*((x_1', y_1'), (x_3, y_3'))(x_2)$ が成り立つ。よって $((x_1', y_1'), (x_2, y_2''), (x_3, y_3')) \in S$ 。同様にして、

$((x_1', y_1'), (x_2, y_2''), (x_3, y_3'')) \in S$. したがって $(y_2'', y_3'') \in \bar{S}_1 * ((x_1', y_1')((x_2, x_3))$, すなわち $\bar{S}_1 * ((x_1, y_1))((x_2, x_3)) \subseteq \bar{S}_1 * ((x_1', y_1')((x_2, x_3))$. 逆の包含関係も同様に見えるから $\bar{S}_1$ は非プロセス干渉的である. $\bar{S}_2, \bar{S}_3$ についても同様. (Q. E. D.)

命題 4: 命題 3 と補題 1 より明か. (Q. E. D.)

補題 2: まず, 前半を示す. 任意に $(x, y), (x, y') \in S$ を取る. $S \subseteq S_1 \times \dots \times S_n$ だから各 i について $(x_i, y_i), (x_i, y_i') \in S_i$ となる. ここで $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$, $y' = (y_1', \dots, y_n')$ とする. S_i は関数ゆえ $y_i = y_i'$. ゆえに $y = y'$ となり S は関数である. 後半をつぎに示す. 各 i について $(x_i, y_i), (x_i, y_i') \in S_i$ を任意にとる. $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$, $y' = (y_1', \dots, y_n')$ とすると, 仮定より $S = S_1 \times \dots \times S_n$ だから $(x, y), (x, y') \in S$. S は関数ゆえ $y = y'$. よって $y_i = y_i'$. S_i は関数である. (Q. E. D.)

命題 5: ここでは後半を示す. まず必要性を示す. $(x_i, y_i), (x_i, y_i') \in S_i$ とする. このとき適当な $\bar{s}_i, \bar{s}_i'$ が存在して $((x_i, y_i), \bar{s}_i), ((x_i, y_i'), \bar{s}_i') \in S$ となる. よって $x_i \in \mathcal{D}S_i * (\bar{s}_i) \cap \mathcal{D}S_i * (\bar{s}_i')$. S は仮定より非プロセス干渉的ゆえ $S_i * (\bar{s}_i)(x_i) = S_i * (\bar{s}_i')(x_i)$ となる. いま $y_i' \in S_i * (\bar{s}_i')(x_i)$ だから $y_i' \in S_i * (\bar{s}_i)(x_i)$. よって $((x_i, y_i'), \bar{s}_i) \in S$. S は関数ゆえ $y_i = y_i'$. よって S_i は関数. 十分性は明か. (Q. E. D.)

補題 3: いま $x_i \in \mathcal{D}S_i * (\bar{s}_i) \cap \mathcal{D}S_i * (\bar{s}_i')$ とする. S_i は関数ゆえ, 唯一の y_i が存在して $\bar{S}_i * (\bar{s}_i)(x_i) = S_i * (\bar{s}_i')(x_i) = \{y_i\}$ となるから, S_i は非プロセス干渉的である. 逆は命題 5 より明か. (Q. E. D.)

補題 4: $(\bar{x}_i, \bar{y}_i), (\bar{x}_i, \bar{y}_i') \in \bar{S}_i$ とすると, 適当な x_i, y_i, x_i', y_i' が存在して $((x_i, y_i), (\bar{x}_i, \bar{y}_i)), ((x_i', y_i'), (\bar{x}_i, \bar{y}_i')) \in S$ となる. ここで $\mathcal{D}S_i *$ は定関数ゆえ $x_i \in \mathcal{D}S_i * (\bar{x}_i, \bar{y}_i')$ となる. よって適当な y_i'' に対して $((x_i, y_i''), (\bar{x}_i, \bar{y}_i')) \in S$ となる. S は関数だから $y_i = y_i''$, $\bar{y}_i = \bar{y}_i'$. よって $\bar{S}_i$ は関数となる. また補題 3 により $\bar{S}_i$ が非プロセス干渉的になることは明か. (Q. E. D.)

補題 5: $(\bar{x}_i, \bar{y}_i), (\bar{x}_i', \bar{y}_i') \in \bar{S}_i$ とすると, 適当な x_i, y_i, x_i', y_i' が存在して $((x_i, y_i), (\bar{x}_i, \bar{y}_i)), ((x_i', y_i'), (\bar{x}_i', \bar{y}_i')) \in S$. よって $x_i \in \mathcal{D}S_i * (\bar{x}_i, \bar{y}_i)$. 仮定より $X = X_i \times \bar{X}_i$ ゆえ, 適当な $y_i'', \bar{y}_i''$ が存在して $((x_i, y_i''), (\bar{x}_i', \bar{y}_i'')) \in S$. ゆえに $\bar{x}_i' \in \mathcal{D}\bar{S}_i * ((x_i, y_i'')) \cap \mathcal{D}\bar{S}_i * ((x_i, y_i'))$. $\bar{S}_i$ は非プロセス干渉的ゆえ, $\bar{S}_i * ((x_i, y_i''))(\bar{x}_i') = \bar{S}_i * ((x_i, y_i'))(\bar{x}_i')$. ところが $\bar{y}_i' \in \bar{S}_i * ((x_i', y_i'))(\bar{x}_i')$ ゆえ, $\bar{y}_i' \in \bar{S}_i * ((x_i, y_i''))(\bar{x}_i')$ となる. ゆえに $((x_i, y_i''), (\bar{x}_i', \bar{y}_i')) \in S$. よって $x_i \in \mathcal{D}S_i * ((\bar{x}_i', \bar{y}_i'))$. ゆえに $\mathcal{D}S_i * ((\bar{x}_i, \bar{y}_i)) \subseteq \mathcal{D}$

$S_i * ((\bar{x}_i', \bar{y}_i'))$. S_i は強非システム干渉的である. 逆は命題 1 と補題 4 より明か. (Q. E. D.)

命題 6: 必要性は命題 3 より明か. 十分性は系 1 と命題 2, 3 より明か. (Q. E. D.)

命題 7: $\Rightarrow$ を示す. $x_i, \bar{x}_i$ を任意にとると $X = X_i \times \bar{X}_i$ ゆえ, $x = (x_i, \bar{x}_i) \in X$ である. よって, ある y が存在して $(x, y) \in S$ である. 数学的一般システム論¹⁾の結果によると, ある集合 C と関数 $P: C \times X \rightarrow Y$ が存在して $(x, y) \in S \Leftrightarrow (\exists c)(y = P(c, x))$ となる. この P から $(x_i, y_i) \in S_i \Leftrightarrow (\exists c)(\exists \bar{x}_i)(y_i = P_i(c, x_i, \bar{x}_i))$ となる $P_i: C \times X_i \times \bar{X}_i \rightarrow Y_i$ が得られる. 逆は明か. (Q. E. D.)

命題 8: $\Rightarrow$ を示す. 任意の $\bar{s}_i$ に対して $\mathcal{D}S_i * (\bar{s}_i) = X_i$ だから, $S_i * (\bar{s}_i) = \{(x_i, y_i) | ((x_i, y_i), \bar{s}_i) \in S\}$ はある集合 $C_i(\bar{s}_i)$ およびある関数 $P_i(\bar{s}_i): C_i(\bar{s}_i) \times X_i \rightarrow Y_i$ によって $y_i = P_i(\bar{s}_i)(c_i, x_i)$ と表現できる. ここで $C_i = \{\bar{s}_i \in S_i | C_i(\bar{s}_i)\}$ とし, また関数 $P_i: C_i \times X_i \times \bar{S}_i \rightarrow Y_i$ を $P_i(c_i, x_i, \bar{s}_i) \equiv P_i(\bar{s}_i)(c_i(\bar{s}_i), x_i)$ で定義する. ここで $C_i(\bar{s}_i)$ は C_i の $\bar{s}_i$ 軸への射影である. $K_i = I$ (identity), および $U_i = \bar{S}_i$ とすれば $(x_i, y_i) \in S_i \Leftrightarrow (\exists \bar{s}_i)((x_i, y_i) \in S_i * (\bar{s}_i)) \Leftrightarrow (\exists \bar{s}_i)(\exists c_i \in C_i)(y_i = P_i(c_i, x_i, \bar{s}_i))$ となる. つぎに $\Leftarrow$ を示す. $S_i * (\bar{s}_i) = \{(x_i, y_i) | (\exists c_i \in C_i)(y_i = P_i(c_i, x_i, K_i(\bar{s}_i)) \& x_i \in X_i)\}$ だから, 任意の $\bar{s}_i$ に対して $\mathcal{D}S_i * (\bar{s}_i) = X_i$, つまり S_i は強非システム干渉的である. (Q. E. D.)

命題 9: $\Rightarrow$ を示す. S_i の状態表現を $P_i: C_i \times X_i \rightarrow Y_i$ とする. このとき $P_i | C_i \times X_i(\bar{s}_i)$ が $S_i * (\bar{s}_i)$ の表現になっていることを示す. $(x_i, y_i) \in S_i * (\bar{s}_i)$ とすると $((x_i, y_i), \bar{s}_i) \in S$ および $x_i \in \mathcal{D}S_i * (\bar{s}_i)$ だから, ある c_i が存在して $y_i = P_i(c_i, x_i) \& x_i \in \mathcal{D}S_i * (\bar{s}_i)$ である. 逆にある c_i が存在して $y_i = P_i(c_i, x_i) \& x_i \in \mathcal{D}S_i * (\bar{s}_i)$ とすると, $(x_i, y_i) \in S_i \& x_i \in \mathcal{D}S_i * (\bar{s}_i)$ が成立する. したがって, ある $\bar{s}_i'$ に対して $((x_i, y_i), \bar{s}_i') \in S$ となる. よって, $x_i \in \mathcal{D}S_i * (\bar{s}_i') \& y_i \in S_i * (\bar{s}_i')(x_i)$ より $x_i \in \mathcal{D}S_i * (\bar{s}_i) \cap \mathcal{D}S_i * (\bar{s}_i')$, つまり $S_i * (\bar{s}_i)(x_i) = S_i * (\bar{s}_i')(x_i) \ni y_i$ となる. よって, $y_i \in S_i * (\bar{s}_i)(x_i)$, すなわち $(x_i, y_i) \in S_i * (\bar{s}_i)$. つぎに $\Leftarrow$ を示す. $x_i \in \mathcal{D}S_i * (\bar{s}_i) \cap \mathcal{D}S_i * (\bar{s}_i')$ および $y_i \in S_i * (\bar{s}_i)(x_i)$ を任意にとると, ある c_i に対して $y_i = P_i(c_i, x_i)$ だから $y_i \in S_i * (\bar{s}_i')(x_i)$. よって $S_i * (\bar{s}_i)(x_i) \subseteq S_i * (\bar{s}_i')(x_i)$. 逆の包含関係も示せるから S_i は非プロセス干渉的である. (Q. E. D.)

命題 10: S が, 強非システム干渉的かつプロセス干渉を有するとする. 命題 8 により, S_i は $y_i = P_i(c_i, x_i, u_i) \& u_i = K_i(\bar{s}_i)$ で表現される. ここで, 入力オブジェクトを $\bar{X}_i = X_i \times U_i$ としたとき得られる Com-

plex System とサブシステムをそれぞれ $\tilde{S}_i, \tilde{S}_i$ とすると, $(\tilde{x}, y) \in \tilde{S} \Leftrightarrow (\exists c = (c_1, \dots, c_n))(\forall i)(y_i = P_i(c_i, x_i, u_i) \ \& \ u_i = K_i(\tilde{s}_i))$ および $(\tilde{x}_i, y_i) \in \tilde{S}_i \Leftrightarrow (\exists \tilde{s}_i)(\exists c_i)(y_i = P_i(c_i, x_i, u_i) \ \& \ u_i = K_i(\tilde{s}_i))$ である. ただし, $\tilde{x} = (x, u)$ および $\tilde{x}_i = (x_i, u_i)$ である. $\tilde{S}_i$ が非プロセス干渉的であることを示す. $\tilde{x}_i \in \mathcal{D}\tilde{S}_i^*(\tilde{s}_i) \cap \mathcal{D}\tilde{S}_i^*(\tilde{s}_i')$ および $y_i \in \tilde{S}_i^*(\tilde{s}_i)(\tilde{x}_i)$ とする. $((\tilde{x}_i, y_i), \tilde{s}_i) \in \tilde{S}$ ゆえ, ある c_i に対して $y_i = P_i(c_i, x_i, u_i) \ \& \ u_i = K_i(\tilde{s}_i)$ である. ここに $\tilde{s}_i = (\tilde{x}_i, \tilde{y}_i) = (\tilde{x}_i, \tilde{u}_i, \tilde{y}_i)$ および $\tilde{x}_i =$

(x_i, u_i) . $\tilde{x}_i \in \mathcal{D}\tilde{S}_i^*(\tilde{s}_i')$ ゆえ $u_i = K_i(\tilde{s}_i')$ である. ここに $\tilde{s}_i' = (\tilde{x}_i', \tilde{u}_i', \tilde{y}_i')$. したがって $u_i = K_i(\tilde{s}_i) = K_i(\tilde{s}_i')$. これより $y_i \in \tilde{S}_i^*(\tilde{s}_i')(\tilde{x}_i)$ すなわち $\tilde{S}_i^*(\tilde{s}_i)(\tilde{x}_i) \subseteq \tilde{S}_i^*(\tilde{s}_i')(\tilde{x}_i)$ となる. 逆の包含関係も同様に示せるから, $\tilde{S}_i$ は非プロセス干渉的である. また $\tilde{x}_i \in \mathcal{D}\tilde{S}_i^*(\tilde{s}_i) \Leftrightarrow u_i = K_i(\tilde{s}_i) \ \& \ x_i \in X_i$ で, かつ S_i はプロセス干渉を有するから $\mathcal{D}\tilde{S}_i^*(\tilde{s}_i) \neq \tilde{X}_i = X_i \times U_i$ となり, $\tilde{S}_i$ は弱いシステム干渉を有する. (Q. E. D.)