多項式入力に対する線形多変数フィードバック系の初期挙動[†]

森 隆比古*・伊 藤 正 美**

Initial Response to Polynomial Inputs for a Linear Multivariable Feedback System

Takahiko MORI* and Masami ITO**

In this paper we consider the behavior of the output of a multivariable feedback system at the beginning of the response when inputs are a polynomial function of time.

It is shown that this initial behavior can be computed very easily from the open-loop transfer function matrix of the system. Using this result, so called "a reverse response" to a step function input in scalar systems is extended to the case of multivariable systems, and conditions that a feedback system has no reverse response to any vector step function are obtained.

性に関するものである。この初期特性は、過渡特性の一部であり、フィードバック系の速応性とも密接に関連してたいへん重要であるが、特に制御系が多入力多出力である場合には、まだ十分な研究がなされていない。

第2章では、多項式入力に対するフィードバック系の応答の初期の挙動と、その系の開ループ伝達関数行列との関係を求める。第3章では、その応用として、多入力多出力フィードバック系の逆応答^{2),3)}について考察し、いかなるベクトルステップ入力に対しても逆応答をしないための必要十分条件を示す。

1. はじめに

線形多変数フィードバック系の入出力応答が、その系の開ループ伝達関数行列とどのような関係にあるのかを明らかにすることは、制御系の応答特性を調べたり、あるいは希望の特性をもつような制御系を設計しようとする場合に非常に重要である。著者らは、先に多入力多出力フィードバック系に時間の多項式で表わされる入力に加えられたとき、十分な時間が経過すると、その応答出力がどのような漸近線に近づくかを示した¹⁾。

本論文では、この問題とちょうど双対な関係になっている、初期時刻付近での応答特性について考察する。これは、前者がフィードバック系の定常特性に関するものであるのに対し、後者はフィードバック系の応答出力がどのような立ち上がり方をするかという初期特

2. フィードバック系の初期挙動

Fig. 1 に示される漸近安定な m 入力 m 出力直結フィードバック系を考える。ただし、この系の開ループ伝達関数行列 $G(s)$ 、および閉ループ伝達関数行列 $H(s)$ は、ともにプロパーな有理関数行列とする。すなわち、これらの行列の各要素は、すべて分子多項式の次数が分母多項式の次数以下であるとする。また、フィードバック系の入力および出力を、それぞれ $r(t)$ 、 $y(t)$ とし、その Laplace 変換したものを $r(s)$ 、 $y(s)$ とする。

さて、この系は初期状態が 0 のとき、時間 t の多項式で表わされる入力 $r(t)$ 、

$$r(t) = r_1 + r_2 t + r_3 \frac{t^2}{2!} + \cdots + r_l \frac{t^{l-1}}{(l-1)!}$$

に対し、応答の初期においてどのような挙動をするの

Fig. 1 Unity feedback system

[†] 第 18 回計測自動制御学会学術講演会で発表 (昭 54・8)

* 上智大学理工学部 東京都千代田区紀尾井町 7

** 名古屋大学工学部 名古屋千種区不老町

* Faculty of Science and Technology, Sophia University, Chiyoda-ku, Tokyo

** Faculty of Engineering, Nagoya University, Nagoya (Received July 20, 1979)

(Revised October 20, 1979)

だろうか。

一般に、フィードバック系に限らず、漸近安定な 1 入力 1 出力系においては、出力 $y(t)$ の応答の初期における挙動は、 $y(t)$ の $t=0$ における Taylor 級数展開を、たとえば、

$$y(t) = y_1 + y_2 t + y_3 \frac{t^2}{2!} + \dots \quad (t > 0)$$

とすれば、この右辺の最初の数項により近似することができ、しかも、この係数 y_i ($i=1, 2, 3, \dots$) は、 s の無限遠点における $y(s)$ の Laurent 級数展開

$$y(s) = y_1 s^{-1} + y_2 s^{-2} + y_3 s^{-3} + \dots \\ = \sum_{i=1}^{\infty} y_i s^{-i}$$

の係数と一致することはよく知られている。このことは多入力多出力系の場合でもまったく同様であり、 $y(t)$ の $t=0$ における Taylor 級数展開は、つぎのように求めることができる。

[補題 1]

“伝達関数行列がプロパーな有理関数行列 $H(s)$ である漸近安定な系の、多項式入力

$$r(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ r_1 + r_2 t + r_3 \frac{t^2}{2!} + \dots + r_l \frac{t^{l-1}}{(l-1)!} & (t \geq 0) \end{cases}$$

に対する出力 $y(t)$ は、 $t > 0$ において

$$y(t) = H_0 r_1 + (H_0 r_2 + H_1 r_1) t \\ + (H_0 r_3 + H_1 r_2 + H_2 r_1) \frac{t^2}{2!} + \dots \\ = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{\substack{i+j=k \\ 1 \leq j \leq l \text{ かつ } i \geq 0}} H_i r_j \right) \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}$$

と表わされる。ただし、 $t < 0$ において $y(t) = 0$ とし、 H_i ($i=0, 1, 2, \dots$) は、 s の無限遠点における $H(s)$ の Laurent 級数展開

$$H(s) = H_0 + H_1 s^{-1} + H_2 s^{-2} + \dots \\ = \sum_{i=0}^{\infty} H_i s^{-i}$$

の係数とする”。

(証明)

$t < 0$ において $y(t) = 0$ と仮定されているから、 $r(t)$ に対するこの系の出力 $y(t)$ の $t=0$ における Taylor 級数展開は、

$$y(s) = H(s)r(s)$$

の $s \rightarrow \infty$ における Laurent 級数展開の係数から求められる。ところが、これは

$$y(s) = (H_0 + H_1 s^{-1} + H_2 s^{-2} + \dots) \\ \cdot (r_1 s^{-1} + r_2 s^{-2} + \dots + r_l s^{-l}) \\ = H_0 r_1 s^{-1} + (H_0 r_2 + H_1 r_1) s^{-2}$$

Fig. 2 Feedback system for lemma 2

$$+ (H_0 r_3 + H_1 r_2 + H_2 r_1) s^{-3} + \dots$$

となるので、補題が成立することは明らかである。■

Fig. 1 のフィードバック系にこの補題を適用すると、系の初期挙動は、閉ループ伝達関数行列 $H(s)$ から調べることができるが、さらに、これをその系の開ループ伝達関数行列 $G(s)$ から直接求めるためには、 $H(s)$ と $G(s)$ との関係を示す必要がある。そこで、つぎにこれについて述べる。

最初に、Fig. 1 のフィードバック系よりもう少し一般的な、Fig. 2 のフィードバック系について考える。この場合、フィードバック系の伝達関数行列とその系の開ループ伝達関数行列との間には、つぎの補題の関係が成立する。

[補題 2] (注 1)

“開ループ伝達関数行列 $G(s)$ およびフィードバック行列 $F(s)$ が、ともにプロパーな有理関数行列であるとき、閉ループ伝達関数行列 $H(s)$ がプロパーになるための必要十分条件は、 $I + F_0 G_0$ が正則となることである。ただし、 $F_0 = \lim_{|s| \rightarrow \infty} F(s)$ 、 $G_0 = \lim_{|s| \rightarrow \infty} G(s)$ とする。”

(証明)

十分性: $I + F_0 G_0$ が正則ならば、 $I + F(s)G(s)$ の逆行列が存在し、

$$H(s) = G(s)[I + F(s)G(s)]^{-1}$$

となる。さらに、

$$\lim_{|s| \rightarrow \infty} [I + F(s)G(s)]^{-1} = \lim_{|s| \rightarrow \infty} \frac{\text{adj}[I + F(s)G(s)]}{\det[I + F(s)G(s)]} \\ = \frac{\text{adj}(I + F_0 G_0)}{\det(I + F_0 G_0)} \\ = (I + F_0 G_0)^{-1}$$

となるから、 $H(s)$ がプロパーになることは明らかである。

必要性: Fig. 2 より

$$y(s) = G(s)[r(s) - F(s)y(s)]$$

だから、

$$[I + G(s)F(s)]y(s) = G(s)r(s)$$

を得る。一方、

$$y(s) = H(s)r(s)$$

(注 1) Vidyasagar⁴⁾ は、 $F(s)$ が定数行列のとき $H(s)$ がプロパーになるための条件について考察している。

であるので、これを上式に代入すると、

$$[I+G(s)F(s)]H(s)r(s)=G(s)r(s)$$

となる。ところが、この式は任意の $r(s)$ について成立しなければならないので、結局

$$G(s)-[I+G(s)F(s)]H(s)=0$$

を得る。さて、ここで $H(s)$ がプロパーであり、かつ $I+F_0G_0$ が正則でないと仮定しよう。このとき、上式の極限をとると

$$\begin{aligned} \lim_{|s| \rightarrow \infty} \{G(s)-[I+G(s)F(s)]H(s)\} \\ = G_0-(I+G_0F_0)H_0=0 \end{aligned}$$

となる。ただし、 $H_0=\lim_{|s| \rightarrow \infty} H(s)$ とする。また、 $I+F_0G_0$ が正則でないことから、 $\det(I+G_0F_0)=\det(I+F_0G_0)$ は 0 になるので、

$$k'(I+G_0F_0)=0$$

となる 0 でない定数ベクトル k' が存在する。したがって、

$$\begin{aligned} k'G_0 &= k'G_0 - k'(I+G_0F_0)H_0 \\ &= k'[G_0-(I+G_0F_0)H_0] \\ &= 0 \end{aligned}$$

を得る。これを

$$k'(I+G_0F_0)=0$$

の式に代入すると、 $k'=0$ となるので $k' \neq 0$ に矛盾する。 ■

補題 2 において、 $G(s)$ が真にプロパーな有理関数行列であるときには、すなわち $\lim_{|s| \rightarrow \infty} G(s)=0$ である

ときには、 $I+F_0G_0$ は単位行列 I になるので、 $I+F(s)G(s)$ は常に逆行列をもつ。したがって、このときには

$$H(s)=G(s)[I+F(s)G(s)]^{-1}$$

となるが、

$$\begin{aligned} \lim_{|s| \rightarrow \infty} H(s) &= \lim_{|s| \rightarrow \infty} G(s)[I+F(s)G(s)]^{-1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

であるので、 $H(s)$ は常に真にプロパーな有理関数行列になる。

さて、Fig. 1 のフィードバック系の場合には、フィードバック行列が I であり、また $G(s)$ 、 $H(s)$ がともにプロパーな有理関数行列であるとしたので、補題 2 により $I+G_0$ は正則な行列である。したがって、 $I+G(s)$ は逆行列が存在し、

$$H(s)=G(s)[I+G(s)]^{-1}$$

または、

$$H(s)=[I+G(s)]^{-1}G(s)$$

なる関係を得る。

そこで、補題 1 にこの関係を用いると、多項式入力

に対するフィードバック系の初期挙動は、その系の開ループ伝達関数行列から直接調べることができる。

《定理 1》

“Fig. 1 の系において、補題 1 が成立する。さらに、このときの H_i ($i=0, 1, 2, \dots$) は、以下の式から順次求められる。

$$\begin{aligned} H_0 &= (I+N_p)^{-1}N_p \\ H_1 &= (I+N_p)^{-1}[N_{p-1}-(d_{p-1}I+N_{p-1})H_0] \\ H_2 &= (I+N_p)^{-1}[N_{p-2}-(d_{p-2}I+N_{p-2})H_0 \\ &\quad -(d_{p-1}I+N_{p-1})H_1] \end{aligned}$$

一般に、

$$\begin{aligned} H_i &= (I+N_p)^{-1}[N_{p-i} \\ &\quad - \sum_{\substack{j+k=i \\ 1 \leq j \leq p \text{ かつ } k \geq 0}} (d_{p-j}I+N_{p-j})H_k] \end{aligned}$$

である。ただし、 $G(s)$ の最小多項式 ($G(s)$ のすべての要素の最小公倍分母多項式) を、

$$d(s)=s^p+d_{p-1}s^{p-1}+\dots+d_1s+d_0$$

とし、 $d(s)$ に対する $G(s)$ の分子多項式を

$$N(s)=N_p s^p+N_{p-1}s^{p-1}+\dots+N_1s+N_0$$

とする。すなわち、 $G(s)=\frac{N(s)}{d(s)}$ とする。”

(証明)

補題 1 が成立するのは明らかであるから、 H_i ($i=0, 1, 2, \dots$) を $G(s)$ から求める方法を示せば十分である。

$$\text{まず、} G(s)=\frac{N(s)}{d(s)} \text{ を}$$

$$H(s)=[I+G(s)]^{-1}G(s)$$

に代入すると、

$$H(s)=[d(s)I+N(s)]^{-1}N(s)$$

となる。これから、

$$[d(s)I+N(s)]H(s)=N(s)$$

したがって、

$$\begin{aligned} &[(I+N_p)s^p+(d_{p-1}I+N_{p-1})s^{p-1}+\dots \\ &\quad +(d_1I+N_1)s+(d_0I+N_0)] \\ &\quad \cdot (H_0+H_1s^{-1}+H_2s^{-2}+\dots) \\ &= N_p s^p+N_{p-1}s^{p-1}+\dots+N_1s+N_0 \end{aligned}$$

を得る。この式の両辺の s の同じべき乗の係数を比較すると、

$$\begin{aligned} (I+N_p)H_0 &= N_p \\ (I+N_p)H_1+(d_{p-1}I+N_{p-1})H_0 &= N_{p-1} \\ (I+N_p)H_2+(d_{p-1}I+N_{p-1})H_1 \\ &\quad +(d_{p-2}I+N_{p-2})H_0 = N_{p-2} \end{aligned}$$

一般に、

$$(I+N_p)H_i + \sum_{\substack{j+k=i \\ 1 \leq j \leq p \text{ かつ } k \geq 0}} (d_{p-j}I+N_{p-j})H_k = N_{p-i}$$

となる。ところが、ここで $G_0 = \lim_{|s| \rightarrow \infty} G(s) = N_p$ だから、 $I + N_p$ は補題2から正則な行列となるので、求めるべき結果が得られる。■

定理1において、 $G(s)$ が真にプロパーな有理関数行列のときには、 $N_p = \lim_{|s| \rightarrow \infty} G(s) = 0$ となるので、上述の関係はさらに簡単になる。

さて、定理1によれば、 $H_0, H_1, H_2, \dots$ が $G(s)$ の最小多項式 $d(s)$ の係数と $d(s)$ を分母としたときの $G(s)$ の分子多項式 $N(s)$ の係数とにより表わされたが、ある行に注目して $H_0, H_1, H_2, \dots$ をこの順に眺めたとき、最初に現われる0でない行ベクトルは重要である。それは、たとえば第 i 行に注目したとき、 $H_0^i = H_1^i = \dots = H_{q_i-1}^i = 0$ であり $H_{q_i}^i \neq 0$ であったと仮定しよう。ただし、 H^i は H の第 i 行とする。また、 $r_1, r_2, r_3, \dots$ のうち最初に現われる0でないものを r_α としよう。すると、このとき $y(t)$ の第 i 要素 $y_i(t)$ の Taylor 級数展開は、

$$y_i(t) = H_{q_i}^i r_\alpha \frac{t^{q_i+\alpha-1}}{(q_i+\alpha-1)!} + (t \text{ の } q_i+\alpha \text{ 次以上の項})$$

となり、 $H_{q_i}^i r_\alpha$ (一般には0ではない) が $y_i(t)$ の級数展開の第1次近似式の係数となるからである。

そこで、つぎにこの $H_{q_i}^i$ を、定理1よりもう少し簡単な形で求めることを考えてみよう。

[系 1]

“ δ_i を $N(s)$ の第 i 行の行次数、すなわち $N(s)$ の第 i 行の要素中の s の最高次の次数とする。このとき、 $\delta_i = p$ ならば

$$H_0^i = (I + N_p)^{-1} N_p \text{ の第 } i \text{ 行,}$$

$\delta_i < p$ ならば

$$H_0^i = H_1^i = \dots = H_{p-\delta_i-1}^i = 0, \\ H_{p-\delta_i}^i = N_{\delta_i}^i (I + N_p)^{-1}$$

となる。ただし、 H^i 、 N^i はそれぞれ H 、 N の第 i 行とする。”

(証明)

$\delta_i = p$ のときは明らかだから、 $\delta_i < p$ の場合について証明する。

δ_i が $N(s)$ の第 i 行の行次数であるから、

$N(s)$ の第 i 行 $= N_{\delta_i}^i s^{\delta_i} + (s \text{ の } \delta_i - 1 \text{ 次以下の項})$ と書くことができる。すなわち

$$N_p^i = N_{p-1}^i = \dots = N_{\delta_i+1}^i = 0, \quad N_{\delta_i}^i \neq 0$$

である。ここで、最初に $(I + N_p)^{-1}$ の第 i 行が単位行列 I の第 i 行になることを示す。いま、 $(I + N_p)^{-1} = X$ とおくと $(I + N_p)X = I$ となるが、 N_p の第 i 行は0ベクトルであるので、 $(I + N_p)X$ の第 i 行は X の

第 i 行に等しくなる。したがって、 $(I + N_p)^{-1}$ の第 i 行は I の第 i 行になる。これから、

$$H_0^i = (I + N_p)^{-1} N_p \text{ の第 } i \text{ 行} \\ = N_p \text{ の第 } i \text{ 行} \\ = 0$$

を得る。さらに、 $N_{p-1}^i = 0$ ならば、 $d_{p-1}I + N_{p-1}$ の第 i 行は第 i 列要素以外はすべて0になるので、 $(d_{p-1}I + N_{p-1})H_0$ の第 i 行は0になる。したがって、

$$H_1^i = (I + N_p)^{-1} [N_{p-1} - (d_{p-1}I + N_{p-1})H_0] \\ \text{の第 } i \text{ 行} \\ [N_{p-1} - (d_{p-1}I + N_{p-1})H_0] \text{ の第 } i \text{ 行} \\ = 0$$

となる。この手続きを繰り返すと、

$$N_p^i = N_{p-1}^i = \dots = N_{\delta_i+1}^i = 0$$

であることから

$$H_0^i = H_1^i = \dots = H_{p-\delta_i-1}^i = 0$$

となる。また、このとき

$$H_{p-\delta_i}^i = (I + N_p)^{-1} \left[N_{\delta_i}^i - \sum_{k=0}^{p-\delta_i-1} (d_{k+\delta_i} I + N_{k+\delta_i}) H_k \right] \text{ の第 } i \text{ 行} \\ = N_{\delta_i}^i - \sum_{k=0}^{p-\delta_i-1} (d_{k+\delta_i} I + N_{k+\delta_i}) H_k \\ \text{の第 } i \text{ 行} \\ = N_{\delta_i}^i (I - H_0) = N_{\delta_i}^i (I + N_p)^{-1}$$

になっている。■

なお、

$$N_\delta \triangleq \begin{bmatrix} N_{\delta_1}^1 \\ N_{\delta_2}^2 \\ \vdots \\ N_{\delta_m}^m \end{bmatrix}$$

は、文献5で定義された $\Gamma_r[N(s)]$ であり、 $G(s)$ が真にプロパーな有理関数行列の場合には、 $N_p = 0$ であるので

$$H_{p-\delta} \triangleq \begin{bmatrix} H_{p-\delta_1}^1 \\ H_{p-\delta_2}^2 \\ \vdots \\ H_{p-\delta_m}^m \end{bmatrix} \text{ は、完全に } N_\delta \text{ に一致する。}$$

3. フィードバック系の逆応答

定理1および系1を用いると、1入力1出力系のステップ応答の初期において最終値と逆方向に振れる、いわゆる逆応答^{2),3)}と呼ばれる現象を多入力多出力系に拡張することができる。ここでは、特に Fig.1 の直結フィードバック系について考察する。この場合、フィードバック系の出力 $y(t)$ の各要素は、入力 $r(t)$ の対応する要素に追従するように設計されるので、逆

応答の定義はつぎのように与えられることになる。

【定義】

“Fig. 1 のフィードバック系に、第 i 要素が 0 でないベクトルステップ入力 $r(t)$ 、

$$r(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ r_1 & (t \geq 0) \end{cases}$$

を加えたとき、出力 $y(t)$ の第 i 要素が、すべての $t \in (0, \varepsilon)$ に対して、 $r(t)$ の第 i 要素と逆の符号をとるような $\varepsilon > 0$ が存在するとき、 $y(t)$ の第 i 要素は $r(t)$ に対して逆応答をするという。

また、 $y(t)$ の少なくとも一つの要素が $r(t)$ に対して逆応答をするとき、Fig. 1 のフィードバック系は $r(t)$ に対して逆応答をするという。”

この定義は、多入力多出力フィードバック系の逆応答の定義であるが、1 入力 1 出力系の場合との違いは、逆応答をするかどうか、フィードバック系に加えられる入力に依存することである。すなわち、多入力多出力系の場合には、一般に、たとえば出力の第 i 要素は入力の第 i 要素のみに依存するのではなく、入力の他の要素の影響を受けるので、ある入力に対してフィードバック系が逆応答をしなくても、別の入力に対しては逆応答をする場合がでてくる。

そこでつぎに、いかなるベクトルステップ入力に対しても、フィードバック系が逆応答をしないためには、どんな条件が成立すればよいかを考えよう。

【補題 3】

“任意のベクトルステップ入力に対し、Fig. 1 のフィードバック系が逆応答をしないための必要十分条件は、

$$H_{p-\delta} \triangleq \begin{bmatrix} H_{p-\delta_1^1} \\ H_{p-\delta_2^2} \\ \vdots \\ H_{p-\delta_m^m} \end{bmatrix}$$

が対角行列であり、かつその対角要素が正となることである。”

(証明)

定理 1 および系 1 によれば、ベクトルステップ入力

$$r(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ r_1 & (t \geq 0) \end{cases}$$

に対する出力の第 i 要素 $y_i(t)$ は、

$$y_i(t) = H_{p-\delta_i^i} r_1 \frac{t^{p-\delta_i}}{(p-\delta_i)!} + (t \text{ の } p-\delta_i+1 \text{ 次以上の項})$$

となる。したがって、第 i 要素が 0 でないどんな r_1 に対しても、 $y_i(t)$ が応答の初期において r_1 の第 i 要素と同じ方向に振れるためには、 $H_{p-\delta_i^i}$ はその第 i

要素が正であり、かつその他の要素が 0 でなければならない。また、その場合に限られる。 ■

補題 3 は、制御系が伝達関数行列により表現された場合の逆応答について述べたものであるが、美多・吉田⁶⁾は、状態空間方程式で表現される制御系の逆応答について、ほぼ同様の結果を得ている。ここでは、さらにこの必要十分条件を、系の開ループ伝達関数行列との関連において求めてみよう。

《定理 2》

“ $N_s \triangleq \begin{bmatrix} N_{\delta_1^1} \\ N_{\delta_2^2} \\ \vdots \\ N_{\delta_m^m} \end{bmatrix}$ が対角行列であり、かつその対角

要素が正であれば、任意のベクトルステップ入力に対して、Fig. 1 のフィードバック系は逆応答をしない。”

(証明)

定理の条件が満たされれば、 $I + N_p$ は対角要素が正なる対角行列となる。ところが、系 1 によれば

$$H_{p-\delta} = (I + N_p)^{-1} N_s$$

なる関係が成立するので、 $H_{p-\delta}$ もまた対角要素が正なる対角行列になる。したがって、補題 3 より、Fig. 1 のフィードバック系はどんなベクトルステップ入力に対しても逆応答をしない。 ■

定理 2 の条件が満たされるとき、ベクトルステップ入力

$$r(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ [r_{11}, r_{21}, \dots, r_{m1}]^T & (t \geq 0) \end{cases}$$

に対する出力の第 i 要素 $y_i(t)$ は、

$\delta_i = p$ のとき

$$y_i(t) = \frac{N_s^{ii} r_{i1}}{1 + N_s^{ii}} + (t \text{ の } 1 \text{ 次以上の項})$$

$\delta_i < p$ のとき

$$y_i(t) = N_s^{ii} r_{i1} \frac{t^{p-\delta_i}}{(p-\delta_i)!} + (t \text{ の } p-\delta_i+1 \text{ 次以上の項})$$

となることは明らかである。ただし、 N_s^{ii} は N_s の (i, i) 要素とする。

ところで、一般に定理 2 の条件は、つぎの例題で示すように、任意のベクトルステップ入力に対して、Fig. 1 のフィードバック系が逆応答をしないための必要十分条件にはならない。ただ、 $G(s)$ が真にプロパーな有理関数行列であるときには $N_p = 0$ となるので、 $H_{p-\delta}$ と N_s は一致し、定理の条件は必要十分条件となる。

【例題】

Fig. 1 の系において, $G(s) = \begin{bmatrix} -\frac{2s+1}{s} & \frac{1}{s} \\ 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix}$ とす

る.

このとき,

$$H(s) = [I + G(s)]^{-1} G(s)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{2s+1}{s+1} & \frac{-s}{(s+1)^2} \\ 0 & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix}$$

だから, $s=0$ で Laurent 級数展開すると,

$$H(s) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} s^{-1} + \dots$$

となるので,

$$H_{F-s} = \begin{bmatrix} H_{0^1} \\ H_{1^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

となる. したがって補題 3 より, このフィードバック系は, どんなベクトルステップ入力に対しても逆応答をしない. ところが, 一方

$$G(s) = \frac{1}{s} \begin{bmatrix} -2s-1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

だから,

$$N_s = \begin{bmatrix} N_{1^1} \\ N_{0^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

となるので, 定理 3 の条件は満たされない. ■

定理 2 の条件は, またつぎのように言い換えることもできる.

【系 2】

“すべての i について, $G(s)$ の第 i 行の対角要素の分母多項式と分子多項式の次数差が, その行の他の要素の次数差より真に小さく, かつその対角要素のゲイン (分母多項式の最高次の係数を 1 としたときの分子多項式の最高次の係数) が正となれば, 任意のベク

トルステップ入力に対して, Fig. 1 のフィードバック系は逆応答をしない.”

証明は定理 2 より明らかである.

フィードバック系が 1 入力 1 出力の場合には, 系 2 の条件は, 分母多項式の最高次の係数を 1 としたときの $G(s)$ の分子多項式の最高次の係数が正であることという非常に簡単な条件になる.

4. おわりに

多入力多出力直結フィードバック系に, 時間の多項式で表わされる入力に加えられたとき, 応答の初期においてどのような挙動をするのかを考察した. そして, その応用として, いかなるベクトルステップ入力に対してもフィードバック系が逆応答をしないためには, 開ループ伝達関数行列がどのような条件を満たせばよいかを求めた.

なお, 本論文で得られた結果はたいへん簡明であるので, フィードバック系の立上り特性などの改善に非常に有用である. このことに関しては, また別の機会に報告したい.

参 考 文 献

- 1) 森, 伊藤: 線形多変数フィードバック系の定常偏差, 計測自動制御学会論文集, 15-5, 603/608 (1979)
- 2) 乗松, 伊藤: 零非正則制御系について, 電気学会雑誌, 81-871, 566/575 (1961)
- 3) 伊藤正美: 自動制御概論, 199/203, 昭晃堂 (1968)
- 4) M. Vidyasagar: Conditions for a Feedback Transfer Function Matrix to be Proper, IEEE Trans. on Automatic Control, AC-20-4, 570/571 (1975)
- 5) W. A. Wolovich: Linear Multivariable Systems, p. 26, Springer-Verlag (1974)
- 6) 美多, 吉田: 多入力サーボ系のアンダーシュート現象とその制御法, 第 8 回制御理論シンポジウム資料, 119/122 (1979)
- 7) 森, 伊藤: 多変数フィードバック系の入出力応答の初期挙動について, 第 18 回 SICE 学術講演会予稿集, 23/24 (1979)