操作量にむだ時間を有する多変数線形 時変系の分離制御†

中 西 英 二*・南 原 興 二*

Decoupling of Multivariable Linear Time-Varying Systems with Time Delays in the Control Variables

Eiji NAKANISHI* and Koji NANBARA*

The necessary and sufficient condition for decoupling of multivariable linear time-varying systems with time delays in the control variables is presented for the limited case in which the control system has no state feedback scheme. Some algebraic properties associated with the time delay operator are rigorously investigated to ensure the mathematical procedure leading to the theorems for decoupling condition. A numerical example is shown to demonstrate the fact that the theorems formulated in this paper can cover more extensive decoupling problems than the theory given by Iwai et al. which presents a sufficient condition for decoupling of multivariable linear time-varying systems with state feedback.

1. 緒 言

状態フィードバック制御による分離制御の研究は、Falb-Wolovich¹⁾以来、数多くなされてきた。その中でむだ時間を含む時変システムを対象とした研究は、最初に Paraskevopoulos ら²⁾により報告され、分離の十分条件が示されたが、分離制御のために要求される状態フィードバック制御は状態変数の未来値を必要とする場合があり、Paraskevopoulos らの報告はこの点に関する配慮を欠いていることが Iwai ら³⁾による最近の論文で指摘されている。Iwai らは、この種のむだ時間時変システムの分離制御を実現するために、状態変数の未来値を予測する機構を付加した状態フィードバック制御による分離制御を提案し、その十分条件を示した。

これに対し、本論文は状態変数の予測問題を避けるために、状態フィードバック制御を含まない、ゲインマトリクスのみからなる制御則による分離制御問題を検討し、その必要十分条件を求めた。

分離制御の定義、必要十分条件、および制御系の設計法は3章に示したが、この過程で必要となるむだ時間演算子の算法およびむだ時間演算子行列の invertible 条件などについては2章で検討した。なお、本論文で定式化された分離制御は、前述の Iwai らが定式化した分離制御の特殊な場合 (Iwai らの分離制御において状態フィードバックに関する項を0とした場合) として含まれるが、4章において例題を通じ Iwai らの分離制御との比較・検討を行い、Iwai らが与えた十分条件では判定できないシステムに対しても、本論文で与えた必要十分条件により分離制御系の構成が可能となる場合のあることを指摘した。

2. むだ時間演算子の諸性質について

本論文は操作量にむだ時間を含む時変システムの分離制御問題を解くことを目的としているが、ここでは次章の分離制御の必要十分条件、および制御系設計法を与える過程で必要となるむだ時間演算子の算法、およびむだ時間演算子行列の invertible 条件について詳細な検討を加えた。

2.1 むだ時間演算子と演算子集合 $J, \bar{J}$

i), ii), iii) で3種類のむだ時間演算子を定義する。i) で定義される演算子 $\mathcal{I}$ は基本的なむだ時間演算子であり、ii), iii) で定義される演算子 α および A はそれを拡張して得られるむだ時間演算子である。

i) $f(t) \in R (t \in [0, \infty))$ に対して、むだ時間演算子 $\mathcal{I}^q$ を(1)式で定義する。ただし、 q は任意自然数、 $\tau \geq 0$ は基本むだ時間である。

† 化学工学協会第12回秋季大会で発表 (昭 53・10)

* 神戸大学工学部 神戸市灘区六甲台町

* Faculty of Engineering, Kobe University, Kobe
(Received July 9, 1979)

(Revised December 12, 1979)

$$\nabla^q f(t) = \begin{cases} f(t-q\tau) & (t \in [q\tau, \infty)) \\ 0 & (t \in [0, q\tau)) \end{cases} \quad (1)$$

ii) ∇ の多項式として表現されるむだ時間演算子 $\alpha(t, \nabla)$ を (2) 式で定義する。ただし, $\alpha_k(t) \in R$ ($k=0, 1, \dots, q$)

$$\alpha(t, \nabla) = \sum_{k=0}^q \alpha_k(t) \nabla^k \quad (2)$$

この $\alpha(t, \nabla)$ は (3) 式の意味をもつものとする。

$$\alpha(t, \nabla) f(t) = \sum_{k=0}^q \alpha_k(t) \nabla^k f(t) \quad (3)$$

ただし, $\alpha_k(t) \nabla^k f(t) = \alpha_k(t) [\nabla^k f(t)]$

なお, (2) 式のように ∇ の多項式で表現される演算子 $\alpha(t, \nabla)$ の集合を J と定めることにする。すなわち,

$$J = \left\{ \alpha(t, \nabla) : \alpha(t, \nabla) = \sum_{k=0}^q \alpha_k(t) \nabla^k, \alpha_k(t) \in R \right\}$$

iii) J の要素からなる行列として表現される演算子 $A(t, \nabla)$ を (4) 式で定義する。ただし, $\alpha_{ij}(t, \nabla) \in J$, ($i=1, 2, \dots, m; j=1, 2, \dots, n$)

$$A(t, \nabla) = \begin{bmatrix} \alpha_{11}(t, \nabla) & \dots & \alpha_{1n}(t, \nabla) \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1}(t, \nabla) & \dots & \alpha_{mn}(t, \nabla) \end{bmatrix} \quad (4)$$

この $A(t, \nabla)$ は (5) 式の意味をもつものとする。

$$A(t, \nabla) \begin{bmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n \alpha_{1k}(t, \nabla) f_k(t) \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^n \alpha_{mk}(t, \nabla) f_k(t) \end{bmatrix} \quad (5)$$

ただし, $f_k(t) \in R$ ($t \in [0, \infty)$) ($i=1, 2, \dots, m$)

なお, (4) 式のような行列として表現される演算子の集合を $\bar{J}$ と定める。すなわち,

$$\bar{J} = \{ A(t, \nabla) : A(t, \nabla) = [\alpha_{ij}(t, \nabla)], \alpha_{ij}(t, \nabla) \in J, i=1, 2, \dots, m, j=1, 2, \dots, n \}$$

2.2 $J, \bar{J}$ における演算

(1) 同値関係 ($J, \bar{J}$ における等号関係)

【定義 1】二つの演算子 $\alpha(t, \nabla), \beta(t, \nabla) \in J$ に対して, (6) 式が満たされるとき, $\alpha(t, \nabla), \beta(t, \nabla)$ は $\alpha(t, \nabla) \sim \beta(t, \nabla)$ の関係にあると定義する。

$$\alpha_k(t) = \beta_k(t) \quad (t \geq k\tau, k=0, 1, \dots, q) \quad (6)$$

ただし, $\alpha(t, \nabla) = \sum_{k=0}^q \alpha_k(t) \nabla^k, \beta(t, \nabla) = \sum_{k=0}^q \beta_k(t) \nabla^k$ ■

【系 1】 $\alpha(t, \nabla) \sim \beta(t, \nabla)$ となるとき, 任意 $f(t) \in R$ に対して (7) 式が成立し, また逆も成り立つ。

$$\alpha(t, \nabla) f(t) = \beta(t, \nabla) f(t) \quad (7) \quad \blacksquare$$

この関係 $\sim$ は同値関係と呼ばれるものであり, 系 1 が成立することから $\alpha(t, \nabla) \sim \beta(t, \nabla)$ を $\alpha(t, \nabla) = \beta(t, \nabla)$ とみなすことができる。以後, $\sim$ を $=$ で表記することにし J における等号 $=$ と定める。

(2) J における和と積

二つの演算子 $\alpha(t, \nabla), \beta(t, \nabla) \in J$ に対して, 和, 積をそれぞれ (8), (9) 式で定義する。

$$\{\alpha(t, \nabla) + \beta(t, \nabla)\} f(t) = \alpha(t, \nabla) f(t) + \beta(t, \nabla) f(t) \quad (8)$$

$$\{\alpha(t, \nabla) \beta(t, \nabla)\} f(t) = \alpha(t, \nabla) \{\beta(t, \nabla) f(t)\} \quad (9)$$

(8), (9) 式より, 系 1 を使って和, 積は (10), (11) 式のようになる。

$$\alpha(t, \nabla) + \beta(t, \nabla) = \sum_{k=0}^q \{\alpha_k(t) + \beta_k(t)\} \nabla^k \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \alpha(t, \nabla) \beta(t, \nabla) &= \alpha_0(t) \beta_0(t) + \{\alpha_0(t) \beta_1(t) + \alpha_1(t) \beta_0(t - \tau)\} \nabla + \dots \\ &\quad + \{\alpha_{q-1}(t) \beta_q(t - q\tau + \tau) \\ &\quad + \alpha_q(t) \beta_{q-1}(t - q\tau)\} \nabla^{2q-1} + \alpha_q(t) \beta_q(t - q\tau) \nabla^{2q} \end{aligned} \quad (11)$$

(3) $\bar{J}$ における和と積

二つの演算子 $A(t, \nabla), B(t, \nabla) \in \bar{J}$ (ともに $m \times n$ 行列とする) に対して, 和を (12) 式で定義する。ただし, $f(t) \in R^n$ ($t \in [0, \infty)$)。

$$\begin{aligned} \{A(t, \nabla) + B(t, \nabla)\} f(t) \\ = A(t, \nabla) f(t) + B(t, \nabla) f(t) \end{aligned} \quad (12)$$

(12) 式より, 系 1 を使って和 $\{A(t, \nabla) + B(t, \nabla)\}$ の第 ij 成分 $\{A(t, \nabla) + B(t, \nabla)\}_{ij}$ は (13) 式で表わされる。ただし, $\alpha_{ij}(t, \nabla), \beta_{ij}(t, \nabla)$ はそれぞれ $A(t, \nabla), B(t, \nabla)$ の第 ij 成分を示す。

$$\begin{aligned} \{A(t, \nabla) + B(t, \nabla)\}_{ij} \\ = \alpha_{ij}(t, \nabla) + \beta_{ij}(t, \nabla) \\ (i=1, 2, \dots, m \quad j=1, 2, \dots, n) \end{aligned} \quad (13)$$

二つの演算子 $A(t, \nabla), B(t, \nabla) \in \bar{J}$ ($A(t, \nabla)$ は $l \times m$ 行列, $B(t, \nabla)$ は $m \times n$ 行列とする) に対して, 積を (14) 式で定義する。

$$\{A(t, \nabla) B(t, \nabla)\} f(t) = A(t, \nabla) \{B(t, \nabla) f(t)\} \quad (14)$$

(14) 式より, 系 1 を使って積 $\{A(t, \nabla) B(t, \nabla)\}$ の第 ij 成分 $\{A(t, \nabla) B(t, \nabla)\}_{ij}$ は (15) 式で表わされる。

$$\begin{aligned} \{A(t, \nabla) B(t, \nabla)\}_{ij} \\ = \sum_{k=1}^m \alpha_{ik}(t, \nabla) \beta_{kj}(t, \nabla) \\ (i=1, 2, \dots, l \quad j=1, 2, \dots, n) \end{aligned} \quad (15)$$

以上で, $J, \bar{J}$ の和, 積が定められたが, これらの関係は 3 章で分離制御問題を解く際の式変形に用いられる。つぎに, 分離制御問題を解く際に必要となるもう一つ概念, むだ時間演算子の逆演算子について考察する。

2.3 むだ時間演算子の逆演算子

はじめに, ここで使用される関数集合 $F[k, \infty)$ を

つぎのように定める。ただし, $k \geq 0$.

$$F[k, \infty) = \{f(t) : f(t) = 0 \quad t \in [0, k\tau], \\ f(t) \in R \quad t \in [k\tau, \infty)\}$$

このような関数集合に対して, 関数ベクトル集合 $F[k_1, \infty) \times F[k_2, \infty) \times \cdots \times F[k_i, \infty) \times \cdots \times F[k_m, \infty)$ を考える。ただし, この関数ベクトル集合の要素 $f(t) = [f_1(t) \ f_2(t) \ \cdots \ f_i(t) \ \cdots \ f_m(t)]^T$ はつぎの性質をもつものとする。

$$f_i(t) \in F[k_i, \infty) \quad (i=1, 2, \dots, m)$$

以上で定められた関数集合, 関数ベクトル集合に対して, むだ時間演算子の写像としての性質が明らかとなる。

(1) $\mathcal{V}^q$ の逆写像と逆演算子

《定理 1》

(1) 式で定義したむだ時間演算子 $\mathcal{V}^q$ は $F[r, \infty) \rightarrow F[q+r, \infty)$ の全単射写像であり, 逆写像 $(\mathcal{V}^q)^{-1}$ が存在する。すなわち, 任意の $g(t) \in F[q+r, \infty)$ に対して (16) 式より一意に $f(t) \in F[r, \infty)$ が定まり, $f(t)$ は (17) 式で求められる。

$$f(t) = (\mathcal{V}^q)^{-1}g(t) \quad (16)$$

$$f(t) = g(t + q\tau + r\tau) \quad (t \in [r\tau, \infty)) \quad (17) \blacksquare$$

むだ時間演算子 $\mathcal{V}^q$ は r の違いによる異なった写像 $\mathcal{V}^q$ を区別しない表現である。 $\mathcal{V}^q$ の全単射性は r によらないことから, r の違いによる異なった写像の逆写像 $(\mathcal{V}^q)^{-1}$ をむだ時間演算子 $\mathcal{V}^q$ の逆演算子 $(\mathcal{V}^q)^{-1}$ (または $\mathcal{V}^{-q}$) として同一の記号で表現する。

このような演算子 $\mathcal{V}^q, \mathcal{V}^{-q}$ の定義より, (18) 式で表わされる対角演算子行列 $A(\mathcal{V})$ に対して (19) 式で表わされる逆演算子 $A(\mathcal{V})^{-1}$ が存在することは明らかである。ただし, q_i ($i=1, 2, \dots, n$) は任意整数である。

$$A(\mathcal{V}) = \text{diag} [\mathcal{V}^{q_1} \ \mathcal{V}^{q_2} \ \cdots \ \mathcal{V}^{q_i} \ \cdots \ \mathcal{V}^{q_n}] \quad (18)$$

$$A(\mathcal{V})^{-1} = \text{diag} [\mathcal{V}^{-q_1} \ \mathcal{V}^{-q_2} \ \cdots \ \mathcal{V}^{-q_i} \ \cdots \ \mathcal{V}^{-q_n}] \quad (19)$$

(2) m 次正方行列 $A(t, \mathcal{V})$ の逆写像と逆演算子

m 次正方行列 $A(t, \mathcal{V}) \in \bar{J}$ の逆演算子については, 以下の補題で示した分解を使い定めることができる。

【補題】 任意の m 次正方行列 $A(t, \mathcal{V}) \in \bar{J}$ は 0 行ベクトル, 0 列ベクトルを含まないならば, 適当な対角演算子行列 $M(\mathcal{V}) = \text{diag} [\mathcal{V}^{\mu_1} \ \mathcal{V}^{\mu_2} \ \cdots \ \mathcal{V}^{\mu_m}]$, $N(\mathcal{V}) = \text{diag} [\mathcal{V}^{\nu_1} \ \mathcal{V}^{\nu_2} \ \cdots \ \mathcal{V}^{\nu_m}]$ が存在して, (20) 式に変形できる。

$$A(t, \mathcal{V}) = M(\mathcal{V})\hat{A}(t)N(\mathcal{V}) + M(\mathcal{V})\hat{A}(t, \mathcal{V})N(\mathcal{V})\mathcal{V} \quad (20)$$

ここで, $\hat{A}(t)$ は適当な順列 $P \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & i & \cdots & m \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_i & \cdots & p_m \end{pmatrix}$ に対して, その第 i 成分 $\hat{a}_{ip_i}$ ($i=1, 2, \dots, m$) が 0 で

ない m 次実数行列であり, $\hat{A}(t, \mathcal{V}) \in \bar{J}$.

(証明は付録 1 参照)

《定理 2》 補題により定められる μ_i, ν_i が定数ならば, (21), (22) 式で定まる定数 $\mu_i', \nu_i', q_\mu, q_\nu$ に対し て行列 $A(t, \mathcal{V})$ は $F[\nu_1', \infty) \times \cdots \times F[\nu_m', \infty) \rightarrow F[\mu_1 + q_\nu, \infty) \times \cdots \times F[\mu_m + q_\nu, \infty)$ の写像と考えることができる。ただし, $\nu_i' \geq 0, \mu_i + q_\nu \geq 0$.

$$\mu_i + \mu_i' = q_\mu \quad (i=1, 2, \dots, m) \quad (21)$$

$$\nu_i + \nu_i' = q_\nu \quad (i=1, 2, \dots, m) \quad (22)$$

この写像 $A(t, \mathcal{V})$ が全単射である必要十分条件は, つぎの (23) 式が成立することである。

$$\det \hat{A}(t + q_\nu \tau) \neq 0 \quad (t \geq 0) \quad (23)$$

このとき, 逆写像 $A(t, \mathcal{V})^{-1}$ が存在して, 任意の $g(t) \in F[\mu_1 + q_\nu, \infty) \times \cdots \times F[\mu_m + q_\nu, \infty)$ に対し (24) 式で $f(t) \in F[\nu_1', \infty) \times \cdots \times F[\nu_m', \infty)$ が一意に定まり, $f(t)$ は (25) 式で求められる。

$$f(t) = A(t, \mathcal{V})^{-1}g(t) \quad (24)$$

$$f(t) = N'(\mathcal{V})\hat{A}(t + q_\nu \tau)^{-1}(\mathcal{V}^{q_\mu + q_\nu})^{-1}M'(\mathcal{V})g(t) \\ - N'(\mathcal{V})\hat{A}(t + q_\nu \tau)^{-1}\hat{A}(t + q_\nu \tau, \mathcal{V})\mathcal{V}N'(\mathcal{V})^{-1}f(t) \quad (25)$$

ただし, $M'(\mathcal{V}) = \text{diag} [\mathcal{V}^{\mu_1'} \ \cdots \ \mathcal{V}^{\mu_m'}]$,

$$N'(\mathcal{V}) = \text{diag} [\mathcal{V}^{\nu_1'} \ \cdots \ \mathcal{V}^{\nu_m'}] \quad \blacksquare$$

ところで, (21), (22) 式より明らかなように, $\mu_i', \nu_i', q_\mu, q_\nu$ は一意には定まらない。演算子 $A(t, \mathcal{V})$ の表現はこれら定数の値の違いによる異なった写像 $A(t, \mathcal{V})$ を区別しない表現である。とくに, その逆写像を考えると, (23) 式の成立, 不成立が q_ν の値による場合がある。定理 2 において (23) 式を満たす q_ν が存在するとき, 演算子 $A(t, \mathcal{V})$ は invertible であると称した。ところで, ある q_ν が定理 2 の条件を満たすならば, $q_\nu' > q_\nu$ なる q_ν' も定理 2 の条件を満たすことは明らかである。本論文では, このような q_ν などの値の違いによる異なった写像 $A(t, \mathcal{V})$ の逆写像を演算子 $A(t, \mathcal{V})$ の逆演算子と同一の記号 $A(t, \mathcal{V})^{-1}$ で表現する。

3. 分離制御

2 章で考案されたむだ時間演算子の諸性質 (和, 積, 逆演算) を使い, 操作量にむだ時間を含む時変システムの分離制御問題を考察する。

3.1 基礎式

操作量にむだ時間を含む時変システムとして, (26), (27) 式で表わされるシステムを考える。

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t, \mathcal{V})u(t) \quad (26)$$

$$y(t) = C(t)x(t) \quad (27)$$

ここで, $x(t)$ は $(n \times 1)$ 状態変数ベクトル, $u(t)$ は

$(r \times 1)$ 操作変数ベクトル, $y(t)$ は $(r \times 1)$ 出力変数ベクトルである. また $A(t)$ はその要素が時間 t の関数となっている $(n \times n)$ 行列, $C(t)$ は同じく $(r \times n)$ 行列, $B(t, \nabla)$ は (28) 式で示される $(n \times r)$ むだ時間演算子行列である.

$$B(t, \nabla) = \begin{bmatrix} b_{11}(t) \nabla p_{11} & \cdots & b_{1r}(t) \nabla p_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1}(t) \nabla p_{n1} & \cdots & b_{nr}(t) \nabla p_{nr} \end{bmatrix} \quad (28)$$

このとき, (26), (27) 式で表わされるシステムに対して, (29) 式で表わされる制御則による分離制御問題を考える.

$$u(t) = G(t, \nabla) \omega(t) \quad (29)$$

すなわち, (29) 式中の invertible なむだ時間演算子 $G(t, \nabla)$ (逆演算子をも含む) を適当に選ぶことにより, r 次入力変数ベクトル $\omega(t)$ と出力変数ベクトル $y(t)$ の各成分 $y_i(t), \omega_i(t)$ ($i=1, 2, \dots, r$) が, 1 入力-1 出力系の関係にある分離システムを構成するための必要十分条件について考察する.

3.2 分離システムの定義

$C(t)$ の第 i 行を $C_i(t)$ とすると, (27) 式より $y_i(t)$ は次式で表わされる.

$$y_i(t) = C_i(t)x(t) \quad (i=1, 2, \dots, r)$$

上式を時間 t について微分すると,

$$\begin{aligned} y_i^{(1)}(t) &= \frac{d}{dt} \{ C_i(t)x(t) \} \\ &= \frac{d}{dt} C_i(t)x(t) + C_i(t) \frac{d}{dt} x(t) \end{aligned}$$

上式に (26) 式を代入して,

$$\begin{aligned} y_i^{(1)}(t) &= \frac{d}{dt} C_i(t)x(t) + C_i(t)A(t)x(t) \\ &\quad + C_i(t)B(t, \nabla)u(t) \end{aligned}$$

さらに, (29) 式を代入して,

$$\begin{aligned} y_i^{(1)}(t) &= \frac{d}{dt} C_i(t)x(t) + C_i(t)A(t)x(t) \\ &\quad + C_i(t)B(t, \nabla)G(t, \nabla)\omega(t) \end{aligned}$$

Tzafestas ら⁴⁾ が用いた微分に関する演算子 H を使って, 上式を次式のように簡潔に保つことができる. この演算子 H は任意の微分可能な行ベクトル $f(t) \in R^n$ に対して $f(t)H = \frac{d}{dt} f(t)$ である.

$$\begin{aligned} y_i^{(1)}(t) &= C_i(t)\{A(t)+H\}x(t) \\ &\quad + C_i(t)B(t, \nabla)G(t, \nabla)\omega(t) \end{aligned}$$

ただし, $C_i(t)\{A(t)+H\} = C_i(t)A(t) + C_i(t)H$.

同様の操作を繰り返すならば, 一般に $y_i(t)$ の k 次導関数 $y_i^{(k)}(t)$ は (30) 式で表わされる.

$$y_i^{(k)}(t) = C_i(t)\{A(t)+H\}^k x(t)$$

$$\begin{aligned} &+ \sum_{l=0}^{k-1} \frac{d^l}{dt^l} [C_i(t)\{A(t) \\ &+ H\}^{k-1-l} B(t, \nabla)G(t, \nabla)\omega(t)] \quad (30) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ただし, } C_i(t)\{A(t)+H\}^l &= C_i(t)\{A(t)+H\}^{l-1}A(t) \\ &\quad + \frac{d}{dt} [C_i(t)\{A(t)+H\}^{l-1}] \end{aligned}$$

$$C_i(t)\{A(t)+H\}^0 = C_i(t)$$

ところで, (30) 式中の $C_i(t)\{A(t)+H\}^l$ ($l=0, 1, \dots, n$) に対し適当な関数 $\rho_{ij}(t) \in R$ が存在して, (31) 式が成立する. (証明略)

$$C_i(t)\{A(t)+H\}^n = \sum_{j=0}^{n-1} \rho_{ij}(t)[C_i(t)\{A(t)+H\}^j] \quad (31)$$

(31) 式の関係を用いて, (30) 式から $x(t)$ を消去して (32) 式が得られる. ($i=1, 2, \dots, r$)

$$\begin{aligned} y_i^{(n)}(t) - \sum_{j=0}^{n-1} \rho_{ij}(t)y_i^{(j)}(t) \\ = \Phi_i(t, \omega, \omega^{(1)}, \dots, \omega^{(n-1)}) \quad (32) \end{aligned}$$

ただし,

$$\begin{aligned} \Phi_i(t, \omega, \omega^{(1)}, \dots, \omega^{(n-1)}) &= C_i\{A+H\}^{n-1}BG\omega \\ &\quad - \rho_{in-1}[C_i\{A+H\}^{n-2}BG\omega] - \dots \\ &\quad - \rho_{i1}C_iBG\omega + \frac{d}{dt}[C_i\{A+H\}^{n-2}BG\omega] - \dots \\ &\quad - \rho_{i2}\frac{d}{dt}[C_iBG\omega] \\ &\quad \vdots \\ &\quad + \frac{d^{n-2}}{dt^{n-2}}[C_i\{A+H\}BG\omega] \\ &\quad - \rho_{in-1}\frac{d^{n-2}}{dt^{n-2}}[C_iBG\omega] \\ &\quad + \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}[C_iBG\omega] \end{aligned}$$

(32) 式は入力 ω と出力 y_i との間に媒介変数としての x を含まず, また新しい関数 ρ_{ij} は (31) 式の決定過程より明らかのように ω, y, x に無関係である. この (32) 式を用いて, 入力 ω , 出力 y の第 i 成分 ω_i, y_i が 1 入力-1 出力関係となる分離システムの定義を行った.

【定義 2】 (26), (27), (29) 式で表わされるシステムが分離システムであるとは, つぎの条件 i), ii) が (32) 式の Φ_i ($i=1, 2, \dots, r$) に対して満たされることである.

i) ある整定数 q_i に対して, 一つは (33) 式を満たす $l \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ が存在し, しかも $q < q_i$ については (34) 式が満たされる.

$$\frac{\partial}{\partial \omega_i(t)} \Phi_i \neq 0 \quad (t \geq 0 \text{ and } t \geq q_i \tau) \quad (33)$$

$$\frac{\partial}{\partial \omega_i(t)} \Phi_i = 0 \quad (k=0, 1, \dots, n-1) \quad (34)$$

ii) 任意 $j \in \{j \neq i : 1, 2, \dots, r\}$ に対して、つねに次式が成立する。ただし、 q は任意整数である。

$$\frac{\partial}{\partial \omega_j(t)} \Phi_i = 0 \quad (k=0, 1, \dots, n-1) \quad (35)$$

さらに、分離システムの条件 i), ii) を満たす $G(t, \mathcal{V})$ が見い出せるとき、(26), (27) 式のシステムは (29) 式で分離制御可能であると呼ぶことにする。 ■

3.3 分離制御の必要十分条件と $G(t, \mathcal{V})$ の設計

分離システムの定義の条件 i), ii) より、つぎの系 2 が得られる。

[系 2] (26), (27), (29) 式で表わされるシステムが分離システムである必要十分条件は、(36) 式で示される $\Psi_{ik}(t, \omega)$ に対してつぎの条件 i), ii) が成立することである。

$$\Psi_{ik}(t, \omega) = C_i(t) \{A(t) + H\}^k B(t, \mathcal{V}) G(t, \mathcal{V}) \omega(t) \quad (36)$$

i) ある整数 q_i に対して、少なくとも一つは (37) 式を満たす $m \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ が存在し、しかも $q < q_i$ については (38) 式が満たされる。

$$\frac{\partial}{\partial \omega_i(t)} \Psi_{im}(t, \omega) \neq 0 \quad (t \geq 0 \text{ and } t \geq q_i \tau) \quad (37)$$

$$\frac{\partial}{\partial \omega_j(t)} \Psi_{ik}(t, \omega) = 0 \quad (k=0, 1, \dots, n-1) \quad (38)$$

ii) 任意の $j \in \{j \neq i : 1, 2, \dots, r\}$ に対して、次式が成立する。ただし、 q は任意整数である。

$$\frac{\partial}{\partial \omega_j(t)} \Psi_{ik}(t, \omega) = 0 \quad (k=0, 1, \dots, n-1) \quad (39)$$

(証明略)

系 2 より、分離制御の必要十分条件と $G(t, \mathcal{V})$ の設計式がつぎの定理 3 として結論される。

《定理 3》

1) (26), (27) 式で表わされるシステムが (29) 式で分離制御可能である必要十分条件は、適当な整数 d_i に対して (40) 式で与えられる $B^*(t, \mathcal{V})$ が invertible であることであり、(41) 式を満たす $K_{ij}(t, \mathcal{V})$ が存在することである。ただし、 $d_i(t) \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ 。

$$B^*(t, \mathcal{V}) = \begin{bmatrix} C_1(t) \{A(t) + H\}^{d_1(t)} B(t, \mathcal{V}) \\ C_2(t) \{A(t) + H\}^{d_2(t)} B(t, \mathcal{V}) \\ \vdots \\ C_r(t) \{A(t) + H\}^{d_r(t)} B(t, \mathcal{V}) \end{bmatrix} \quad (40)$$

$$\begin{aligned} C_i(t) \{A(t) + H\}^{d_i(t)} B(t, \mathcal{V}) \\ = K_{ij}(t, \mathcal{V}) C_i(t) \{A(t) + H\}^{d_i(t)} B(t, \mathcal{V}) \\ (i=1, 2, \dots, r \quad j=0, 1, \dots, n-1) \end{aligned} \quad (41)$$

ただし、 $K_{ij}(t, \mathcal{V})$ は (42) 式に示す条件を満たす $\bar{K}_{ij}(t, \mathcal{V})$, $\tilde{K}_{ij}(t, \mathcal{V}) \in J$ に対して (43) 式で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \bar{K}_{ij}(t, \mathcal{V}) &= \sum_{k=\bar{l}_{ij}}^q \bar{K}_{ij}^k(t) \mathcal{V}^k, \\ \tilde{K}_{ij}(t, \mathcal{V}) &= \sum_{k=\bar{l}_{ij}}^q \tilde{K}_{ij}^k(t) \mathcal{V}^k \\ \tilde{K}_{ij}^k(t) &\neq 0 \quad (k=\bar{l}_{ij}) \\ \bar{l}_{ij} &\geq \bar{l}_{ij} \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

$$K_{ij}(t, \mathcal{V}) = \bar{K}_{ij}(t, \mathcal{V}) \tilde{K}_{ij}(t, \mathcal{V})^{-1} \quad (43)$$

2) 1) の条件が満たされるとき、(44) 式で示される $G(t, \mathcal{V})$ はシステムを分離制御する。

$$G(t, \mathcal{V}) = B^*(t, \mathcal{V})^{-1} A(t, \mathcal{V}) \quad (44)$$

ただし、 $A(t, \mathcal{V})$ は J の要素からなる invertible な任意の対角むだ時間演算子行列である。($\lambda_i(t, \mathcal{V}) \in J$)

$$A(t, \mathcal{V}) = \text{diag} [\lambda_1(t, \mathcal{V}) \lambda_2(t, \mathcal{V}) \dots \lambda_r(t, \mathcal{V})] \quad (45)$$

(証明は付録 2)

一般に、 $B^*(t, \mathcal{V})^{-1}$ はすすみ要素を有する。(44) 式で示した $A(t, \mathcal{V})$ に適当な大きさのむだ時間をとれば、 $B^*(t, \mathcal{V})^{-1}$ のすすみ要素を打ち消すことが可能であり、操作変数の予測問題を避けることができる。

4. 考 察

前章では、(26), (27) 式で表わされるむだ時間時変システムに対する状態フィードバックを有しない分離制御の必要十分条件を与えた。ここで考えている分離制御は当然のことながら、状態フィードバックを有する分離制御の特殊なケースにすぎないが、いまのところこのような一般的なむだ時間を有する時変システムに対する分離制御の必要十分条件は得られていない。最近になって、Iwai らによって分離制御の十分条件が示されたが、この十分条件が前章で示された状態フィードバックを含まない特殊な分離制御の必要十分条件と、その適用性において、いかに異なるかという問題は興味のあるところである。ここでは、この問題を例題を通して考察するが、その前に Iwai らのむだ時間時変システムに対する状態フィードバックを含む分離制御の十分条件の概要を以下に示す。

4.1 Iwai らの十分条件の概要

むだ時間時変システムとして (46), (47) 式で表わされるシステムを考える。

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = & A(t)x(t) + \sum_{j=1}^{l_1} b_{1j}(t)u_1(t-\tau_{1j}) + \dots \\ & + \sum_{j=1}^{l_r} b_{rj}(t)u_r(t-\tau_{rj}) \end{aligned} \quad (46)$$

$$y(t) = C(t)x(t) \quad (47)$$

ただし, x は $(n \times 1)$ 状態変数ベクトル, y は $(r \times 1)$ 出力変数ベクトル, $u_1, \dots, u_r$ はスカラー操作変数, τ_{ij} はむだ時間であり, 初期条件は以下のである.

$$x(t) = x(t_0)$$

$$u_i(t) = u_{i0}(t) \quad \text{for } t_0 - \bar{\tau}_i \leq t < t_0$$

$$\bar{\tau}_i = \max(\tau_{ij}), \quad j \in \{1, 2, \dots, l_i\}$$

(46), (47)式において, むだ時間 τ_{ij} はつぎの関係を満たしているものとする.

$$\left. \begin{aligned} 0 &\leq \tau_{11} \leq \tau_{22} \leq \dots \leq \tau_{rr} \\ \tau_{rr} &< \tau_{ij} \neq i \quad (i=1, 2, \dots, r \quad j=1, 2, \dots, l_i) \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

ここで, d_i は次式で定義される整数である.

$$d_i \triangleq \min_{p \in \{1, 2, \dots, r\}} \{d_{ip}\} \quad (49)$$

$$\begin{aligned} d_{ip} \triangleq & \min \{j : Q_i^j(t)[b_{p1}(t) \dots b_{pl_p}(t)] \neq 0 \\ & \text{for some } \tau \in T \text{ and } j=0, 1, \dots, n-1\} \end{aligned} \quad (50)$$

ただし, $Q_i^j(t)$ は

$$\left. \begin{aligned} Q_i^0(t) &= C_i(t) \\ Q_i^j(t) &= \frac{d}{dt} Q_i^{j-1}(t) + Q_i^{j-1}A(t) \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

これら d_i, Q_i^j を使い, Iwai らの分離制御の十分条件はつぎのように与えられている.

[Iwai らの分離制御の十分条件] (52)式で示される $B_1^*(t)$ について, $\det B_1^*(t) \neq 0, \forall t \in T$ ならば, (46), (47)式で表わされるシステムは状態フィードバック制御により分離制御される.

$$B_1^*(t) = \begin{bmatrix} Q_1^{d_1}(t)b_{11}(t) & \dots & Q_1^{d_1}(t)b_{rr}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ Q_r^{d_r}(t)b_{11}(t) & \dots & Q_r^{d_r}(t)b_{rr}(t) \end{bmatrix} \quad (52)$$

4.2 例題による比較

時変系の例題に対して, Iwai らの分離条件と本論文の分離条件の比較, 検討を試みた.

(53), (54)式で表わされる時変系の分離制御問題を考える.

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -(2+0.2 \sin 0.2\pi t)x_1(t) \\ &\quad + u_1(t-\tau) + u_2(t-2\tau) \\ \dot{x}_2(t) &= -x_2(t) \\ &\quad + u_1(t-3\tau) \\ &\quad + (2+0.2 \sin 0.2\pi t)u_2(t-4\tau) \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

$$\left. \begin{aligned} y_1(t) &= x_1(t) \\ y_2(t) &= x_2(t) \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

i) Iwai らの分離条件による判定

(48)式の仮定を満たすためには, (53), (54)式はつぎの(55), (56)式に書き改められなければならない.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = & A(t)x(t) + b_{11}(t)u_1(t-\tau_{11}) + b_{12}(t)u_1(t-\tau_{12}) \\ & + b_{12}(t)u_2(t-\tau_{21}) + b_{22}(t)u_2(t-\tau_{22}) \end{aligned} \quad (55)$$

$$y(t) = C(t)x(t) \quad (56)$$

ただし,

$$A(t) = \begin{bmatrix} -(2+0.2 \sin 0.2\pi t) & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$C(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$b_{11}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad b_{12}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \left((2+0.2 \sin 0.2\pi t) \right)$$

$$b_{21}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ (2+0.2 \sin 0.2\pi t) \end{bmatrix} (1), \quad b_{22}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\tau_{11} = \tau, \quad \tau_{12} = 3\tau(4\tau), \quad \tau_{21} = 4\tau(3\tau), \quad \tau_{22} = 2\tau$$

であり, () 内は考えうるもう一つの場合を示す.

(55), (56)式で書き改められたシステムに対して, (49)式の d_i を求める.

$$Q_1^0(t) = [1 \ 0], \quad Q_2^0(t) = [0 \ 1]$$

$$Q_1^0(t)[b_{11}(t) \ b_{12}(t)] = [1 \ 0] \neq 0$$

$$Q_2^0(t)[b_{11}(t) \ b_{12}(t)] = [0 \ 1 \ ((2+0.2 \sin 0.2\pi t))] \neq 0$$

であるから $d_1 = d_2 = 0$. つぎに $B_1^*(t)$ を求めると,

$$Q_1^0(t)[b_{11}(t) \ b_{22}(t)] = [1 \ 1]$$

$$Q_2^0(t)[b_{11}(t) \ b_{22}(t)] = [0 \ 0]$$

$$\therefore B_1^*(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

明らかに, $\det B_1^*(t) = 0$ だから Iwai らの分離条件ではこの例題のシステムの分離が可能かどうかの判定は行えない.

ii) 本論文の分離条件による判定

(53), (54)式を(26), (27)式に書き改めると,

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t, \mathcal{V})u(t) \quad (57)$$

$$y(t) = C(t)x(t) \quad (58)$$

ようになる. ただし,

$$A(t) = \begin{bmatrix} -(2+0.2 \sin 0.2\pi t) & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$C(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B(t, \mathcal{V}) = \begin{bmatrix} \mathcal{V} & \mathcal{V}^2 \\ \mathcal{V}^3 & (2+0.2 \sin 0.2\pi t)\mathcal{V}^4 \end{bmatrix}.$$

定理3において, $d_1 = d_2 = 0$ にとると $B^*(t, \mathcal{V})$ は

$$B^*(t, \mathcal{V}) = C(t)B(t, \mathcal{V}) = B(t, \mathcal{V})$$

補題を使って変形すれば,

$$B^*(t, \mathcal{F}) = \begin{bmatrix} \mathcal{F} & 0 \\ 0 & \mathcal{F}^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \ 2 + 0.2 \sin 0.2\pi(t+3\tau) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathcal{F} \end{bmatrix}.$$

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 + 0.2 \sin 0.2\pi(t+3\tau) \end{bmatrix} \neq 0$$

であるから, 定理2より $B^*(t, \mathcal{F})$ は invertible であることがいえる. また,

$$C_1(t)\{A(t)+H\}^j B(t, \mathcal{F})$$

$$= \{- (2 + 0.2 \sin 0.2\pi t)\}^j C_1(t) B(t, \mathcal{F})$$

$$C_2(t)\{A(t)+H\}^j B(t, \mathcal{F}) = (-1)^j C_2(t) B(t, \mathcal{F})$$

であり, (41)式の条件も成立するから, このシステムは分離制御可能である.

定理2において, $q_u=3$, $q_v=1$ と選ぶと,

$$B^*(t, \mathcal{F})^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} \mathcal{F} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \ 2 + 0.2 \sin 0.2\pi(t+4\tau) \end{bmatrix}^{-1} (\mathcal{F}^4)^{-1} \begin{bmatrix} \mathcal{F}^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$A(t, \mathcal{F}) = \text{diag} [\mathcal{F}^2 \ \mathcal{F}^4] \text{ と選べば } G(t, \mathcal{F}) \text{ は (44)式より,}$$

$$G(t, \mathcal{F}) = \begin{bmatrix} \mathcal{F} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \ 2 + 0.2 \sin 0.2\pi(t+4\tau) \end{bmatrix}^{-1}.$$

この $G(t, \mathcal{F})$ を用いて, (26), (27), (29)式より

$$\dot{y}_1(t) + (2 + 0.2 \sin 0.2\pi t) y_1(t) = \mathcal{F}^2 \omega_1(t)$$

$$\dot{y}_2(t) + y_2(t) = \mathcal{F}^4 \omega_2(t)$$

上式から, この例題のシステムは実際に分離制御されることが確認できる.

4.3 比較の結果

例題の結果より, 定理3の分離条件を満たすシステムが Iwai らの分離条件をつねに満たすとは限らないことがいえる.

本論文および Iwai らの分離条件をともに満たすシステムを考えると, (40)式の $B^*(t, \mathcal{F})$ の補題の変形は

$$B^*(t, \mathcal{F}) = \hat{A}(t)N(\mathcal{F}) + \hat{A}(t, \mathcal{F})N(\mathcal{F})\mathcal{F}$$

の形で十分であり, $M(\mathcal{F})$ を必要とはしない. ただし, 上式は (48), (50)式の $\tau_{ii}, B_1^*(t)$ との間に

$$\nu_i \tau = \tau_{ii} \quad (N(\mathcal{F}) = \text{diag} [\mathcal{F}^{\nu_1} \dots \mathcal{F}^{\nu_r}])$$

$$\hat{A}(t) = B_1^*(t)$$

の関係をもつ. すなわち, Iwai らの分離条件 $\det B_1^*(t) \neq 0$ では, 定理2で定めた $B^*(t, \mathcal{F})$ の invertible 性の一部しか表現できないことになり, さきの例題で分離制御の判定ができない原因となっている.

5. 結 言

(26), (27), (29)式で表わされる状態フィードバックを含まない分離制御のための必要十分条件を示した. この必要十分条件 (定理3) は2章で述べたむだ時間

演算子集合 J が可換環ではないことから, 従来の定数系, 時変系, 不変むだ時間系において求められた条件よりかなり複雑になっている.

同種の研究として, 状態フィードバック制御による時変むだ時間系の分離制御の研究が Iwai らにより報告されている. Iwai らが導いた分離制御の十分条件は簡易な形をとっている反面, むだ時間演算子行列の invertible 性のとらえ方に粗さがあるため, 4章の例題より明らかになったように本来分離制御が可能であるシステムに対して, その判定ができない場合もあることがわかった. 2章で考察したむだ時間演算子に関する算法を, 状態フィードバック制御による時変むだ時間系の分離制御問題に導入するならば, Iwai らの与えた条件よりさらに改良された条件が得られるものと考えられる.

終りに, 2章むだ時間演算子の諸性質の検討に際して神戸大学教養部数学教室 宇摩谷教明助教授に種々有益な助言を賜ったことを記して謝意を表する.

参 考 文 献

- 1) P.L. Falb and W.A. Wolovich: Decoupling in the Design and Synthesis of Multivariable Control Systems, IEEE Trans. on Automatic Control, **AC-12-6**, 651/659 (1967)
- 2) P.N. Paraskevopoulos and S.G. Tzafestas: On Feedback Decoupling of Linear Time-Varying Time-Delay Control Systems, Int. J. Systems Sci., **4-2**, 167/178 (1973)
- 3) Z. Iwai, et al.: Decoupling of Linear Time Varying Systems with Time Delays in the Control Variables or State Variables, Int. J. Control, **28-6**, 869/888 (1978)
- 4) S.G. Tzafestas and P.N. Paraskevopoulos: A Sensitivity Approach to the Decoupling of Linear Systems with Parameter Disturbances, Preprints, JACC (Columbus, OHIO), 92/100 (1973)
- 5) N.S. Williams and V. Zakin: A Ring of Delay Operators with Applications to Delay-Differential Systems, SIAM J. Control and Optimization, **15-2**, 247/255 (1977)

《付 録》

〈付録1〉 補題の証明

$A(t, \mathcal{F})$ の第 ij 成分 $\alpha_{ij}(t, \mathcal{F})$ は一般的には

$$\alpha_{ij}(t, \mathcal{F}) = \sum_{k=0}^{q_{ij}} \alpha_{ij}^k(t) \mathcal{F}^k \quad (\text{a})$$

のように表わされるが, つぎに定める K_{ij} を使って (a)式は(b)式に変形できる.

$$\begin{cases} K_{ij} = \min \{k : \alpha_{ij}^k(t) \neq 0, k=0, 1, \dots, q_{ij}\} \\ K_{ij} = K_{\infty} \simeq \infty \text{ if } \alpha_{ij}(t, \mathcal{F}) = 0 \end{cases}$$

$$\alpha_{ij}(t, \mathcal{V}) = \begin{cases} \alpha_{ij} K_{ij}(t) \mathcal{V}^{K_{ij}} + \sum_{k=K_{ij}+1}^{q_{ij}} \alpha_{ij}^k(t) \mathcal{V}^k \\ \alpha_{ij} K_{ij}(t) \mathcal{V}^{K_{ij}} = 0 \mathcal{V}^{K_{\infty}} \text{ if } \alpha_{ij}(t, \mathcal{V}) = 0 \end{cases} \quad (b)$$

ここで、ベキ数 K_{ij} に着目しつぎの整数行列 K を考える。

$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & \cdots & K_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ K_{m1} & \cdots & K_{mm} \end{bmatrix}$$

この K に対して、順列 P に沿った和 $\sum_P K$ をつぎのように定める。

$$\sum_P K = \sum_{k=1}^m K_{kp_k}$$

$$\text{ただし } P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & m \\ p_1 & p_2 & p_3 & \cdots & p_m \end{pmatrix}$$

この $\sum_P K$ に最小値を与える順列 P が補題で述べた順列であって、 K の第 i 行から適当な整数 μ_i を、第 i 列から ν_i を引いて、順列 P に沿った成分 K_{ip_i} を 0 にまたその他の成分 $K_{ij \neq p_i}$ を非負とすることができる。この μ_i, ν_i によって $M(\mathcal{V}), N(\mathcal{V})$ を

$$M(\mathcal{V}) = \text{diag} [\mathcal{V}^{\mu_1} \cdots \mathcal{V}^{\mu_m}]$$

$$N(\mathcal{V}) = \text{diag} [\mathcal{V}^{\nu_1} \cdots \mathcal{V}^{\nu_m}]$$

のように定めるとき、補題で定めた $A(t, \mathcal{V})$ の変形が可能になる。すなわち、 $A(t, \mathcal{V})$ は $M(\mathcal{V}), N(\mathcal{V})$ を使って

$$A(t, \mathcal{V}) = M(\mathcal{V}) \hat{A}(t) N(\mathcal{V}) + M(\mathcal{V}) \hat{A}(t, \mathcal{V}) N(\mathcal{V}) \mathcal{V}$$

のように分解される。ただし、 $\hat{A}(t)$ の第 ij 成分 $\hat{\alpha}_{ij}(t)$ は

$$\hat{\alpha}_{ij}(t) = \alpha_{ij} K_{ij}(t - \mu_i \tau) \quad \text{if } j = p_i \text{ or } K_{ij} = \mu_i + \nu_j$$

$$\hat{\alpha}_{ij}(t) = 0 \quad \text{if } K_{ij} > \mu_i + \nu_j$$

であり、この変形は補題の条件を満たす。

〈付録 2〉 定理 3 の証明

本題に入る前に、むだ時間演算子の性質に関して補足を加える。定理 2 においてむだ時間演算子行列 $A(t, \mathcal{V})$ の逆演算子 $A(t, \mathcal{V})^{-1}$ が (25) 式で表わされることはすでに述べた。この (25) 式より明らかなように逆演算子 $A(t, \mathcal{V})^{-1}$ はその第 ij 成分 $\alpha'_{ij}(t, \mathcal{V})$ が

$$\alpha'_{ij}(t, \mathcal{V}) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \alpha'_{ij} k(t) \mathcal{V}^k \right) \mathcal{V}^{q_{ij}}$$

のように $\mathcal{V}$ の無限級数と $\mathcal{V}^{q_{ij}}$ (q_{ij} は整数) の積として表わされるむだ時間演算子行列であるといえる。このような $\mathcal{V}$ の無限級数として表わされるむだ時間演算子に対しても、2 章で定めた算法、invertible の定義

を同様に適用できることは明らかである。

系 2 の条件が満たされるとき、定理 3 の条件も満たされることを示す。(37), (38), (39) 式より任意の $j \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ に対して適当な λ_{ij}^k が存在して、(a) 式が成立することは明らかである。

$$C_i \{A+H\}^j B G \omega = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_{ij}^k(t) \mathcal{V}^k \right) \mathcal{V}^{q_{ij} \omega} \quad (a)$$

(a) 式より $B^* G$ は

$$B^* G = M \hat{B}^* \hat{G} + M \hat{B} \hat{B}^* \hat{G} \mathcal{V}$$

のように変形される。ただし、

$$M = \text{diag} [\mathcal{V}^{q_1} \cdots \mathcal{V}^{q_r}]$$

$$\hat{B}^* \hat{G} = \text{diag} [\lambda^0_{1d_1}(t+q_1\tau) \cdots \lambda^0_{rd_r}(t+q_r\tau)]$$

$$\hat{B} \hat{B}^* \hat{G} = \text{diag} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{k+1}_{1d_1} \mathcal{V}^k \cdots \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{k+1}_{rd_r} \mathcal{V}^k \right].$$

(37) 式より $\lambda^0_{id_i}(t+q_i\tau) \neq 0$ 。したがって、 $\det \hat{B}^* \hat{G} \neq 0$ となり定理 2 より $B^* G$ は invertible であることがいえる。すなわち、 B^* は invertible である。一方、むだ時間演算子の性質より、次式を満たす K_{ij}^k が存在することがいえる。

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k_{ij}(t) \mathcal{V}^k = \sum_{k=0}^{\infty} K^k_{ij}(t) \mathcal{V}^k \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k_{id_i}(t) \mathcal{V}^k \quad (b)$$

(a), (b) 式より

$$C_i \{A+H\}^j B G \omega = \sum_{k=0}^{\infty} K_{ij}^k(t) \mathcal{V}^k C_i \{A+H\}^{d_i} B G \omega.$$

G は invertible であるから、

$$C_i \{A+H\}^j B = \sum_{k=0}^{\infty} K_{ij}^k(t) \mathcal{V}^k C_i \{A+H\}^{d_i} B \quad (c)$$

このとき、 $\sum_{k=0}^{\infty} K_{ij}^k(t) \mathcal{V}^k$ は適当な $\bar{K}_{ij}, \bar{K}_{ij} \in J$ に対し

$$\sum_{k=0}^{\infty} K_{ij}^k(t) \mathcal{V}^k = \bar{K}_{ij}(t, \mathcal{V}) \bar{K}_{ij}(t, \mathcal{V})^{-1}$$

で表わされ、しかも $\bar{K}_{ij}(t, \mathcal{V})^{-1}$ の項は $C_i \{A+H\}^{d_i} B$ で約されなければならない。もしこのようなことができないならば、(c) 式右辺は無限級数のままであって明らかに定義 1 と矛盾する。すなわち、

$$C_i \{A+H\}^j B = \bar{K}_{ij} \bar{K}_{ij}^{-1} C_i \{A+H\}^{d_i} B.$$

逆に定理 3 の条件が成立するとき、(44) 式で設計される G を使い系 2 の条件が成立することがいえる。これは明らかであるから省略する。