一般化インパルス応答を用いた多入力多出力非線形系の近似同定†

若松 秀俊*・関 口 隆**

Approximate Identification of Nonlinear Multi-Input-Output
Systems Using General Impulse Response

Hidetoshi WAKAMATSU* and Takashi SEKIGUCHI**

1. はじめに

離散化したボルテラ汎関数を用いて定式化した非線形系の同定に関連して、代数方程式を用いた方法がいくつか提案されている^{1)~2)}。しかし、これらの方法にはテスト入力信号の選択に一定の制限がある。ここではその制限を設けずに、一定サンプル間隔ごとに積分を施した入力値の組合せから係数行列を得て、出力値を定数項に選び、一般化インパルス応答を未知数とする連立1次方程式を構築し、その近似解を求めることにより、入出力関係のみに注目したシステム同定を簡便に行う方法を述べる³⁾。

2. 1入力1出力非線形系の表示と同定

測定対象の入力を $x(t)$ 、出力を $z(t)$ 、観測時刻を pT ($p=1, 2, \dots, m; T>0$) とし、各サンプル間隔について入力 $x(t)$ を積分して(1)式を得る。

$$X_p = \int_{(p-1)T}^{pT} x(\tau) d\tau \quad (1)$$

(1)式を用いると、時刻 pT における出力を Z_p としたとき、系の入出力関係は(2)式に示す一般化畳み込み加算の形で表現できる。

$$Z_p = \sum_{r=1}^n \left(\sum_{i_1=1}^p \sum_{i_2=1}^p \dots \sum_{i_r=1}^p h_r^{i_1 i_2 \dots i_r} X_{p+1-i_1} X_{p+1-i_2} \dots X_{p+1-i_r} \right) \quad (2)$$

ここで $h_r^{i_1 i_2 \dots i_r}$ は測定対象をボルテラ汎関数で表示したときの r 次のボルテラ核の各離散値を示し、その対称性に関する性質はそのまま保たれる(注1)。

(2)式において $p=1, 2, \dots, m$ としたときに得られる個々の入出力関係式をまとめると(3)式を得る。

$$\mathbf{Z} = \mathbf{P} \mathbf{H} \quad (3.1)$$

$$\mathbf{Z}^T = [Z_1, Z_2, \dots, Z_p, \dots, Z_m] \quad (3.2)$$

$$\mathbf{H}^T = [h_1 : h_2 : \dots : h_r : \dots : h_n] \quad (3.3)$$

$$\mathbf{P} = [\mathbf{P}_1 : \mathbf{P}_2 : \dots : \mathbf{P}_r : \dots : \mathbf{P}_n] \quad (3.4)$$

ただし $\mathbf{P}_r^T = \mathbf{v}_{r,1}^T : \mathbf{v}_{r,2}^T : \dots : \mathbf{v}_{r,p}^T : \dots : \mathbf{v}_{r,m}^T$
ここに $s_{m,r} = m(m+1)(m+2) \dots (m+r-1)/r!$, $s_m = \sum_{r=1}^n s_{m,r}$ とすると $\mathbf{h}_r$ は、

$$\mathbf{h}_r = [h_{r,11} \dots 11, h_{r,11} \dots 12, \dots, h_{r,i_1 i_2} \dots i_{r-1} i_r, \dots, h_{r,mm} \dots mm] \\ (1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_r \leq m)$$

なる $s_{m,r}$ 次元行ベクトル、 $\mathbf{v}_{r,p}$ は $\{X_{p+1-i_1} X_{p+1-i_2} \dots X_{p+1-i_r}\}$ を要素とし、要素の順番が $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_r \leq p \leq m$ を満足するように定めた $s_{m,r}$ 次元行ベクトルである(注2)。

プラントの同定にあたっては、一般に係数行列 $\mathbf{P}$ は階数 m (注3)の非正行列なので(3)式より擬似逆行列を用いて、最短解として s_m 個の離散化インパルス応答が(4)式に示すように決定できる。

$$\mathbf{H}^* = \mathbf{P}^T (\mathbf{P} \mathbf{P}^T)^{-1} \mathbf{Z} \quad (4) \text{ (注4)}$$

このとき、他の入力積分値についても同様に $\mathbf{P}$ を求めてこれを行に加えて行数を、また対応する出力値ベクトル $\mathbf{Z}$ の次元を増すことによって、より良い同定が行える(注5)。

3. 多入力多出力非線形系の表示と同定

測定対象の k 個の入力を $x^{(1)}(t), x^{(2)}(t), \dots, x^{(k)}(t)$ 、出力を $z^{(s)}(t)$ ($k=1, 2, \dots, v; s=1, 2, \dots, w$) とする。 k 番目の入力 $x^{(k)}(t)$ についてサンプル時刻ごとに積分を施し、時刻 pT において(5)式に示す $X_p^{(k)}$ を得る。同時刻における出力値を $Z_p^{(s)}$ とすれば、対象とする系は一般

(注1) 入力関数をサンプル時刻ごとに離散化した場合にも形式的には(2)式とまったく同様に表わされるので同様の議論ができる。

(注2) X_c において $c \leq 0$ のときは $X_c = 0$ 。

(注3) 最も遠い過去への入力 X_1 が零でなければ、 $\mathbf{P}_1$ は対角要素がすべて X_1 であるような三角行列になるので階数は m である。

(注4) サンプル個数が m のとき、 $\mathbf{H}^*$ は s_m 次元列ベクトル、 $\mathbf{Z}$ は m 次元列ベクトル、 $\mathbf{P}$ は $m \times s_m$ 行列で $\mathbf{P} \mathbf{P}^T$ は $m \times m$ 行列なので逆行列の次元はサンプル個数 m によって定まる。

(注5) この際、もとの係数行列の階数 m を増大させるような入力関数を選ぶ必要がある。

† 昭和53年電気学会全国大会で発表(昭53・4)。

* 東京医科歯科大学医用器材研究所 東京都千代田区神田駿河台 2-3-10

** 横浜国立大学工学部 横浜市保土ヶ谷区常盤台 156

(Received January 11, 1980)

化インパルス応答の対称性を考慮して、(6)式で表現できる。

$$\begin{aligned} \hat{X}_p &= \int_{(p-1)T}^{pT} x(\tau) d\tau \quad (5) \\ \hat{Z}_p &= \sum_{r=1}^n \left(\sum_{i_1=1}^p \sum_{i_2=1}^p \cdots \sum_{i_{l_1}=1}^p \sum_{i_{l_2}=1}^p \cdots \sum_{i_{l_k}=1}^p \right. \\ &\quad \left. \cdots \sum_{i_2 l_2=1}^p \cdots \sum_{i_k l_k=1}^p \cdots \sum_{i_k l_k=1}^p \right. \\ &\quad \left. {}^{(s)} h_{x_1^{l_1} x_2^{l_2} \cdots x_1^{l_1} x_2^{l_2} \cdots x_k^{l_k} \cdots x_k^{l_k}} \right. \\ &\quad \left. {}^{(1)} X_{p+1-i_1} {}^{(1)} X_{p+1-i_2} \cdots {}^{(1)} X_{p+1-i_{l_1}} {}^{(2)} X_{p+1-i_2} \right. \\ &\quad \left. \cdots {}^{(2)} X_{p+1-i_{l_2}} \cdots {}^{(k)} X_{p+1-i_{l_k}} \cdots {}^{(k)} X_{p+1-i_{l_k}} \right) \quad (\text{注6}) \end{aligned} \quad (6)$$

ただし、 $l_1+l_2+\cdots+l_q=r$, $0 \leq l_q \leq r$, $q=1, 2, \dots, k$
(6)式において $p=1, 2, \dots, m$ としたときに得られる個々の入出力関係式をまとめると、(7)式のように表現できる。

$$\hat{Z} = P \hat{H} \quad (7.1)$$

$$\hat{Z}^T = [\hat{Z}_1, \hat{Z}_2, \dots, \hat{Z}_p, \dots, \hat{Z}_m] \quad (7.2)$$

$$\hat{H}^T = [\hat{h}_1, \hat{h}_2, \dots, \hat{h}_r, \dots, \hat{h}_n] \quad (7.3)$$

$$P = [P_1, P_2, \dots, P_r, \dots, P_n] \quad (7.4)$$

ただし $P_r^T = [v_{r,1}^T, v_{r,2}^T, \dots, v_{r,p}^T, \dots, v_{r,m}^T]$

また $\{a|b\}$ を条件 b を満足するベクトルの要素 a とすれば、行ベクトル ${}^{(s)} h_r$, $v_{r,p}$ はつぎのように表わせる。

$$\begin{aligned} {}^{(s)} h_r &= \left({}^{(s)} h_{x_1^{l_1} x_2^{l_2} \cdots x_1^{l_1} x_2^{l_2} \cdots x_k^{l_k} \cdots x_k^{l_k}} \right. \\ &\quad \left. \sum_{q=1}^k l_q = r, 0 \leq l_q \leq r \right) \quad (\text{注7}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_{r,p} &= \left({}^{(1)} X_{p+1-i_1} {}^{(1)} X_{p+1-i_2} \right. \\ &\quad \cdots {}^{(1)} X_{p+1-i_{l_1}} {}^{(2)} X_{p+1-i_2} \cdots {}^{(2)} X_{p+1-i_{l_2}} \\ &\quad \cdots {}^{(k)} X_{p+1-i_{l_k}} {}^{(k)} X_{p+1-i_{l_k}} \\ &\quad \left. \sum_{q=1}^v l_q = r, 0 \leq l_q \leq r \right) \quad (\text{注8}) \end{aligned}$$

(7)式より一般化インパルス応答 ${}^{(s)} H$ を決定すれば v 入力 1 出力系を同定したことになる。一般に係数行列 P は階数が m の非正方形行列なので、擬逆行列を用いて (9)式に示す最短解を求め、 ${}^{(s)} H$ を近似的に同定できる。 ${}^{(s)} H^* = P^T (P P^T)^{-1} \hat{Z}$ (9)

このとき 1 入力 1 出力系と同様に、階数を増大させるような別の一組の入力を積分して得た行列 P および出力値ベクトル $\hat{Z}$ を加えあわせて、より良い同定が可能である。これらの操作を $s=1, 2, \dots, w$ について行えば、 v 入力 w 出力非線形系の近似同定が可能である。

4. 数式モデルを用いた同定例

4.1 1 入力 1 出力非線形系の同定

Fig. 1(a)に示した測定対象を(10)式なる入力関数を用いて同定する。

(注6) (6)式の () 内は単一入力自身の自己作用 ($k=1$) による、また複数の入力の相互作用 ($2 \leq k \leq v$) による出力 $\hat{Z}_p$ の r 次非線形応答成分のすべての和を表わしている。() で示す項を r について 1 から n まで和をとれば、入力 $X_p, X_p, \dots, X_p$ と出力 $\hat{Z}_p$ との間の入出力関係(6)式を得る。なお r 次の一般化インパルス応答に注目するとき、 k 個の入力のうち、時刻 p における入力端子 q からの入力は ${}^{(q)} X_p$ であり、離散化一般化インパルス応答 ${}^{(s)} h_{x_1^{l_1} x_2^{l_2} \cdots x_1^{l_1} x_2^{l_2} \cdots x_k^{l_k} \cdots x_k^{l_k}}$ の下

添字 $x_q^{l_1} x_q^{l_2} \cdots x_q^{l_q}$ は入力端子 q からの入力 ${}^{(q)} X_p$ に関する自己作用部分の非線形成分を示し、 l_q はその次数を示しており、 $x_q^{l_1} x_q^{l_2} \cdots x_q^{l_q}$ の間では積分核の値に対称性が保たれる。 $k=1$ のときには $l_q=r$ となる。この場合には入力間の相互作用が存在せずに、一般化インパルス応答は ${}^{(s)} h_{x_q^{l_1} x_q^{l_2} \cdots x_q^{l_q}}$ の形になる。また $\sum_{q=1}^k l_q = r$ ($1 \leq l_q \leq r$, $k \geq 1$) のときは複数入力の相互作用があることを示し、仮に $k=2$ とすれば r 次の非線形応答成分に関して二つの入力の相互作用が存在し、その入力端子を q, q' とすると、一般化インパルス応答は ${}^{(s)} h_{x_q^{l_1} x_q^{l_2} \cdots x_q^{l_q} x_{q'}^{l_{q'}} \cdots x_{q'}^{l_{q'}}$ のような形式になり、 $l_q + l_{q'} = r$ となる。

このとき入力 ${}^{(q)} X_p$ に関しては l_q 次の、 ${}^{(q')} X_p$ に関しては $l_{q'}$ 次の対称性が保たれる。なお上添字 $i_q^{l_1} i_q^{l_2} \cdots i_q^{l_q}$ は一般化インパルス応答を離散化したときの、入力 X_p の $1, 2, \dots, l_q$ 個の座標を示し、これらの値の取りうる範囲は、サンプル時刻 p において $1 \leq i_q^{l_1} \leq i_q^{l_2} \leq \cdots \leq i_q^{l_q} \leq p$ である。

(注7) 要素の順序は $l_1 \leq l_2 \leq \cdots \leq l_q \leq r$, $1 \leq i_q^{l_1} \leq i_q^{l_2} \leq \cdots \leq i_q^{l_q} \leq m$ を満足するように定められる。

(注8) 要素の順序は $l_1 \leq l_2 \leq \cdots \leq l_q \leq r$, $1 \leq i_q^{l_1} \leq i_q^{l_2} \leq \cdots \leq i_q^{l_q} \leq m$ を満足するように定められる。また X_c において、 $c \leq 0$ のときは $X_c = 0$ である。

(注9) (注4)の場合と同様に $P P^T$ は $m \times m$ 行列である。

Fig. 1 A nonlinear single-input-output plant (a) to be measured and its output (b) for the input $x(t)=80 \sin(140\pi t+0.8)$

..... indicates the theoretical output
— indicates the calculated output using the identified Volterra kernels

Sampling interval: 1 msec

Number of points in discrete Volterra kernels: 152

$$X_p = \int_{(p-1)T}^{pT} a_x \sin(\omega_x \tau + \phi_x) d\tau \quad (10)$$

$a_x=78.0$, $\omega_x=134\pi$ rad/sec, $\phi_x=0.9$ rad および $a_x=82.0$, $\omega_x=144\pi$ rad/sec, $\phi_x=0.7$ rad を用いて同定を行い, $a_x=80.0$, $\omega_x=140\pi$ rad/sec, $\phi_x=0.8$ rad について入出力関係を再現したときの出力を理論的に求めた出力とともに Fig. 1(b) に示した. このときの相対誤差率は $\varepsilon=1.01\%$ である(注10).

4.2 2入力1出力非線形系の同定

Fig. 2(b) に示した測定対象を(10), (11)式なる入力関数を用いて同定する.

$$Y_p = \int_{(p-1)T}^{pT} a_y \sin(\omega_y \tau + \phi_y) d\tau \quad (11)$$

$a_x=100.9$, $\omega_x=308\pi$ rad/sec, $\phi_x=0.8$ rad, $a_y=234.0$, $\omega_y=222\pi$ rad/sec, $\phi_y=0.7$ rad および $a_x=77.0$, $\omega_x=260\pi$ rad/sec, $\phi_x=0.5$ rad, $a_y=180.0$, $\omega_y=260\pi$ rad/sec, $\phi_y=0.9$ rad を用いて同定を行い, $a_x=87.0$, $\omega_x=286\pi$ rad/sec, $\phi_x=0.5$ rad, $a_y=187.0$, $\omega_y=240\pi$ rad/sec, $\phi_y=0.9$ rad について入出力関係を再現した場合の出力を理論的に算出した出力とともに Fig. 2(a) に示した. なおこのときの相対誤差率は $\varepsilon=0.40\%$ である(注10).

5. おわりに

本論文の方法は, 測定の対象とする系の入出力関係のみに注目して, 係数行列 P の階数を増大させるような任意の入力波形を用いて P の行数を増やして行

$$\begin{aligned} (\text{注10}) \quad \varepsilon = & \frac{\sum_{p=1}^m \left\{ Z_p - \sum_{r=1}^n \left(\sum_{i_1=1}^p \sum_{i_2=1}^p \cdots \sum_{i_r=1}^p h_r i_1 i_2 \cdots i_r \right. \right. \\ & \left. \left. \cdot X_{p+1-i_1} X_{p+1-i_2} \cdots X_{p+1-i_r} \right) \right\}^2}{\sum_{p=1}^m \{Z_p\}^2} \end{aligned}$$

多入力多出力系についても同様の相対誤差率を考える.

Fig. 2 A nonlinear two-input single-output plant (b) to be measured and its output (a) for the input $x(t)=87 \sin(286\pi t+0.5)$ and $y(t)=187 \sin(240\pi t+0.9)$

..... indicates the theoretical output
— indicates the calculated output using the identified Volterra kernels

Sampling interval: 1 msec

Number of points in discrete Volterra kernels: 324

える実用性のある簡便な同定法である. そのアルゴリズムは簡単で, 多入力多出力非線形系の場合についても有効である. この際に, 振幅, 周波数の上下限を定めて同定し, この入力範囲を越えたために対象とする系の入出力関係が大きく偏れたときには, 別の範囲内にある入力関数を用いて同定をやり直すことによって実際の操業入力についての入出力関係を近似的に表現できる. また操業時の入力を用いれば操業中でも同定が可能である他に, 整定のはやい系については, 短時間内の動特性を把握すれば良いので扱う係数行列の大きさも小さくなり, 同定精度も良く有効である. なお, 本同定法は非線形プラントを取り扱いやすい有限ボルテラ汎関数級数を数式モデルとして想定し, 出力の誤差をできるだけ小さくするように, サンプル個数で定まるパラメータのすべてを決定する方法であり, その解を最短解として求めている. したがって, この方法は操業時の入出力関係に近い条件で動特性を記述するために有効で, ノイズがある場合には, 繰り返し, 同一テスト入力関数で同定を行い, 各同定結果の平均値として一般化インパルス応答の値を求める必要がある. また, 一般化インパルス応答の値を一意に定める同定法²⁾と組み合わせることによって, 操業中のプラントの特性変動分を表わす項を入出力関係の変動分のみ還元して, 表わすことができる.

参考文献

- 1) 藤井克彦, 中尾和夫: 計測自動制御学会論文集, 5-4, 368/377 (1969)
- 2) 若松秀俊, 関口隆: 計測自動制御学会論文集, 16-2, 154/161 (1980)
- 3) 若松秀俊, 関口隆: 電気学会全国大会論文集, 1380/1381 (1978)