複合系安定解析における周波数領域条件の有効性

雨 宮 孝*

On the Efficiency of the Frequency Domain Condition for the Stability Analysis of Composite Systems

Takashi AMEMIYA*

1. 序 論

時変むだ時間を含む複合系の安定解析において著者らは、巨視的漸近安定なる概念を導入し、各サブシステムの状態を比較関数と呼ぶ非負スカラー関数で代表させたうえ、この安定性のための十分条件を示した²⁾。

この条件の証明には、1階微分不等式の解の減衰性を利用したが、その過程で文献³⁾で指摘されたように、係数行列の分解不能性 (irreducibility) を仮定しており、このままでは、明らかに定理適用の際の障害となる。文献³⁾では、むだ時間が時不変である場合に限りその除去が示され、同時に桑原、森による周波数領域の条件⁴⁾に対し、われわれの条件がその“一つの十分条件”であると述べられている。しかしながら、いかなる場合において前者がわれわれの条件により広い条件となるかはまったく示されていない。よって以下では、まず分解不能性を除く手順を示し、二つの条件の相異を明らかにしたい。

2. 微分不等式と安定条件の誘導

複合システム Σ は、 m 個のサブシステムより成るものとする。われわれは、各サブシステム S_i の入出力 $u_i, y_i (\in R^1)$ に対し、適当な初期条件のもとで不等式 $\dot{v}_i(t) \leq -a_i v_i(t) + b_i |u_i(t)|, v_i(t) \geq |y_i(t)|$

(1)

を満たすスカラー関数 $v_i(t)$ 、非負定数 a_i, b_i の存在を仮定し、 $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_m)'$ の満たす条件として

$$\dot{\mathbf{v}}(t) \leq -A\mathbf{v}(t) + B\tilde{\mathbf{v}}(t),$$

$$\tilde{\mathbf{v}}(t) = (\dots, \sup_{t-\tau \leq \theta \leq t} v_i(\theta), \dots)' \quad (2)$$

を導いた。ここに $A = \text{diag}(a_1, \dots, a_m)$ であり、 B はサブシステム間の結合を示す定数より与えられる非負行列である。また τ は、サブシステム間の時変むだ時間の上限である。著者らは、任意の初期関数に対し (2) 式の解が $t \rightarrow \infty$ で $\mathbf{0}$ に収束する条件を求め、 Σ の巨視的漸近安定のための十分条件とした。

一方桑原らは、自己自身への干渉にのみ時不変むだ時間のあるシステムに対し、サブシステムの動特性を状態変数を用いて記述したうえ、ベクトルリアプノフ関数 $W = (w_1, \dots, w_m)'$ ($w_i \geq 0$) の満たすべき不等式

$$\dot{W}(t) \leq A_K W(t) + D_K W(t - \tau) + R_K F(W) \quad (3)$$

を導いた。ここに A_K, D_K は対角行列で A_K は非正、 $R_K = (r_{ij})$ には $r_{ij} \geq 0 (i \neq j)$ が仮定されている。また $F(W) = (f_1(w_1), \dots, f_m(w_m))'$ である (文献⁴⁾では $F = \text{diag}(\dots, f_i(w_i), \dots)$ となっているが誤りであろう)。 $f_i(w_i)$ は w_i の非負非減少関数である。

(2), (3) 式は当然その導出過程を異にするが、考察すべき二つの条件の差は、この不等式の収束条件の差である。われわれは、つぎの二つの定理を証明した。

《定理 1》 $\mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{z}, t): R^m \times R^m \times R \rightarrow R^m$ が、 $\mathbf{z}$ の広義単調増加、 $\mathbf{x}$ の非対角広義単調増加関数 (注 1) であるとき、 $\mathbf{x}(\theta) \geq (\leq) \mathbf{y}(\theta) (-\tau \leq \theta \leq 0)$ を初期関数とする。

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \tilde{\mathbf{x}}(t), t) \quad (4)$$

$$\dot{\mathbf{y}}(t) \leq (\geq) \mathbf{g}(\mathbf{y}(t), \tilde{\mathbf{y}}(t), t) \quad (5)$$

の解は、 $t \geq 0$ で $\mathbf{x}(t) \geq (\leq) \mathbf{y}(t)$ を満たす (注 2)。

《定理 2》 (2) 式において、 $A - B$ が分解不能な M 行列ならば、任意の初期関数に対して定数 $\mathbf{r} > \mathbf{0}, \gamma > 0$ が存在して、 $t > 0$ で次式を満たす。

$$0 \leq \mathbf{v}(t) \leq \mathbf{r} e^{-\gamma t} \quad (6)$$

つぎに $A - B$ が分解可能であるとする。このとき、適当な置換行列 T (非負) により、 $\xi = (\xi_1', \xi_2')' = T\mathbf{v}(t)$ とすると、(2) 式はつぎのように変換される。

$$\dot{\xi}_1(t) \leq (-A_{11}\xi_1(t) + B_{11}\xi_1(t)) + B_{21}\xi_2(t) \quad (7)$$

$$\dot{\xi}_2(t) \leq -A_{22}\xi_2(t) + B_{22}\xi_2(t) \quad (8)$$

ここで $A_{ij}, B_{ij} (i, j = 1, 2)$ はすべて非負行列である。 $A_{11} - B_{11}, A_{22} - B_{22}$ が分割不能であるわけでは必ずしもないが、手続きの簡単化のため、すでに分割不能であるとする。このとき定理 2 により、適当な定数 $\mathbf{r}_2 > \mathbf{0}, \gamma_2 > 0$ に対して $t > 0$ で $\xi_2(t)$ は、

(注 1) $\mathbf{g}$ の第 i 要素は、 $\mathbf{x}$ の i 要素以外の全要素に対して広義単調増加である。

(注 2) この定理は、 $\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}$ を同一の有界連続時変むだ時間を含む $(\dots, x_i(t - \tau_i(t)), \dots), (\dots, y_i(t - \tau_i(t)), \dots)$ に置き換えても成り立つ (証明はまったく同様である)。

* 明石工業高等専門学校 明石市魚住町西岡
(Received June 6, 1979)

$$0 \leq \xi_2(t) \leq r_2 e^{-\lambda t} \quad (9)$$

を満たす。一方(7)式の解は、 $\xi_2(t)$ が加わらない限り(9)式と同様指数的に0に漸近し、外部より加わる $\xi_2(t)$ も同時に0に指数的に漸近する。この場合、(7)式の解 $\xi_1(t)$ が指数的に0に漸近することは、容易に証明しうるのである(詳細は略す)。

文献⁴⁾においては、(3)式に対し等式

$$\dot{V}(t) = A_K V(t) + D_K V(t-\tau) + R_K F(V) \quad (10)$$

を考え、 $W(\theta) \leq V(\theta)$ ($-\tau \leq \theta \leq 0$) ならば $t \geq 0$ で $W(t) \leq V(t)$ であることを証明なしで用いている。ここで D_K には対角行列以外の制約がないが、 $D_K \geq 0$ は必要と思われる。何故なら、 $D_K \geq 0$ でなければ $W(\theta) \leq V(\theta)$, ($\theta \leq 0$), $W(0) = V(0)$ より $\dot{W}(0) \leq \dot{V}(0)$ が導かれず、求める性質が証明されないのである。

D_K は非負とする。このときは上記不等式が成り立つ。文献⁴⁾の主旨は、(10)式の収束条件を絶対安定条件より求めようという点にある。

3. 周波数領域の条件の検討

非線形関数 $\varphi(\sigma) = (\varphi_1(\sigma_1), \dots, \varphi_m(\sigma_m))'$ を含み、 $-\varphi$, $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_m)'$ 間の伝達関数が $W(s)$ である非線形制御系が、 $K = \text{diag}(k_1, \dots, k_m)$, $k_i > 0$ として

$$\sigma'(K\sigma - \varphi) \geq 0 \quad (11)$$

を満たす任意の1価連続な φ に対して、大域的に漸近安定な平衡点 $\sigma = 0$ をもつとき、系は絶対安定と呼ばれる。絶対安定については種々なシステムについて考察されており(たとえば、文献⁵⁾)、線形部分に時不変むだ時間を含む場合の条件が、文献⁴⁾でも引用されている。

まず比較のために R_K の対角要素 r_{ii} を非負とする。ところで系が絶対安定であるためには、セクタ(11)内の任意の線形関数に対して、系が漸近安定となることが必要である。よって(10)式において $F(V) \leq KV$ なるセクタを仮定すると($F(V)$ は非負である)。

$$\dot{V}(t) = A_K V(t) + D_K V(t-\tau) + R_K K V(t) \quad (12)$$

が漸近安定となることが、(10)式の絶対安定性のために必要である。一方定理1により、(12)式が大域的に漸近安定となれば、セクタ内の任意の非線形関数に対して(10)式が大域的に漸近安定となることがいえる(脚注2参照)。すなわち、(12)式の大域的漸近安定であることが、(10)式の絶対安定のための必要十分条件であるといえる。定理2は、(12)式の漸近安定性の十分条件を与えるが、

$$\dot{V}(t) = (\dots, \inf_{t-\tau \leq \theta \leq t} V_i(\theta), \dots)'$$

とすると、(12)式を満たす $V(t)$ は不等式

$$\dot{V}(t) \geq A_K V(t) + D_K V(t) + R_K K V(t)$$

を満たす。一般に A (対角)、 B が共に正方正非負行列のとき、 $A-B$ が M 行列でないならば、

$$(A - B e^{-\lambda \tau}) \alpha = -\lambda \alpha$$

を満たす定数 $\alpha \geq 0$, $\lambda > 0$ の存在が、定理2とまったく同様の手順で示される。すなわち $-(A_K + D_K + R_K K)$ が M 行列でないとき、(12)式は適当な初期条件のもとで $V(t) \geq \alpha e^{\lambda t}$ なる解をもつ。よって $-(A_K + D_K + R_K K)$ が M 行列であることは、むだ時間が時変の場合、 D_K が一般の非負行列の場合も含め、(10)式が大域的に漸近安定となるための必要十分条件である。

周波数領域の条件は、絶対安定のための十分条件にすぎぬこと、複雑な形、多くの任意定数の存在により、明らかにこの場合有効でない。

4. 負帰還の場合

以上、 R_K の対角要素が非負である場合を考えたが、 $r_{ii} < 0$ の場合を考えよう。もちろんいくつかの r_{ii} が正ならば、対応する $f_i(w_i)$ は線形セクタの上限のみ考えれば良い。 R_K は本来、 $h_i(x_1, \dots, x_m)$ をサブシステム全体が S_i に及ぼす干渉とすると、 S_i のリアプノフ関数 w_i の時間微分に対する h_i の影響の評価 $\text{grad } w_i \cdot h_i \leq \sum_j r_{ij} f_j(w_j)$ として定義される定数である (x_j は S_j の状態変数)。

ところで、サブシステム相互の干渉を個々のサブシステムの与える影響の和として評価できるならば、自己自身の“干渉”は、自己自身の安定度の評価である。 w_i と x_i との関係に含め考えるのが自然ではなからうか。さらに、自己自身の干渉があるとして、それを常に負の量 $-r_{ii} f_i(w_i)$ より小と評価できるのはかなり特殊な場合のように思われるがどうか。

しかし、いくつかの $r_{ii} < 0$ の存在を仮定することはできる。周波数領域の条件が有効となりうるのは、この場合に限られる。 $r_{ii} < 0$ の存在を認めれば、サブシステムが安定であるとの仮定も容易に緩和しうる。

以上、絶対安定条件の複合系安定解析における有効性を示し分割不能性の仮定の除きうることを示した。

参考文献

- 1) 得丸, 足立, 雨宮: 大規模複合系の安定性, 計測自動制御学会論文集, 9-4, 429/437 (1973)
- 2) 得丸, 足立, 雨宮: むだ時間複合系の巨視的漸近安定, 計測自動制御学会論文集, 10-4, 493/499 (1974)
- 3) 荒木, 森: むだ時間を含む複合系の安定条件, 計測自動制御学会論文集, 15-2, 267/268 (1979)
- 4) 桑原, 森: 大規模システムの周波数領域安定条件, 電気学会論文誌C, 96-10 (1976)
- 5) A. Halanay: Differential Equations, Academic Press (1970)