非線形離散値系の動的に等価な双線形化法

馬 場 鎧 一*

Dynamically Equivalent Bilinearization of a Nonlinear Discrete Time System

Eiichi BAMBA*

The existence of a discrete time bilinear system which is dynamically equivalent to a discrete time nonlinear system with C^∞ nonlinear functions in the state and with the control appearing linearly, is assured. A procedure to construct a canonical form of such a bilinear system is the extension of Lo's method to a discrete time system, and there the power series expansion related to C^∞ functions plays a great role. When this power series is finite, we obtain the input/output difference equations of the above bilinear system and a realizable bilinear system. When the series is infinite it can be shown that the asymptotic stability of the considered bilinear system is a sufficient condition for convergence of this power series.

1. ま え が き

この論文は、入力線形に現われる非線形離散値系

$$x(k+1) = f(x(k)) + G(x(k))u(k),$$

$$y(k) = h(x(k)) + Q(x(k))u(k), \quad k=0, 1, \dots \quad (1)$$

に対して、(1)式と同一の入出力をもつ双線形離散値系

$$z(k+1) = \left(A + \sum_{i=1}^r B_i u_i(k) \right) z(k),$$

$$y(k) = \left(C + \sum_{i=1}^r D_i u_i(k) \right) z(k), \quad k=0, 1, \dots \quad (2)$$

に双線形化する手法に関連して、双線形化系の存在条件、実現問題、双線形化法の収束性などを考察している。ここで、 $x(k)$, $u(k)$, $y(k)$ は $k=0, 1, 2, \dots$ について、それぞれ n 次元状態ベクトル、 r 次元入力ベクトル、 m 次元出力ベクトルとし、 f , h はすべての $x(k)$ に関して、 C^∞ クラスに属するそれぞれ n 次元、 m 次元ベクトル値関数で、 G , Q はすべての $x(k)$ に関して、 C^∞ クラスに属する $n \times r$, $m \times r$ 行列値

関数である。また、 $z(k)$ は $k=0, 1, 2, \dots$ について、適当なサイズのベクトルであり、 A , B_i , C , D_i は適当なサイズの定数行列である。

(2)式的双線形系への双線形化の重要性は、たとえば(1)式に沿っての最適制御問題の解法には、文献1にも指摘されているように、何らかの近似が要求される点である。しかし、従来の平衡点の回りの線形化は局所的であり、非線形特性の大域の性質が現われない。

Lo²⁾は、(1)式に対応する微分系を対象に、一つの作用素を定義して、この微分系と同一の入出力をもつ(2)式に対応する双線形微分系が存在するための必要十分条件は、導入した作用素に関して、 f , h , G , Q が有限項多項式展開をもつことであるという結論を得ている。この多項式展開を sensor-orbit と呼んでいる。すなわち、(1)式が有限次元 sensor-orbit をもつ場合には、この双線形化は大域的であり、さらに入出力が同じであることから、入出力写像の観点からすれば、(1)式と(2)式とは同形であり、(1)式の制御系としての諸特性が(2)式に持ち込まれる可能性がある。

しかし、(2)式の状態空間は、(1)式の零でない任意の初期値と入力列に対して、各固定された $k(k=0, 1, 2, \dots)$ ごとに、(1)式に準同形でしかない。

(1)式の微分系に限って、その双線形化は A. Krenner³⁾, R. Brockett^{4), 5)}らによって試みられているが、(1)式を直接対象とした報告は筆者の知る限りまだない。

本論文は、Lo の作用素を用いて sensor-orbit 法の離散値系への拡張適用を試み、(1)式と同一の入出力をもつ(2)式的双線形離散値系が存在する必要十分条件を、Lo とは異なった立場から求めている。すなわち、これらの条件導出過程において、微分系を対象とした Lo は、その数学的の骨子として chain rule を用いて、(2)式の微分形式を連続して求めている。しかし、非線形離散値系ではこの rule が適用できず、Lo の作用素から、連続して(2)式は得られない。ここに、微分系と異なって非線形離散値系固有の問題が生

* 近畿大学理工学部 東大阪市小若江 3-4-1

* Faculty of Science and Engineering, Kinki University, Higashi-Osaka

(Received December 26, 1978)

じる。また、(1)式が有限次元 sensor-orbit をもつ場合、実現問題（最小実現を意味しない）にまで言及している。実現問題においても、離散値系では文献4とは異なって入力の小域に限られる。さらに、一般には(1)式が有限次元 sensor-orbit をもつとは限らないので、無限次元 sensor-orbit の収束条件についても考察している。(1)式の形の実システムとして、離散時間パラメータをもつ非線形フィルタモデル⁶⁾、人口と流行病モデル、神経筋肉系統モデルなど多くの実例がある⁷⁾。

2. 動的に等価な双線形化法

本章以下では、議論を簡潔にするため、

$$\begin{aligned} x(k+1) &= f(x(k)) + u(k)g(x(k)), \\ y(k) &= h(x(k)), \quad k=0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3)$$

なる非線形離散値系を対象とする。ここで、 $x(k)$, f , $y(k)$, h は(1)式と同じものとし、 $u(k)$ は各 k について1次元入力とし、 g はすべての $x(k)$ について C^∞ クラスに属する n 次元ベクトル値関数とする。

(3)式を対象とした以下の議論は、(1)式を対象とした場合にもそのまま成立する。(3)式に関して、つぎの仮定をおく。

【仮定】

(i) $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ は x に関して、 C^∞ クラスに属する関数である。ここで、 x は n 次元ベクトル。

(ii) $f(\theta)=\theta$, $g(\theta)=\theta$, $h(\theta)=\theta$ とする。ここで、 θ は n 次元零ベクトルである。

(iii) $f_i(x)$, $g_i(x)$, $i=1, 2, \dots, n$, $h_j(x)$, $j=1, 2, \dots, m$ は、 x に関してリプシッツ条件を満足しているものとする。

仮定(i)は sensor-orbit を定義するために必要であって、多項式展開（必ずしも Taylor 展開を意味しない）を基盤とした双線形化法では避けられない仮定である。仮定(ii)は零状態線形性の仮定であって、Zero-Memory 形非線形特性¹⁾を対象にしていることを意味する。

Lo は信号伝送過程における Kollmogorov 逆作用素⁶⁾と類似の作用素

$$\begin{aligned} \mathcal{L}h_j(x(k)) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial h_j(x(k))}{\partial x_i(k)} f_i(x(k)), \\ j &= 1, 2, \dots, m \end{aligned} \quad (4)$$

を導入した。この作用素を用いて各 $k=0, 1, 2, \dots$ について、仮定(i)より、

$$\begin{aligned} z_i(k) &= \mathcal{L}^{i-1}h(x(k)), \\ z_i(k+1) &= [\mathcal{L}^{i-1}h(x(k))]_{x(k)} \cdot x(k+1) \end{aligned} \quad (5)$$

で新変数 $z_i(k)$, $z_i(k+1)$ が定義でき、これらの新変数は仮定(ii)から零状態も含めて定義できる。ここで、 $l=1, 2, \dots, K, \dots$ で、 $[\cdot]_x$ は x に関する $[\cdot]$ 内の関数の勾配を表わす。(5)式は(4)式の作用素 $\mathcal{L}$ をおのおの h_j , $j=1, 2, \dots, m$ に $l-1$ 回作用させたものを $j=1, 2, \dots, m$ についてベクトル表示したものである。よって、 $z_i(k)$, $z_i(k+1)$ とともに m 次元ベクトルであり、 $[\cdot]_{x(k)}$ は $m \times n$ 行列である。さらに、(3)式が離散値系のため、文献2とは異なって、(5)式のように離散時間 k と $k+1$ とで違った形で新変数を導入している。

Lo によれば、系が有限次元 sensor-orbit (以下、 S_K 展開式と呼ぶ)をもつとは、任意の n 次元ベクトル x に関して、 $l=1, 2, \dots, K$ として、

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^K h(x) &= \sum_{i=1}^K A_i \mathcal{L}^{i-1} h(x), \\ [\mathcal{L}^{i-1} h(x)]_x \cdot g(x) &= \sum_{j=1}^K B(l, j) \mathcal{L}^{i-1} h(x) \end{aligned} \quad (6)$$

と表わせる $m \times m$ 定数行列 A_i , $B(l, j)$, $i, j, l=1, 2, \dots, K$ と有限数 K が存在することである。よって、系(3)がこの場合であるとすれば、(5), (6)式から、

$$\begin{aligned} z_i(k+1) &= z_{i+1}(k) + \sum_{j=1}^K B(l, j) z_j(k) u(k), \\ l &= 1, 2, \dots, K-1 \quad (7) \\ z_K(k+1) &= \sum_{i=1}^K A_i z_i(k) + \sum_{j=1}^K B(K, j) z_j(k) u(k), \\ k &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

を得る。ここで、 $\mathcal{L}^K h(x(k)) = z_{K+1}(k)$ としている。すると、 $z(k) = \text{col.}(z_1(k), \dots, z_K(k))$, $k=0, 1, 2, \dots$ とし、

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & I & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_1 & A_2 & A_3 & \dots & A_K \end{bmatrix} \\ B &= \begin{bmatrix} B(1, 1) & \dots & B(1, K) \\ \vdots & & \vdots \\ B(K, 1) & \dots & B(K, K) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

とすれば、(7)式はただちに、

$$z(k+1) = (A + u(k)B)z(k), \quad k=0, 1, 2, \dots \quad (8)$$

と表現できる。ここで、 I は $m \times m$ 単位行列、 0 は $m \times m$ 零行列を表わす。また、(5)式より、

$$z_1(k) = \mathcal{L}^0 h(x(k)) = h(x(k)) \quad (9)$$

だから、 $c = [I : 0]$ において、

$$y(k) = cz(k), \quad k=0, 1, 2, \dots \quad (10)$$

を得る。ここで、 0 は $m \times \{m(K-1)\}$ 零行列で、 c は $m \times \{mK\}$ 行列である。

(3)式が S_K 展開式をもてば、同一の入出力列をもつ双線形化離散値系(8), (10)が存在することがわかった。かかる関係をもつ二つの系を動的に等価という。

【定義 1】(動的等価性の定義)

系 S_1 の零でない任意の初期値と任意の入力列 $\{u(k)\}_0^{N-1} (N \leq \infty)$ に対応する出力列 $\{y(k)\}_0^{N-1}$ に対して、同一の入出力列対を系 S_2 がもつとき、 S_1 と S_2 は動的に等価という。

以上で、(3)式が S_K 展開式をもつならば、(3)式と(8), (10)式は動的に等価なことがわかった。つぎに必要な性を証明するが、その前につぎの補助定理を証明する。

〈補助定理〉(3)式において、 $f(x(k))=x(k)$ とした系

$$\begin{aligned} x(k+1)-x(k) &= u(k)g(x(k)), \\ y(k) &= h(x(k)), \quad k=0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (11)$$

と動的に等価な双線形化離散値系

$$\begin{aligned} z(k+1)-z(k) &= \hat{A}z(k)+u(k)Bz(k), \\ y(k) &= cz(k), \quad k=0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (12)$$

が存在するならば、(11)式は S_K 展開式をもつ。ここで、 $\hat{A}=A-I$ とし、 A および他の記号は(8), (10)式に現われるものと同じである。

(証明) 仮定(i)から、 $j=1, 2, \dots, m$ について、

$$\begin{aligned} y_j(k+1)-y_j(k) &= h_j(x(k+1))-h_j(x(k)) \\ &= \frac{\partial h_j}{\partial x(k)}(x(k+1)-x(k)) \\ &\quad + \frac{1}{2!}(x(k+1)-x(k))' \frac{\partial^2 h_j}{\partial x(k)^2}(x(k+1) \\ &\quad -x(k)) + \dots \end{aligned}$$

と無限級数に展開できる。ここで、'はベクトルの転置を表わし、 $\partial h_j / \partial x(k)$ は $(\partial h_j / \partial x_1(k), \dots, \partial h_j / \partial x_n(k))$ なる n 次元ベクトルで、 $\partial^2 h_j / \partial x(k)^2$ はヘイシヤン行列を意味する。(11)式と(12)式の動的等価性から、

$$\begin{aligned} u(k) \frac{\partial h_j}{\partial x(k)} g(x(k)) + \frac{1}{2} u^2(k) g'(x(k)) \frac{\partial^2 h_j}{\partial x(k)^2} g(x(k)) \\ + \dots = \sum_{\nu, \mu=1}^{mk} c_{j\nu} (\hat{a}_{\nu\mu} + u(k) b_{\nu\mu}) z_\mu(k), \quad j=1, \dots, m \end{aligned} \quad (13)$$

を得る。ここで、 $C=[c_{j\nu}]$, $\hat{A}=[\hat{a}_{\nu\mu}]$, $B=[b_{\nu\mu}]$ で $z_\mu(k)$ は $z(k)$ の μ 要素である。(13)式の $u(k)$ の次数を両辺比較して、 h, g はともに $x(k)$ の線形関数となるので、 $h(x(k))=\tilde{C}x(k)$, $g(x(k))=\tilde{B}x(k)$ と表現できる $m \times n$ 定数行列 $\tilde{C}$, $n \times n$ 定数行列 $\tilde{B}$ が存在する。よって、(4)式から、

$$\mathcal{L}^0 h(x(k)) = \mathcal{L} h(x(k)) = \dots = \mathcal{L}^K h(x(k)) = \tilde{C}x(k) \quad (14)$$

$$[\mathcal{L}^i h(x(k))]_{x(k)} \cdot g(x(k)) = \tilde{C} \tilde{B} x(k) \quad (15)$$

を得る。いま、 $\tilde{B}$ の固有値を $\tilde{\lambda}_j$, $j=1, 2, \dots, \tilde{K} \leq n$ とすれば、 $\tilde{C} \tilde{B} = \tilde{C} \left(\sum_{j=1}^{\tilde{K}} \tilde{\lambda}_j \alpha_j \right) \left/ \sum_{j=1}^{\tilde{K}} \alpha_j \right.$ と表わせる定数 α_j が存在する。よって、(14), (15)式より、

$$\begin{aligned} [\mathcal{L}^i h(x(k))]_{x(k)} \cdot g(x(k)) \\ = \tilde{C} \tilde{B} x(k) = \beta_1 \mathcal{L}^0 h(x(k)) = \dots = \beta_{\tilde{K}} \mathcal{L}^{\tilde{K}} h(x(k)) \end{aligned}$$

を得る。これは、(11)式が S_K 展開式をもつことを意味する。(証明終)

《定理 1》 仮定(i), (iii)を満たす f に対して、

$$x(k+1)=f(x(k)), \quad k=0, 1, 2, \dots, x(0)=x_0 \quad (16)$$

の解が存在する離散時間区間 $[0, N-1]$ が与えられているとき、系(3)が系(8), (10)に動的に等価であれば、(3)式は S_K 展開式をもつ。

(証明) P. Henrici⁸⁾ によって、 f が仮定(iii)を満たしていることから、(16)式は唯一解をもつ。初期値 x_0 に対するその解を $\phi(k, x_0)$ として、

$$\begin{aligned} x(k) &= \phi(k, \omega(k)), \quad \phi(k+1, \omega(k)) = f(\phi(k, \omega(k))), \\ k &= 0, \dots, N-1 \end{aligned}$$

なる $\omega(k)$ を定義する。すると、仮定(iii)があるから、微分に関する平均値の定理が適用できて、

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \phi(k+1, \omega(k+1)) \\ &= \frac{\partial \phi(k+1, \bar{\omega}(k))}{\partial \omega(k)} (\omega(k+1) - \omega(k)) \\ &\quad + \phi(k+1, \omega(k)) \\ &= \frac{\partial \phi(k+1, \bar{\omega}(k))}{\partial \omega(k)} (\omega(k+1) - \omega(k)) \\ &\quad + f(\phi(k, \omega(k))) \\ &= f(\phi(k, \omega(k))) + u(k) g(\phi(k, \omega(k))) \end{aligned}$$

と表わされる。ここで、 $\bar{\omega}(k)$ は $\omega(k)$ と $\omega(k+1)$ との間の値とする。すると、上式から、ただちに

$$\omega(k+1) = \omega(k) + u(k) \hat{g}(\omega(k)) \quad (17)$$

を得る。ここで、

$$\hat{g}(\omega(k)) = [\partial \phi(k+1, \bar{\omega}(k)) / \partial \omega(k)]^{-1} \cdot g(\omega(k))$$

としている。ところが、(17)式は(11)式と等価であり、補助定理によって、(3)式が S_K 展開式をもつことが証明された。(証明終)

以上で、(3)式が S_K 展開式をもつ場合、(3)式と動的に等価な双線形系は(8), (10)式であり、そのときに限ることがわかった。以下で、簡単な数値例によって、動的に等価な双線形系の導出の具体例とする。

【例題 1】1次元非線形離散値系

$$x(k+1) = (1+u(k))x(k),$$

$$y(k) = x(k) - \frac{1}{6}x^3(k), \quad k=0, 1, \dots, x(0)=1 \quad (18)$$

が与えられたとすると、(4)式によって、

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^0 h(x(k)) &= x(k) - \frac{1}{6}x^3(k), \\ \mathcal{L}^1 h(x(k)) &= x(k) - \frac{1}{2}x^3(k), \\ \mathcal{L}^2 h(x(k)) &= -3 \left(x(k) - \frac{1}{6}x^3(k) \right) \\ &\quad + 4 \left(x(k) - \frac{1}{2}x^3(k) \right) \\ &= -3\mathcal{L}^0 h(x(k)) + 4\mathcal{L}^1 h(x(k)) \\ [\mathcal{L}^0 h(x(k))]_{x(k)} \cdot x(k+1) \\ &= \left(x(k) - \frac{1}{2}x^3(k) \right) (u(k)+1), \\ [\mathcal{L}^1 h(x(k))]_{x(k)} \cdot x(k+1) \\ &= \left(x(k) - \frac{3}{2}x^3(k) \right) (u(k)+1), \\ [\mathcal{L}^2 h(x(k))]_{x(k)} \cdot x(k+1) \\ &= \left(x(k) - \frac{9}{2}x^3(k) \right) (u(k)+1) \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} &= \left(x(k) - \frac{9}{2}x^3(k) \right) (u(k)+1) \end{aligned} \quad (20)$$

となって、(18)式は S_K 展開式をもつことがわかる。

いま、 $\mathcal{L}^0 h(x(k)) = z_1(k)$, $\mathcal{L}^1 h(x(k)) = z_2(k)$, $\mathcal{L}^2 h(x(k)) = z_3(k)$ とおけば、(5), (19), (20)式から、

$$\begin{bmatrix} z_1(k+1) \\ z_2(k+1) \\ z_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_1(k) \\ z_2(k) \\ z_3(k) \end{bmatrix} \cdot (1+u(k)),$$

$$y(k) = [1, 0, 0] \cdot \begin{bmatrix} z_1(k) \\ z_2(k) \\ z_3(k) \end{bmatrix} \quad k=0, 1, \dots$$

なる3次の双線形系が得られる。また、初期値は、 $\text{col.}(z_1(0), z_2(0), z_3(0)) = \text{col.}(5/6, 1/2, -1/2)$ となる。つぎに、 $k=0, 1$ として入力列 $(u(0), u(1))$ を考えた場合、入力列 $(-1, \text{任意})$, $(-1+\sqrt{3}, -1)$, $(-1+\sqrt{3}, -1+\sqrt{3})$, $(-1+\sqrt{3}, -1-\sqrt{3})$, $(-1-\sqrt{3}, -1)$, $(-1-\sqrt{3}, -1+\sqrt{3})$, $(-1-\sqrt{3}, -1-\sqrt{3})$ の7通りの入力列について、両方の系は、それぞれ同一の出力列 $(0, 0)$, $(\sqrt{3}/2, 0)$, $(\sqrt{3}/2, -3/2)$, $(\sqrt{3}/2, 3/2)$, $(-\sqrt{3}/2, 0)$, $(-\sqrt{3}/2, 3/2)$, $(-\sqrt{3}/2, -3/2)$ をもつので、定義1によって、動的に等価である。

3. 系が S_K 展開式をもつ場合

ここでは、(3)式が S_K 展開式をもつ場合に限って、(3)式に関する入出力差分方程式の実現系の存在

条件について考察している。

いま、各 $k=0, 1, \dots$ について作用素

$$Mh_j(x(k)) = \frac{\partial h_j(x(k))}{\partial x(k)} g(x(k)), \quad j=1, 2, \dots, m \quad (21)$$

を定義する。前章の議論から、(3)式が S_K 展開式をもつならば、系(11)も S_K 展開式をもつことがわかる。よって、(21)式の作用素に関して、

$$M^K h(x(k)) = \sum_{l=1}^K D_{l,K} \cdot M^{l-1} h(x(k)) \quad (22)$$

と表現できる $m \times m$ 定数行列 $D_{l,K}$, $l=1, 2, \dots, K$ と有限数 K が存在する。よって、系(3)が S_K 展開式をもち、 f, g, h が仮定(i), (ii)を満たしているとき、 $|u(k)| < \varepsilon$, $k=0, 1, \dots, N-1$ に関して、(16)式の解が存在する離散時間区間 $[0, N-1]$ において、

$$\begin{aligned} \Delta^l y(k) &= u'(k) M^l h(x(k)) \\ &\quad + O(\varepsilon), \quad l=1, 2, \dots, K, \quad k=0, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (23)$$

と表わせる。ここで、 $\varepsilon > 0$ で、 Δ は l に関する差分演算子を表わす。すると、 ε が十分小さければ、(3)式の入出力差分方程式

$$\Delta^K y(k) = \sum_{l=1}^K u^{K-l+1}(k) D_{l,K} \Delta^{l-1} y(k) \quad k=0, 1, \dots, N-1 \quad (24)$$

が得られる。よって、 $|u(k)| < \varepsilon$, $k=0, \dots, N-1$ なる $u(k)$ に関して、つぎの定理2を得る。

《定理2》 もし、(22)式がおのおのの $K=1, 2, \dots, \hat{K}$ で成立し、かつ、 $D_l \triangleq D_{l,K}, \hat{K}=D_{l,K-1}=\dots=D_{l,1}$, $l=1, 2, \dots, \hat{K}$ ならば、(3)式の入出力差分方程式は双線形離散値系

$$v_{i-1}(k+1) = (I + D_i) v_{i-1}(k) u(k), \quad i=2, 3, \dots, \hat{K} \quad (25)$$

$$v_0(k+1) = D_1 v_0(k) u(k), \quad y(k) = v_0(k), \quad k=0, 1, \dots, N-1$$

で実現できる。ここで $v_{i-1}(k)$, $i=1, 2, \dots, \hat{K}$ は m 次元ベクトルである。

(証明) (24)式で $\Delta^{\hat{K}} y(k) = v_{\hat{K}-1}(k+1)$, $\Delta^{\hat{K}-1} y(k) = v_{\hat{K}-1}(k)$ とおくと、必要性は(22)式がおのおのの K について成立することより、

$$\begin{aligned} v_{-1\hat{K}}(k+1) &= u(k) \sum_{l=1}^{\hat{K}-1} u^{\hat{K}-l}(k) D_{l\hat{K}} y(k) \\ &\quad + u(k) D_{\hat{K}\hat{K}} v_{\hat{K}-1}(k) = u(k) (I + D_{\hat{K}}) v_{\hat{K}-1}(k) \end{aligned}$$

となる。以下同様にして、 $y(k) = v_0(k)$ が得られる。十分性はこの証明の逆を辿ればよい。(証明終)

Brockett は(3)式の微分系に対して、その入出力関係式として Volterra 級数を導き、その実現系を

求めているのと類似して、本章では(3)式が S_K 展開式をもつとき、その入出力関係式として、(24)式の入出力差分方程式を用いて、その実現系(25)を求めた。以上の議論をつぎの簡単な数値例によって実証しておく。

【例題 2】 1 次元非線形離散値系 $x(k+1)=x(k)+\{x(k) \log x(k)\} \cdot u(k)$, $y(k)=\log x(k)$, $x(k)>0$, $k=0, 1, 2, \dots$ は, $L^0 h(x(k))=\log x(k)$, $L^1 h(x(k))=1$, $L^2 h(x(k))=0 \cdot L^0 h(x(k))+0 \cdot L^1 h(x(k))$ となり, S_K 展開式をもつことがわかる。また, $M^0 h(x(k))=\log x(k)$, $M^1 h(x(k))=\log x(k)=M^0 h(x(k))$ となり, 入出力差分方程式は, $\Delta y(k)=u(k)y(k)$ と得られる。さらに, 定理 2 の条件を満足しているので, 実現系は, $v_0(k+1)=u(k)v_0(k)$, $y(k)=v_0(k)$, $k=0, 1, 2, \dots$ となる。

4. 系が無限次元 sensor-orbit をもつ場合

一般に, 仮定(i)を満足する非線形関数は, 数学的には無限級数に展開できる。よって, (4)式の作用素を用いた場合にも, (6)式が無限級数になる場合もある。

本章では, (6)式が無限級数となる場合, 仮定(i)(iii)のもとで, それが収束する十分条件を求め, その条件があるとき, 第1章の手法で得られた双線形化系が, 制御理論的にどのような性質をもつかについて調べる。

いま, (3)式が sensor-orbit をもつとは, 有限次元, 無限次元にかかわらず, 仮定(i)を満足する $f(x(k))$, $g(x(k))$ に対して, k に無関係に

$$\begin{aligned} L^i h(x(k)) &= \sum_{j=0}^{l-1} A_j L^j h(x(k)), \quad L^0 h(x(k)) \\ &= h(x(k)) \end{aligned} \quad (26)$$

と表現できる $m \times m$ 定数行列 A_j が存在することである。

すると, 無限次元 sensor-orbit (以下, S_∞ 展開式と呼ぶ) をもつとは, (26)式が,

$$\lim_{l \rightarrow \infty} L^l h(x(k)) = \sum_{j=0}^{\infty} A_j L^j h(x(k)) \quad (27)$$

となる場合であると定義できる。(27)式において,

$$L^{l-1} h(x(k)) = \sum_{j=0}^{l-2} A_j L^j h(x(k))$$

とおくと,

$$\lim_{l \rightarrow \infty} L^l h(x(k)) = \lim_{l \rightarrow \infty} \{(I + A_{l-1}) \cdot L^{l-1} h(x(k))\} \quad (28)$$

と書き直せる。ところが, (28)式が成立するのは, つぎの2通りの場合が考えられる。(I) $L^l h(x(k))=$

$(I + A_{l-1}) \cdot L^{l-1} h(x(k)) + \sigma_{l-1}$, $\lim_{l \rightarrow \infty} \sigma_{l-1} = \theta$ なる m 次元ベクトル σ_{l-1} が存在する。(II) $L^l h(x(k)) = (I + A_{l-1}) L^{l-1} h(x(k))$ が, $l=1, 2, \dots, K, \dots$ のおのおのについて成立する。しかし, (I)の場合 $\lim_{l \rightarrow \infty} \sigma_{l-1} = \theta$ であるから $\|\sigma_{l-1}\| \leq c_1$ となり, もし,

$$\max_{l=1, 2, \dots, K, \dots} \|A_{l-1}\| \leq c_2 \quad (29)$$

ならば, $\|L^l h(x(k))\| \leq c_3(c_1)$, $l=1, 2, \dots, K, \dots$ となり⁸⁾, $L^l h(x(k))$ はおのおの l について有界であることがわかる。

ここで, n 次元ベクトル x のユークリッド・ノルム $\|x\|$ に対して, $\|A_{l-1}\| = \max_{\|x\|=1} \|A_{l-1}x\|$, $c_1, c_2, c_3 > 0$ としている。

よって, 無限関数列 $\{L^0 h(x(k)), L^1 h(x(k)), \dots, L^K h(x(k)), \dots\}$ は一様に収束する。すなわち, (27)式は収束する。

つぎに, (II)の場合も(29)式の条件があれば, $L^l h(x(k))$ は $l \rightarrow \infty$ で一様収束することが知られている⁸⁾。

したがって, (I), (II)いずれの場合も(29)式は, (27)式が収束するための十分条件になっていることがわかる。なお, (27)式が収束すれば, 仮定(i), (iii)があるので, $\lim_{l \rightarrow \infty} [L^{l-1} h(x(k))]_{x(k)} \cdot g(x(k)) = \lim_{l \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{\infty} B(l, j) L^{j-1} h(x(k))$ も収束することは自明である。

(3)式が S_∞ 展開式をもつ場合, 第1章の手法で得られる双線形化系の次元は無限次元となる。よって, 以下の議論では, その次元を有限な mK 次元とし, 後に $K \rightarrow \infty$ としても一般性は損わない。

K を有限とすると, (3)式的双線形化系は(8), (10)式になる。(8)式の自由運動系,

$$\begin{aligned} z(k+1) - z(k) &= \begin{bmatrix} -I & I & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -I & I & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & & I \\ A_1 & A_2 & \dots & A_{K-1} & \end{bmatrix} \cdot z(k) = (A - I) \cdot z(k), \\ k &= 0, 1, 2, \dots, z(0) = z_0 \end{aligned} \quad (30)$$

を考える。(30)式において, $A - I$ の固有値を $\lambda(A - I)$ とし, それに対応する固有ベクトルを $\bar{x} = \text{col.}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_K)$ とする。ここで, $\bar{x}_l$, $l=1, 2, \dots, K$ は m 次元ベクトルである。すると, $(A - I)\bar{x} = \lambda(A - I) \cdot \bar{x}$ より,

$$|1 + \lambda(A - I)|^K \leq \sum_{l=1}^K |1 + \lambda(A - I)|^{l-1} \cdot \|A_l\| \quad (31)$$

となる。よって、つぎの定理3が得られる。

《定理3》 もし、 $\|A_l\| \leq c_2$, $l=1, 2, \dots, K, \dots$ ならば、(30)式は $K \rightarrow \infty$ で、一様に漸近安定である。ここで、 $c_2 > 0$ である。

【証明】 (31)式から、 $c_2 < c_4$ に対して、

$$\begin{aligned} |1 + \lambda_{\max}(A-I)|^K &< \sum_{l=1}^K |1 + \lambda_{\max}(A-I)|^{l-1} \cdot c_4 \\ &= \frac{1 - |1 + \lambda_{\max}(A-I)|^{K+1}}{1 - |1 + \lambda_{\max}(A-I)|} \cdot c_4 \end{aligned} \quad (32)$$

を得る。ここで、 $c_4 > 0$ で、 $\lambda_{\max}$ は $\lambda(A-I)$ の中で最大のものを表わす。

すると、 $K \rightarrow \infty$ で、(32)式から、 $|\lambda_{\max}(A-I)| \leq c_5$ なる正定数 c_5 が存在することがわかる。よって、

$\|A-I\| = |\lambda_{\max}((A-I)'(A-I))| = \lambda_{\max}^2(A-I) \leq c_5^2$ となり、系(30)は $K \rightarrow \infty$ で一様に漸近安定である。

(証明終)

以上の議論から、(29)式が成立するならば、無限級数(27)は一様に収束し、同時に $K \rightarrow \infty$ で、(30)式は一様に漸近安定になるという制御理論的性質をもっていることがわかった。また、 S_K 展開式をもつときには、(29)式は双線形化系(8)の自由運動系が、一様漸近安定の十分条件になっていることを注意しておく。

【例題3】 1次元非線形離散値系

$$x(k+1) = x(k) + g(x(k))u(k), \quad y(k) = x^T(k),$$

$$k=0, 1, m, \dots, x(0)=x_0, \quad 0 < \gamma < 1$$

が与えられたとする。すると、 $\mathcal{L}^1 h(x(k)) = \gamma \mathcal{L}^0 h(x(k))$, $\mathcal{L}^2 h(x(k)) = \gamma \mathcal{L}^0 h(x(k)) = (\gamma-1) \mathcal{L}^1 h(x(k)) + \gamma \mathcal{L}^0 h(x(k))$, ..., $\mathcal{L}^K h(x(k)) = (\gamma-1) \sum_{l=1}^{K-1} \mathcal{L}^l h(x(k)) + \gamma \mathcal{L}^0 h(x(k))$, ...となるので、有限な K 項までの双線形化系の自由運動式は、

$$\begin{aligned} z(k+1) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \gamma & \gamma-1 & \gamma-1 & \dots & \gamma-1 \end{bmatrix} z(k), \\ z_i(0) &= \gamma^{i-1} x_0^T, \quad i=1, 2, \dots, K, \quad k=0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (33)$$

となる。よって、 $A_1 = \gamma$, $A_{l-1} = \gamma-1$, $l=2, 3, \dots, K$ だから、 $|A_1| = \gamma < 1$, $|A_l| = |\gamma-1| < 1$, $l=2, 3, \dots, K$ となって、(29)式を満足していることがわかる。よって、(33)式が $K \rightarrow \infty$ で一様に漸近安定であること、すなわち $K \rightarrow \infty$, $k \rightarrow \infty$ で $z_K(k+1)$ が一様に収束することが保証されればよい。ところが、 $z_K(k+1) = \gamma^{k+1} x_0^T + (\gamma-1) \sum_{l=1}^{K-1} \gamma^{k+l} x_0^T = \gamma^{k+1} \cdot \gamma^{K-2} \cdot x_0^T$ となり、 $\lim_{K \rightarrow \infty, k \rightarrow \infty} z_K(k+1) = 0$ を得る。 $\gamma=1/2$, $x_0=1$ のとき、 $K=4$ に対する(33)式の状態軌道を Fig. 1 に示

Fig. 1 The state loci of free motion for bilinearized system at $K=4$

しておく。Fig. 1 から明らかに、 $z_K(k+1)$ の収束性は K とともに減少していることがわかる。

5. む す び

Lo の提唱した sensor-orbit 法と呼ばれる双線形化法を、入力線形に現われる非線形離散値系への適用を試み、双線形化された動的に等価な双線形離散値系と元の非線形系との関係を制御理論的立場から検討し、その結果、つぎの結論が得られた。(i)元の非線形系が S_K 展開式をもつとき、離散値系では Lo の作用素が時間に関して連続でないので、双線形化系の状態変数の導入に微分系には不要な工夫が必要である。(ii)双線形化系の状態変数の定義として、本論文の定義に従えば元の非線形系と動的に等価な双線形化系が得られる。(iii)動的に等価な双線形系を与える非線形系では、離散値系のため小域の入力列に関してのみ、その入出力差分方程式が構成でき、その実現系が得られる。

一般に、 C^∞ クラスに属する非線形関数は無限級数展開が可能である。これは、sensor-orbit 法では、元の非線形系が S_∞ 展開式をもつことを意味する。ただし、sensor-orbit 法の場合、通常の Taylor 展開法と異なって、有限数 K について $f(x(k))$ が $[\mathcal{L}^K h(x(k))]_{x(k)}$ の零空間に属しているような場合、有限項となる。これは、sensor orbit 法では有限項級数となる関数のクラスが Taylor 展開法よりも広いといえる。いずれにしても、 S_∞ 展開式をもつ場合、その収束性が保証される必要があり、本論文では、sensor-orbit 法で得られた級数の係数行列について、その十分条件を求めた。しかし、工学的には、これだけでは不十分である。というのは、動的に等価な双線形系を得るのに、有限項で近似しなければならない。そのとき、どの程度の有限項で近似すれば、どの程度の誤差があるか明らかにしなければならない。本論文は、その誤差を得られた双線形系の安定性の問題に置き換えて、sensor-orbit

法で求めた級数の項数に対応して、一様に漸近的に、その平衡点からの誤差を少なくできることを明らかにした。

以上の結論をまとめると、本論文では、たいていの実システムは入出力データ列が得られるので、離散値系に対して、元の非線形系と同一の入出力特性を保持した見通しのよい記述式に変換でき、Lo の提唱した sensor-orbit 法に実用性を付与したといえる。ただし、この方法で得られる双線形系の次元は相当多くなるが、双線形系が得られているので、既存の大規模系で用いられている集約化行列⁹⁾の導入による低次元化の可能性があり、また、最適制御問題の数値解法などに用いる場合には、分割法、または双対法などを用いて、次元の問題を回避する必要がある。

参 考 文 献

- 1) 砂原善文：非線形システム制御理論（そのファッションの変遷と最近の動向），計測と制御，**17**-7, 1/10 (1978)
- 2) J. T. Lo: Global Bilinearization of Systems with Control Appearing Linearly, SIAM J. on Control, **13**-4, 879/885 (1975)
- 3) A. J. Krener: Linearization and Bilinearization of Control Systems, Proc. 1978 Allerton Conf., Circuit and System Theory, 834/843 (1974)
- 4) R. W. Brockett: Volterra Series and Geometric Control Theory, Automatica, **12**, 167/176 (1976)
- 5) R. W. Brockett: Convergence of Volterra Series on Infinite Intervals and Bilinear Approximation, Nonlinear Systems and Applications-International Conf., edited by V. Lakshmikantham, Academic Press Inc., 39/46 (1977)
- 6) R. S. Bucy and P. D. Joseph: Filtering for Stochastic Processes with Application to Guidance, 55/59, Wiley-Interscience (1968)
- 7) V. Lakshmikantham editor: Nonlinear Systems and Applications, Proceedings of an International Conference on Nonlinear Systems and Applications Held at the University of Texas at Arlington, July 19-23, 1976, Academic Press, Inc. (1977)
- 8) R. E. Kalman and J. E. Bertram: Control System Analysis and Design via "Second Method" of Lyapunov' II Discrete-Time Systems, J. of Basic Engr., Trans. of the ASME, 392/400 (1940)
- 9) M. Aoki: Control of Large-Scale Dynamic Systems by Aggregation, IEEE Trans. on Automatic Control, **AC-13**-3, 246/253 (1968)