分布遅れをもつ線形離散時間系の感度を 考慮した準最適制御

森 泰 親*・示 村 悦二郎*

Suboptimal Control for Linear Discrete-Time System with Distributed-Delay
by Considering Sensitivities

Yasuchika MORI* and Etsujiro SHIMEMURA*

This paper is concerned with a method of synthesizing suboptimal control by considering sensitivities for a class of linear stochastic discrete-time systems with distributed-delay. The well-known "minimal variance control law", derived by Åström, for this type of optimal control problem, however, is liable to the fault that it wastes enormous control energy and can be extremely sensitive to the system parameter variation under certain circumstances. The waste and oversensitiveness could be interpreted as a consequence of the fact that the minimal variance control law has a feature of feedforward control and is supported by the pole-zero cancellation technique. To overcome these undesired and unpractical aspects, the authors propose in this paper, the "extended minimal variance control law" which keeps small not only the variance of output but also its sensitivity to the system parameter variation. This control law has a design parameter, giving a designer one degree of freedom to choose appropriately according to the design purpose. With increasing the value of this design parameter, it is shown that the variance of output increases and its sensitivity decreases. One method of choosing the optimal value of the design parameter to realize the desired performance is proposed. Finally numerical examples are shown to confirm the effectiveness of the proposed method.

1. はじめに

制御対象を数式モデルで記述する場合、近似による誤差、測定の際の誤差などを避けることはできない。

また動作中にも制御対象の特性が変動することもあるが、それらは直接測定できないことが多く、結局数式モデルのパラメータに誤差を生じたことと等価になる。そのようなパラメータに含まれる誤差は、制御性能を劣下させるばかりでなく、時には制御系を不安定にする原因ともなる。そこで当然パラメータ変動による影響の少ない制御方策をとらねばならない。

本論文では、計算機で制御されるプロセスの数式モデルとして多く現われる、雑音で乱されている分布遅れをもつ線形離散時間系について、制御対象の特性変動による悪影響の少ない準最適制御系の構成法を検討する。このような問題においては多くの場合、数式モデルを入出力モデルとして表現し、制御量の分散を最小にする制御を求めることが行われている¹⁾。一方この問題は、数式モデルを状態空間モデルによって記述することにより最適レギュレータ問題に帰着させて解くこともできるが、Riccati 方程式の次元が非常に高くなり計算は容易ではない。これに比べると制御量の最小分散の計算ははるかに容易であり、その点ではより実用的であるといえる。

ところが最小分散制御には二つの大きな欠点がある。すなわち、(1)各時刻において制御量を必要以上の精度で目標値に一致させようとする性質のため操作量の分散が過大になる、(2)制御対象の特性変動に非常に敏感で制御系が不安定になる場合もある。上記(1)の欠点は、後に述べられるようにして簡単に解決される。しかしながら、第2の欠点を解決する方法については従来ほとんど研究が行われていない。この問題に対して Åström がひとつの方法を提案しているが¹⁾、その方法には設計の自由度がまったくなく、実用上満足できる方法とはいえない。

本論文においては、まず第2の欠点は最小分散制御が伝達関数の不安定な極を零点によって相殺すること

* 早稲田大学理工学部 東京都新宿区大久保 3-4-1

* Faculty of Science and Engineering, Waseda University, Shinjuku-ku, Tokyo

(Received July 22, 1978)

を前提としているために起こる問題であり、これは根本的には最小分散制御が予測した制御量を各時刻において目標値に一致させようとするフィード・フォワード制御的な性格が強いということに基因していることを示す。その観点からすれば、この制御則が第 1 の欠点をもつことも容易に理解される。したがって、最小分散制御にフィードバック制御的な要素をより強く加味することにより、二つの欠点を同時に解決できることが期待される。具体的には、第 1 の欠点に対しては、各時刻において制御量を目標値に可能な限り一致させることを断念する、第 2 の欠点に対しては、極を零点で相殺することを前提としないということである。そこでそのような条件を満たす制御則が、操作量の分散を評価基準に加えることにより実現されることをまず示す。このようにして定式化される最適制御問題には、制御量の分散と特性変動に対する安定性ととの兼ね合いを図る設計パラメータが含まれる。そこで制御量の分散の特性変動に関する感度を導入し、要求される仕様を実現するようにこの設計パラメータを決定する方法を示す。このような、分散と感度の兼ね合いを図る制御則の導出については、従来、両者をひとつの評価関数に盛り込んで新しい最適問題に帰着させる方法が提案されていたが^{2), 3)}、評価関数に含まれる重み係数の決定法が明らかでなく、また計算量が膨大となる欠点があった。

2. 問題の記述

つぎの線形差分方程式で記述されるシステムについて考える。

$$y(k) = - \sum_{i=1}^{q_1} a_i y(k-i) + \sum_{i=p_2}^{q_2} b_i u(k-i) + \sum_{i=p_3}^{q_3} c_i w(k-i) + v(k) \quad (2.1)$$

ここで y は制御量、 u は操作量、 w は平均値が零で有理スペクトル密度 $\Phi(\omega)$ をもつ有色雑音、 v は平均値が零で分散が R_v の白色雑音で、 w と v は互いに独立であるとする。またすべての変数はスカラーであり、 $p_2 \geq 1$ であるとする。いま推移作用素 z^{-1} を $z^{-1}x(k) = x(k-1)$ と定義すると、(2.1) 式は

$$A(z^{-1})y(k) = B(z^{-1})u(k-p_2) + C(z^{-1})w(k-p_3) + v(k) \quad (2.2)$$

と書くことができる。ここで、

$$A(z^{-1}) = \sum_{i=0}^{q_1} a_i z^{-i}, \quad a_0 = 1$$

$$B(z^{-1}) = \sum_{i=p_2}^{q_2} b_i z^{p_2-i}, \quad C(z^{-1}) = \sum_{i=p_3}^{q_3} c_i z^{p_3-i}$$

である。以下の議論において、システム(2.2)について、(i) 多項式 $A(z^{-1})$ は制御対象の特性が変動しても常に安定、すなわち $A(z^{-1})=0$ の根はすべて常に単位円内に存在する、(ii) v 以外の変数は測定可能である、と仮定する。このとき、つぎのような制御問題を考える。『(2.2) 式の数式モデルで表現される制御対象について、制御対象の特性が変動しても、制御量の分散を所定の値以下に保つことのできる操作量を求めよ。ただし、操作量は時刻 k までに観測されたデータの集合 $Y_k = \{y(k), y(k-1), \dots, w(k), w(k-1), \dots, u(k-1), u(k-2), \dots\}$ の関数とし、その操作量による制御量が有限分散をもつ定常過程となるようなものであるとする。』

この問題に対し、次章で提案する拡張形最小分散制御が有効であることを明確にしたのち、所望の制御系を、この制御のクラスの中で実現することを考える。

いま考えているシステムにおいては、 v と w を区別しているが、それはつぎのような事実に基づいている。制御対象には、操作量以外にも制御量に影響を与える入力が存在することが多い。それらは一般には測定できないが、なかには、たとえばプロセスにおける諸条件の変動のように測定可能なものがあり、それらのデータは当然操作量の決定に利用されるべきである。(2.2) 式における変数 w はこのような測定可能な操作不能入力を表わし、 v は測定不能な入力、すなわち外乱を表わしている。

3. 最適予測と最適制御則

操作量と制御量の間にむだ時間があり、時刻 k における操作量 $u(k)$ の影響は p_2 ステップ後にはじめて現われる。そこで $y(k+p_2)$ を時刻 k において予測して、その予測値をもとに操作量 $u(k)$ を決定する。

いま $u(k)$ を Y_k の任意の関数とすると、 Y_k と $u(k)$ で表現した、2 乗平均の意味で最適な予測値 $\hat{y}(k+p_2|k)$ は次式で与えられる¹⁾。

$$\hat{y}(k+p_2|k) = G(z^{-1})y(k) + B(z^{-1})F(z^{-1})u(k) + C(z^{-1})F(z^{-1})w(k-p_3+p_2) \quad (3.1)$$

ただし、 G, F はつぎの恒等式を満足する。

$$1 = A(z^{-1})F(z^{-1}) + z^{-p_2}G(z^{-1}) \quad (3.2)$$

ここで、

$$F(z^{-1}) = \sum_{i=0}^{p_2-1} f_i z^{-i}, \quad f_0 = 1, \\ G(z^{-1}) = \sum_{i=0}^{q_1-1} g_i z^{-i} \quad (3.3)$$

であり、予測誤差は、 $y(k+p_2) - \hat{y}(k+p_2|k) = F(z^{-1})$

$v(k+p_2)$ となる。この予測値を用いてつぎの二つの制御則を考える。

最小分散制御 つぎの評価関数を最小にする制御則を求める。

$$J = E[y^2(k+p_2)]/V_0 \quad (3.4)$$

ここで V_0 は $u=0$, すなわち制御を行わないときの制御量の定常分散であり, 2章の仮定から存在が保証されている。また (3.4) 式の右辺の分子は, g と Fv が互いに直交しているので, つぎのようになる。

$$\begin{aligned} E[y^2(k+p_2)] &= E[F(z^{-1})v(k+p_2)]^2 + E[G(z^{-1})y(k) \\ &\quad + B(z^{-1})F(z^{-1})u(k) \\ &\quad + C(z^{-1})F(z^{-1})w(k-p_3+p_2)]^2 \end{aligned} \quad (3.5)$$

V_0 および (3.5) 式の右辺第1項は $u(k)$ の決定には無関係であるから, (3.4) 式を最小にする操作量 $u(k)$ は, (3.5) 式右辺第2項を最小にする $u(k)$ として決定すればよいことになる。したがって求める最小分散制御則は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} u(k) &= -b_{p_2}^{-1} [z(B(z^{-1})F(z^{-1}) - b_{p_2})u(k-1) \\ &\quad + G(z^{-1})y(k) \\ &\quad + C(z^{-1})F(z^{-1})w(k-p_3+p_2)] \end{aligned} \quad (3.6)$$

以下ではこれを制御則Ⅰと呼ぶ。この制御則が1章で指摘した二つの欠点をもっていることは, あとで明らかにする。

拡張形最小分散制御 上述の最小分散制御に対して,

$$\begin{aligned} E[y^2(k+p_2) + ru^2(k)]/V_0 &\text{を最小にする操作量を拡張形最小分散制御と呼ぶ。ただし } r \text{ は非負の数である。これは上と同様にして,} \\ u(k) &= -(b_{p_2}^2 + r)^{-1} b_{p_2} [z(B(z^{-1})F(z^{-1}) - b_{p_2})u(k-1) \\ &\quad + G(z^{-1})y(k) + C(z^{-1})F(z^{-1})w(k-p_3+p_2)] \end{aligned} \quad (3.7)$$

と求められる。これを以後制御則Ⅱと呼ぶ。(3.7) 式で $r=0$ とすれば (3.6) 式に一致するから, 制御則Ⅱは制御則Ⅰを含んでいることがわかる。そこで以下では両方の制御則をまとめて次式の形で表わす。

$$\begin{aligned} u(k) &= -(r/b_{p_2} + B(z^{-1})F(z^{-1}) - 1)^{-1} [G(z^{-1})y(k) \\ &\quad + C(z^{-1})F(z^{-1})w(k-p_3+p_2)] \end{aligned} \quad (3.8)$$

さらに $p_3 \geq p_2$ であれば, (3.8) 式において $u(k)$ は Y_k の関数となり, 2章で定式化したわれわれの問題に対する許容制御則となる。この制御則Ⅱによって1章で指摘した第1の欠点が解決されることは, つぎのようにして示される。すなわち, $r=r_1, r_2 (r_1 < r_2)$ に対する制御則Ⅱによる操作量および制御量の分散を, それぞれ $E[u^2(k)]_{r_i}, E[y^2(k+p_2)]_{r_i}, i=1, 2$ で表

わすとき, $E[u^2(k)]_{r_2} < E[u^2(k)]_{r_1}$ および $E[y^2(k+p_2)]_{r_1} < E[y^2(k+p_2)]_{r_2}$ の関係が成立することは容易に示すことができる。したがって, 制御則Ⅰ ($r_1=0$) に比べて制御則Ⅱ ($r_2>0$) のほうが操作量の分散が小さいことがわかる。しかし, 制御量の分散は逆に増加する。さらに第2の欠点解決にとっても制御則Ⅱが有効であることは次章で詳しく検討する。

4. 特性根とパラメータ r の関係

前章で導出した制御則Ⅱは設計パラメータ r を含んでいるため, この制御則を用いた制御系の特性根は r の関数になる。この制御則Ⅱによって1章で指摘した第2の欠点を解決できることを証明するために, (i) 制御則Ⅰが極と零点の相殺を前提としていること, (ii) そのためパラメータ変動に敏感になり, 制御系が不安定になることもあること, (iii) 制御則Ⅱは極と零点の相殺を前提としていないこと, (iv) そして閉ループ系の特性根をすべて単位円内に配置するようにパラメータ r の値を選べることを, を以下に示す。

いま制御対象の特性の変動の影響を調べるために, 制御則を導出するもとになったモデルを

$$\begin{aligned} A(z^{-1})y(k) &= B(z^{-1})u(k-p_2) + C(z^{-1})w(k-p_3) \\ &\quad + v'(k) \end{aligned} \quad (4.1)$$

とし, 制御対象は

$$\begin{aligned} A_1(z^{-1})y(k) &= B_1(z^{-1})u(k-p_2) \\ &\quad + C_1(z^{-1})w(k-p_3) + v(k) \end{aligned} \quad (4.2)$$

という数式モデルで表わされるとしよう。すなわち, 制御対象の特性変動を, (4.2) 式の多項式 A_1, B_1, C_1 の係数が (4.1) 式の対応する多項式の係数と異なった値をとるとし, パラメータ誤差の形によって表現する。ただし, ここでは制御対象を記述する数式モデルの次数が変化するような特性変動は考えていない。(4.1), (3.8) 式から制御則Ⅱを求め (4.2) 式に代入し, (3.2) 式および $A^*(z) = z^{q_1} A(z^{-1})$ で定義される反転多項式を用いて整理すると, 閉ループ系の動特性は次式で記述される。

$$\begin{aligned} &\left[z^{n+p_2-1} B_1^*(z) + z^{n-q_1} A_1^*(z) \left(\frac{r}{b_{p_2}} z^{q_2-1} + B^*(z) F^*(z) \right) \right. \\ &\quad \left. - z^{n-q_1} A^*(z) B_1^*(z) F^*(z) \right] y(k) \\ &= z^{n-q_1+p_2} \left[\left(\frac{r}{b_{p_2}} z^{q_2-1} + B^*(z) F^*(z) \right) C_1^*(z) \right. \\ &\quad \left. - B_1^*(z) F^*(z) C^*(z) \right] w(k-p_3) \\ &\quad + z^n \left(\frac{r}{b_{p_2}} z^{q_2-1} + B^*(z) F^*(z) \right) v(k) \end{aligned} \quad (4.3)$$

ここで, $n = \max\{q_1, q_3 - p_3\}$ である. したがって閉ループ系の特性方程式は,

$$\begin{aligned} & z^{n+p_2-1} B_1^*(z) \\ & + z^{n-q_1} A_1^*(z) \left(\frac{r}{b_{p_2}} z^{q_2-1} + B^*(z) F^*(z) \right) \\ & - z^{n-q_1} A^*(z) B_1^*(z) F^*(z) = 0 \end{aligned} \quad (4.4)$$

で与えられる.

(1) $r=0$ の場合 (制御則 I)

パラメータ誤差がなければ, $A_1^*(z) = A^*(z)$, $B_1^*(z) = B^*(z)$, $C_1^*(z) = C^*(z)$ であるから (4.3) 式は

$$z^{n+p_2-1} B^*(z) y(k) = z^n B^*(z) F^*(z) v(k) \quad (4.5)$$

となる. (4.5) 式は閉ループ伝達関数の極と零点にそれぞれ含まれる $B^*(z)=0$ の根が相殺されることを示している. そのため $B^*(z)=0$ の根が不安定領域にある場合でも閉ループ系が不安定になることはない. ところがパラメータ誤差があると, 上で見掛け上現われなかった特性根が $B_1^*(z)=0$ の根の近くに現われるため, もし $B_1^*(z)=0$ が不安定領域に根をもっているとき, 特性方程式

$$\begin{aligned} & z^{n+p_2-1} B_1^*(z) + z^{n-q_1} \{A_1^*(z) B^*(z) \\ & - A^*(z) B_1^*(z)\} F^*(z) = 0 \end{aligned} \quad (4.6)$$

が不安定根をもつ場合がありうる.

(2) $r>0$ の場合 (制御則 II)

この場合には極と零点の相殺を前提としないために, パラメータ誤差のない場合でも, r が非常に小さい場合には (4.4) 式が $B_1^*(z)=0$ の根に近い根をもつので, $B_1^*(z)=0$ の根のうちに不安定なものがあれば不安定な特性根が現われる. さて (4.4) 式左辺の多項式の最高次の係数は $(b_{p_2}^2 + r)/b_{p_2}$ であり, すべての $r \geq 0$ の値に対して零とはならない. したがって, (4.4) 式の根はその係数の連続関数となる⁴⁾. 一方, (4.4) 式左辺の係数は (2.2) 式の多項式 A, B, C の係数および設計パラメータ r の連続関数であるから, (4.4) 式の根はこれらに関して連続的に変化する. また $r \rightarrow \infty$ のとき (4.3) 式は

$$\begin{aligned} & z^{n-q_1+q_2-1} A_1^*(z) y(k) \\ & = z^{n+q_2-q_3+p_3-1} C_1^*(z) w(k-p_3) + z^{n+q_2-1} v(k) \end{aligned} \quad (4.7)$$

となり, このとき特性根は原点と $A_1^*(z)=0$ の根に近づくことがわかる. したがって, 1章で述べた仮定からパラメータ誤差の有無によらず制御系は安定となる.

以上の考察で, 閉ループ系のすべての特性根を単位円内に配置させる r の値が必ず存在することが示された. このように r を十分大きくとれば, 常に特性変動に強い制御系を構成できることが明らかになった. 一

方, r の値を大きくすることは, 安定性を増す反面, 3章で示したように制御性能を劣下させる. そこで次章において, パラメータ r の値と制御性能の関係を調べよう.

5. 評価関数とパラメータ r の関係

(4.3) 式を書き直して

$$y(k) = H_1(z) w(k) + H_2(z) v(k) \quad (5.1)$$

とすれば, 制御量の分散は次式で与えられる.

$$\begin{aligned} V = E y^2 = & \frac{1}{2\pi i} \oint H_1(z) H_1(z^{-1}) \Phi(z) \frac{dz}{z} \\ & + \frac{R_v}{2\pi i} \oint H_2(z) H_2(z^{-1}) \frac{dz}{z} \end{aligned} \quad (5.2)$$

ここで $\Phi(z)$ は $\Phi(\omega)$ において $e^{i\omega} = z$ と置いたものであり, $\oint$ は複素平面上で原点を中心とした単位円に沿っての積分を表す. また, 特性方程式 (4.4) の左辺が (5.2) 式の $H_1(z), H_2(z)$ の分母にあたることから, (5.2) 式の積分は特性根が単位円内にあるときのみ定義される. このとき前章の考察から, (3.4) 式の評価関数と r の関係についてつぎのことがわかる.

(1) $r=0$ の場合 (制御則 I)

パラメータ誤差がなければ, 評価関数は (3.4) 式と (3.5) 式右辺第1項からつぎの最小値 $J_{\min}$ をとる.

$$J_{\min} = R_v \sum_{i=0}^{p_2-1} f_i^2 / V_0 \quad (5.3)$$

ここで

$$\begin{aligned} V_0 = & \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{C_1^*(z) C_1^*(z^{-1})}{A_1^*(z) A_1^*(z^{-1})} \Phi(z) \frac{dz}{z} \\ & + \frac{R_v}{2\pi i} \oint \frac{1}{A_1^*(z) A_1^*(z^{-1})} \frac{dz}{z} \end{aligned} \quad (5.4)$$

である. しかしながらパラメータ誤差があると, 前章で述べたように $B_1^*(z)=0$ の根の近くに特性根が現われるため, (4.6) 式が不安定根をもつ場合は制御量の分散は無限大となり評価関数も無限大となる.

(2) $r>0$ の場合 (制御則 II)

前章で示したように, パラメータ誤差の有無によらず特性方程式 (4.4) の根をすべて安定領域に配置する設計パラメータ r の値が必ず存在する. そのような条件を満たす r の値に対して, 3章に示したように操作量の分散 $E[u^2(k)]$ は単調に減少し, 制御量の分散 $E[y^2(k)]$ は単調に増加する. また $r \rightarrow \infty$ での制御量の分散は (5.4) 式で求められる V_0 に一致することから, その場合の評価関数の値は1に近づく.

以上の考察により, 評価関数の値は r に関して Fig. 1 のような形で変化することがわかる. したがって制御対象の特性が変動しなければ, Fig. 1 から操作量の

Fig. 1 Control variance and the values of the cost function as a function of r .

分散とそのときの評価関数の値との兼ね合いにおいて適切なパラメータ r の値を選ぶことができるが、制御対象の特性が変動する場合にも通用するパラメータ r の値を決定するにはこれだけの情報では不十分である。そこで、次章で評価関数の特性変動に対する感度を調べる。

6. 評価関数の感度

さきに、4章で述べたように制御対象の特性の変動をその数式モデルを構成する多項式の係数の変化によって表現することとし、その係数の変化に関する評価関数の変化率、すなわち感度を調べる。

(2.2) 式の多項式の係数のうち、制御対象の特性変動によって変化するものを $\tilde{l}_i(\varepsilon_i)$, $i=1, 2, \dots, N$ とする。ここで ε_i はパラメータ変化の原因を表す変数で、 $\varepsilon_i=0$ が特性変動がない場合に相当するものと仮定する。すなわち、特性変動のない時のパラメータ $\tilde{l}_i$ の基準値を l_i とすれば、 $\tilde{l}_i(0)=l_i$, $i=1, 2, \dots, N$ である。関数 $\tilde{l}_i(\varepsilon_i)$ は特性変動とパラメータ変化の間のメカニズムによって定まるもので、 ε_i に関して連続微分可能であるとする。さらに (i) ε_i の変動幅および関数 $\tilde{l}_i(\varepsilon_i)$ が既知であるか、もしくは (ii) $\tilde{l}_i$ の値の変動幅自身が既知である、と仮定する。(ii) の場合は $\tilde{l}_i = \varepsilon_i$ とおくことによって (i) に帰着できるので、以後は (i) の場合のみを考える。

(5.2) 式は閉ループ系の特性根が単位円内に存在する場合にのみ定義されているため、被積分項の分母は零になることはない。よってベクトル $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_N)$ を導入し、(5.2) 式を

$$\begin{aligned} V(r, \varepsilon) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} f(r, \varepsilon, z) \frac{dz}{z} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(r, \varepsilon, e^{i\omega}) d\omega \end{aligned} \quad (6.1)$$

と書き表わすとき、 $f(\cdot)$ はすべての ε_i に関して連続微分可能な関数であり、 $V(r, \varepsilon)$ もすべての ε_i に関して連続微分可能となる⁵⁾。また、(5.4) 式の V_0 についても同様なことがいえる。そこで次式によって、 $\varepsilon = \bar{\varepsilon}$

における評価関数の感度 $S_i(r, \bar{\varepsilon})$, $i=1, 2, \dots, N$ を定義する。

$$\begin{aligned} S_i(r, \bar{\varepsilon}) &= \left. \frac{\partial J}{\partial \varepsilon_i} \right|_{\varepsilon=\bar{\varepsilon}} \\ &= \frac{\left. \frac{\partial V}{\partial \varepsilon_i} \right|_{\varepsilon=\bar{\varepsilon}} \cdot V_0 - V_0 \left. \frac{\partial V_0}{\partial \varepsilon_i} \right|_{\varepsilon=\bar{\varepsilon}}}{(V_0)^2} \end{aligned} \quad (6.2)$$

ここで

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial V}{\partial \varepsilon_i} \right|_{\varepsilon=\bar{\varepsilon}} &= -\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{\partial}{\partial \tilde{l}_i} (H_1(z) H_1(z^{-1})) \frac{\partial \tilde{l}_i}{\partial \varepsilon_i} \Big|_{\varepsilon=\bar{\varepsilon}} \phi(z) \frac{dz}{z} \\ &\quad + \frac{R_0}{2\pi i} \oint \frac{\partial}{\partial \tilde{l}_i} (H_2(z) H_2(z^{-1})) \frac{\partial \tilde{l}_i}{\partial \varepsilon_i} \Big|_{\varepsilon=\bar{\varepsilon}} \frac{dz}{z} \end{aligned} \quad (6.3)$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial V_0}{\partial \varepsilon_i} \right|_{\varepsilon=\bar{\varepsilon}} &= \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{\partial}{\partial \tilde{l}_i} \left(\frac{C_1^*(z) C_1^*(z^{-1})}{A_1^*(z) A_1^*(z^{-1})} \right) \frac{\partial \tilde{l}_i}{\partial \varepsilon_i} \Big|_{\varepsilon=\bar{\varepsilon}} \phi(z) \frac{dz}{z} \\ &\quad + \frac{R_0}{2\pi i} \oint \frac{\partial}{\partial \tilde{l}_i} \left(\frac{1}{A_1^*(z) A_1^*(z^{-1})} \right) \frac{\partial \tilde{l}_i}{\partial \varepsilon_i} \Big|_{\varepsilon=\bar{\varepsilon}} \frac{dz}{z} \end{aligned} \quad (6.4)$$

であり、 $i=1, 2, \dots, N$ である。したがって ε が $\bar{\varepsilon} \rightarrow \bar{\varepsilon} + \Delta \varepsilon$ となったときの評価関数の増加は近似的に、

$$J(r, \bar{\varepsilon} + \Delta \varepsilon) - J(r, \bar{\varepsilon}) \doteq \sum_{i=1}^N S_i(r, \bar{\varepsilon}) \Delta \varepsilon_i \quad (6.5)$$

で与えられる。 $S_i(r, \varepsilon)$ も r, ε に関して連続であり、 $J(r, \varepsilon) \rightarrow 1$, $r \rightarrow \infty$ であることから、 $S_i(r, \varepsilon) \rightarrow 0$, $r \rightarrow \infty$ となる。このようにして求められた感度を考慮して、次章に述べるように、制御対象の特性が変動しても評価関数が定められた値以上にならない制御系を構成することができる。

7. 設 計

以上の考察に基づいて、所望の制御系を構成するための設計パラメータ r の最適値をつぎの手順で決定することができる。

(Step 1) すべての ε_i の変動範囲 $[\varepsilon_{i \min}, \varepsilon_{i \max}]$ の推定値を、同定を何度か繰り返すことなどにより求め、これらの変動範囲を表わす集合 Γ を次式で定義する。

$$\Gamma = \{\varepsilon | \varepsilon_{i \min} \leq \varepsilon_i \leq \varepsilon_{i \max}, i=1, 2, \dots, N\} \quad (7.1)$$

また、 Γ の境界を $\partial \Gamma$ で表わす。

(Step 2) $j(r) = \max_{\varepsilon \in \Gamma} J(r, \varepsilon)$ を計算し、評価関数の許される上限値 $\bar{J}$ を与え、Fig. 2 から $r_j = \min\{r | j(r) = \bar{J}\}$ を求める。すなわち $r \leq r_j$ ならば、 $J(r, \varepsilon)$

Fig. 2 $j/\bar{J}$ and $s/\bar{S}$ as a function of r

$\leq \bar{J}$, $\forall \varepsilon \in \Gamma$ が保証される。

(Step 3) $S(r, \varepsilon) = (S_1(r, \varepsilon), \dots, S_N(r, \varepsilon))$ とし, n を点 $\varepsilon \in \partial \Gamma$ における Γ に対する外向き単位法線と定義する. $s(r) = \max_i \max_{\varepsilon \in \partial \Gamma} (S_i(r, \varepsilon), n)$ を計算する. ただし, $(\cdot, \cdot)$ は内積を表わす. 感度の上限値 $\bar{S}$ を与えて Fig. 2 から $r_s = \max \{r | s(r) = \bar{S}\}$ を求める. すなわち $r \geq r_s$ ならば, パラメータ ε がたとえ Step 1 で推定した範囲をわずかに越えて変化することがあっても, J が急増しない制御系を構成することができる.

(Step 4) $r_s \leq r_j$ の場合は r を $r_s \leq r \leq r_j$ の適当な値 r^0 に選べば, 結果としてつぎの二つの条件を満たす制御系が構成される.

(i) $\varepsilon \in \Gamma$ ならばパラメータ ε がどのように動いても常に評価関数の値は $\bar{J}$ 以下になる.

(ii) 評価関数の各パラメータに関する境界における感度の値はすべて $\bar{S}$ 以下となる.

(Step 5) $r_s > r_j$ の場合は J と S_i に対する要求が厳しすぎた結果であるから, $\bar{J}$ もしくは $\bar{S}$ の値を上げて, Step 2 に戻る. $\bar{J}, \bar{S}$ を調節すれば必ず $r_s \leq r_j$ にすることができる.

このようにして, $\bar{J}$ と $\bar{S}$ との関係においてパラメータ r の最適な値が決定されるが, $r_s < r_j$ の場合はこの区間で r の値を適当に定めればよい. Fig. 2 において, $j(r)/\bar{J}$ と $s(r)/\bar{S}$ のグラフの交点の r の値を $\bar{r}$ とすれば, $r^0 < \bar{r}$ ならば J に重きをおいた選択になり, $r^0 > \bar{r}$ ならば S_i に重きをおいて選んだことになる.

8. 例 題

制御対象の数式モデルが

$$\begin{aligned} y(k) = & -1.2y(k-1) - \bar{a}_2(\varepsilon_1)y(k-2) \\ & + \bar{b}_2(\varepsilon_2)u(k-2) - 1.02u(k-3) + w(k-3) \\ & + 0.95w(k-4) + v(k) \end{aligned} \quad (8.1)$$

で表わされる場合を考える. ここで w, v は平均値が零で, 分散がそれぞれ $25/4, 1/4$ の互いに独立な白色雑音であるとする.

(1) $\bar{a}_2(\varepsilon_1) = 0.6, \bar{b}_2(\varepsilon_2) = 1.0 + \varepsilon_2$ の場合

Fig. 3 $j/\bar{J}$ and $s/\bar{S}$ as a function of r for examples

この場合に, $\bar{b}_2(0) = b_2 = 1.0$ に対して (3.8) 式より制御則 II を算出する. いま, $\Gamma = \{\varepsilon_2 | -0.2 \leq \varepsilon_2 \leq 0.2\}$ であるとすれば, $\bar{J} = 0.45, \bar{S} = 0.6$ としたときの $j(r)/\bar{J}, s(r)/\bar{S}$ は, Fig. 3 の実線のようにになる. これより, Fig. 2 における $r_j, r_s, \bar{r}$ を求めると, それぞれ $r_j = 1.35, r_s = 0.2, \bar{r} = 0.6$ となる. これら 3 種類の r の値に対する $j(r)$ および $s(r)$ の値を Table 1 に示す. また, ε_2 の変化に対する評価関数 J の値は Fig. 4 のようになる.

Table 1 The values of j and s for some selected r 's for examples

	r	j	s
Example 1	0.2	0.20	0.60
	0.6	0.30	0.40
	1.35	0.45	0.37
Example 2	0.68	0.37	0.60
	0.9	0.42	0.56
	1.08	0.45	0.53

Fig. 4 The values of cost function for example 1

(2) $\bar{a}_2(\varepsilon_1) = 0.6 + \varepsilon_1, \bar{b}_2(\varepsilon_2) = 1.0 + \varepsilon_2$ の場合
 $\bar{a}_2(0) = a_2 = 0.6, \bar{b}_2(0) = b_2 = 1.0$ に対する制御則 II は, (1) で求めた制御則と一致する. いま, $\Gamma = \{\varepsilon | -0.1 \leq \varepsilon_1 \leq 0.1, -0.2 \leq \varepsilon_2 \leq 0.2\}$ の場合を考える. (1) と同じく, $\bar{J} = 0.45, \bar{S} = 0.6$ としたときの $j(r)/\bar{J}, s(r)/\bar{S}$ のグラフは Fig. 3 の破線のようにになる. Fig. 3 より, $r_j = 1.08, r_s = 0.68, \bar{r} = 0.9$ と求められ, これらの r の値に対する $j(r), s(r)$ の値を Table 1 に示す.

9. おわりに

本論文では、最小分散制御則が実用上致命的な欠点を有することを指摘し、これを克服するための制御則を導いた。さらに、評価関数の値とそのパラメータ感度との兼ね合いによってその制御則を最適に調整する実用的な方法を示した。ここで導入した評価関数のパラメータ感度は、パラメータの基準値における感度ではなく、その変動範囲の境界における感度である。そのような感度を用いることにより、パラメータ変動範囲内での評価関数の最大値に基づいて設計することができ、またパラメータの変動範囲はあくまでも推定値であり、境界を越えることもありうることを考慮した設計ができる。ここでは設計パラメータを、評価関数およびそのパラメータ感度に対して与えられた設計値から決定する方法を示したが、操作量の分散にも設計

値が与えられる場合についても同様に簡単に処理することができる。

最後に、本研究を進めるにあたり、有益な助言をいただいた早稲田大学理工学部 内田健康助教授に謝意を表します。

参 考 文 献

- 1) K.J. アストローム (中村他訳)：確率制御理論入門，コロナ社 (1975)
- 2) P. Sannuti and J.B. Cruz: A Note on Trajectory Sensitivity of Optimal Control Systems, IEEE Trans. on Automatic Control, **AC-13-1**, 111/112 (1968)
- 3) 谷萩：軌道感度と評価関数感度を考慮した最適出力フィードバック制御，システムと制御，**21-7**, 401/409(1977)
- 4) 高木：代数学講義，第2章，共立出版 (1977)
- 5) 高木：解析概論，第4章，岩波書店 (1971)