定係数線形系における未知初期状態のもとでの 入力・状態の部分的再構成†

貝 塚 洋*・杉 本 末 雄*

Partial Reconstruction of Inputs and States in Linear Time-Invariant Systems with Unknown Initial States

Hiroshi KAIZUKA* and Sueso SUGIMOTO*

In this paper, we propose a new algorithmic method to determine the maximal parts of the input and the state at each time instant which are reconstructable exactly from the output alone for both continuous and discrete linear time-invariant systems with unknown initial states. Simultaneously this method contains the practical computational method of reconstructing the parts of the input and the state from the outputs.

For these purposes, we provide two new computationally efficient algorithms. The first algorithm is the extension result of one developed by Moylan (1977) which constructs the stable inverse system. This algorithm partitions the parts of inputs and states which become to be known at each iteration step, and at the same time subtracts these parts from the original system so that the original system may be reduced to the so-called "contracted system" of it.

In continuous systems it is shown that no part of the inputs or the states in the contracted system can be determined by the knowledge of the outputs and that the reconstructable parts of the input and the state at each time instant are constant.

On the contrary it is shown in discrete systems that the reconstructable parts of the input and the state vary and monotonously increase as time increases. Then the second algorithm is developed for the purpose of reconstructing these parts, and it is applied to the contracted system.

1. はじめに

つぎの定係数線形連続系 $S_c = (A, B, C, D)_c$ および離散系 $S_d = (A, B, C, D)_d$ を考察する。

$$\Delta_c x(t) \triangleq \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + v(t)$$

S_c :

$$\begin{aligned} y(t) &= Cx(t) + Du(t) \\ t &\in T_c \triangleq [0, \infty) \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\Delta_d x(t) \triangleq x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) + v(t)$$

S_d :

$$\begin{aligned} y(t) &= Cx(t) + Du(t) \\ t &\in T_d \triangleq \{\text{非負の整数}\} \end{aligned} \quad (1.2)$$

ここに, $x \in R^n$, $u \in R^m$, $v \in R^n$, $y \in R^p$ はそれぞれ状態, 未知入力, 既知入力, 出力ベクトルであり, A, B, C, D は適当な大きさの実定数行列とする。 S_c, S_d における入力対 (u, v) はそれぞれ関数空間 $\mathcal{Q}_c(R^m) \times \mathcal{Q}_c(R^n)$, $\mathcal{Q}_d(R^m) \times \mathcal{Q}_d(R^n)$ の要素であるとする。ここに各自然数 r に対して $\mathcal{Q}_c(R^r)$, $\mathcal{Q}_d(R^r)$ は, $\mathcal{Q}_c(R^r) \triangleq \{f \mid f = f(t) \text{ は } T_c \text{ で連続な } r \text{ 次元実ベクトル値関数}\}$, $\mathcal{Q}_d(R^r) \triangleq \{(f(0), f(1), \dots) \mid f(t) \in R^r, t \in T_d\}$ なる関数空間とする。

以下において, 記述が連続系, 離散系に共通に成立する場合は, 表現の簡単化のために添字 c, d を添字 σ で代表させることにする。

本論文では, S_σ において情報 $I_\sigma \triangleq \{A, B, C, D, y \in \mathcal{Q}_\sigma(R^p), v \in \mathcal{Q}_\sigma(R^n)\}$ が既知であるとき, 各時刻における入力, 状態が最大どの部分まで決定されるか, および, それらを具体的に再構成する手法について考察する。

情報 I_σ により初期状態が最大どこまで決定されるかについては, 未知入力のもとでの不可観測部分空間 (以下 $\mathcal{H}$ と記すが) の考察として広く研究されている²⁾⁻⁹⁾。はじめ Basile ら⁴⁾が $(A, B, C, 0)_c$ に対して

† 第 21 回自動制御連合講演会で一部発表 (昭 53・11)

* 大阪大学工学部 吹田市山田上

* Faculty of Engineering, Osaka University, Suita (Received May 1, 1979)

(Revised November 9, 1979)

考察し、状態空間にある部分空間を導入することにより $\mathcal{K}$ を構成するための漸化式を求めている。 S_0 については、Silverman らが係数行列に対して、逐次、代数的操作を加えるアルゴリズム（これはもともと逆システムを構成するために提案されたものである¹⁰⁾）を用いて $\mathcal{K}$ を構成し、 $\mathcal{K}$ が S_0 , S_d に共通であることを示している^{9), 13)}。Aoki ら²⁾および須田⁶⁾はそれぞれ $(A, B, C, 0)_d$, S_d に対して、Basile らと同様の $\mathcal{K}$ を求めるための漸化式を導いている。また、 S_d における $\mathcal{K}$ の別の表現が Molinari^{7), 8)}によって与えられている。情報 I_0 から再構成できる $x(0)$ の最大の部分は $\mathcal{K}$ の直交補空間上への $x(0)$ の直交射影であるが、これを具体的に求める手法は文献 3, 9 および 5 などの議論からただちに得ることができ、また文献 2 でも考察されている。以上のように初期状態の部分的再構成については完全な解答が与えられている。しかし、初期時刻以後の状態についての同様な問題は明確には論じられていない。実際、後に示す例のように離散系においては一般に $x(0)$ と $x(\tau)(\tau \geq 1)$ の部分的再構成問題は同一とはならない。

各時刻での情報 I_0 による入力の部分的再構成については、 $(A, B, C, 0)_d$ における $u(0)$ に対する考察があるにすぎず²⁾、またそこでは具体的な再構成の方法を与えていない。さらに注目すべきことは、システムの内部構造に関する従来の研究が状態空間 R^n での議論に集中し、入力と出力との直接的関係を明らかにする入力空間 R^m における考察が少ないように思われる点である。この意味では、入力が状態を通して出力に影響を与えるシステムの入出力構造の半分だけがこれまで主に研究されてきたとも考えられる。

ここで本稿で用いる記号を説明する。 $m \times n$ 実行列 G および部分空間 $S \subset R^n$ に対して、 $G_S \triangleq \{Gx | x \in S\}$ と定義し、特に GR^n を $\text{Im}(G)$ と表記する。 S の直交補空間を $S^\perp$, S 上への直交射影作用素を $\text{proj}(S)$, S の次元を $\dim S$ で表わす。また、 G^T は G の転置行列を表わし、 $I(r)$ は r 次単位行列を示す。最後に、 S_0 において初期状態 $x(0) = \xi$, 入力対 $(u, v) = (\tilde{u}, \tilde{v}) \in \Omega_0(R^m) \times \Omega_0(R^n)$ のとき、状態および出力が時刻 $t \in T_0$ でとるベクトル値をそれぞれ $x_0(t; \xi, \tilde{u}, \tilde{v})$, $y_0(t; \xi, \tilde{u}, \tilde{v})$ と表記する。

ここで、本研究において重要な役割を果たす部分空間を導入する。

【定義 1】 ある $\xi \in R^n$ と $\tilde{u} \in \Omega_0(R^m)$ が存在して、 $y_0(t; \xi, \tilde{u}, 0) = 0$, $\forall t \in T_0$, が成立するとき、各時刻 $\tau \in T_0$ における $x_0(\tau; \xi, \tilde{u}, 0)$ および $\tilde{u}(\tau)$ の全体をそれぞれ $\mathcal{X}_0(\tau)$, $\mathcal{U}_0(\tau)$ と定義する。□

(注意 1) ここで定義された集合はすべて部分空間となる。 $\mathcal{X}_0(0) = \mathcal{K}$ であり、 $D=0$ のとき $\mathcal{U}_d(0) = L(u_0 | y_0, \dots, y_n)^{2)}$ が成立する。 S_0 が未知初期状態のもとで可逆^{5), 12)}であるための必要十分条件は $\mathcal{U}_0(0) = \{0\}$ である。□

【例】 離散系 $S_d = \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, [1, 0], 0 \right)_d$ に対して $\mathcal{X}_d(\tau)$, $\mathcal{U}_d(\tau)$ を求める。 $y(0)=0=[1 \ 0]$ $x(0)$ より $x(0)=[0 \ *]^T$ であり、このことと状態方程式より $x(1)=[* \ 0]^T$ となる。したがって、 $y(1)=0$ より最終的に $x(1)=0$ と決定でき、 $\mathcal{X}_d(1) = \{0\}$ を得る。同様に $\mathcal{X}_d(\tau) = \{0\} (\tau \geq 1)$ を得る。このことと状態方程式より $\mathcal{U}_d(\tau) = \{0\} (\tau \geq 1)$ は明らかである。また、任意の $a \in R$ に対して $y_d(t; [0 \ a]^T, \{-a, 0, 0, \dots\}, 0) = 0$, $\forall t \in T_d$, が成立するから、 $\mathcal{X}_d(0) = \text{Im}([0 \ 1]^T)$, $\mathcal{U}_d(0) = R$ を得る。□

部分空間 $\mathcal{X}_0(\tau)$, $\mathcal{U}_0(\tau)$ を用いれば、われわれの問題はつぎのように記述できる。

【問題₀】 $\mathcal{X}_0(\tau)$, $\mathcal{U}_0(\tau)$, $\tau \in T_0$ を求め、出力 $y \in \Omega_0(R^p)$ および入力 $v \in \Omega_0(R^n)$ から $\text{proj}(\mathcal{X}_0^{\perp}(\tau))x(\tau)$, $\text{proj}(\mathcal{U}_0^{\perp}(\tau))u(\tau)$ を構成せよ。□

本論文の概略を述べる。まず、2章において本研究で中心的な役割を果たすアルゴリズム I_0 を提案する。これは、Moylan¹²⁾が安定な逆システムを構成するために用いたアルゴリズムを拡張したものである。Moylan のアルゴリズムでは、各反復段階で得られる状態に関する情報を用いてシステムの状態の次元のみを低下させるが、アルゴリズム I_0 では、さらに各反復段階で既知となる入力についての情報を用いて入力の次元をも同時に減少させる。したがって、アルゴリズム I_0 が終了した時点では、状態、入力、出力ベクトルの次元は元のシステムの次元より減少したものととなり、これを元のシステムの縮小化システムと呼ぶことにする。3章ではその性質について考察し、4章、5章でそれぞれ問題₀, 問題_dを解決する。

2章以後では、アルゴリズム I_0 の本質的な部分についての議論展開を行い、アルゴリズム I_0 の適用において生ずる特殊な場合(注 1)に関する考察は論旨の明瞭化および紙面の関係上省略する。しかし、この場合に対しても本論文の結果は本質的に変化しない。

2. アルゴリズム I_0 とその性質

アルゴリズム I_0

(注 1) たとえば、アルゴリズム I_0 において、ある $l=k$ で $C_k=0$, $D_k=0$ (STEP. 1)あるいは $n_{k+1}=0$ (STEP. 4)となる場合などである。

STEP. 0 $A_0=A, B_0=B, C_0=C, D_0=D, x^{(0)}=x, v^{(0)}=v, u^{(0)}=u, y^{(0)}=y, n_0=n, m_0=m, p_0=p$ とおき, $l=0$ として STEP. 1 に進む.

STEP. 1 $p_{l+1} \triangleq \text{rank } C_l, p_{l+1} + \beta_l \triangleq \text{rank } [C_l : D_l]$ とするとき

$$L_1^{(l)} C_l = \begin{bmatrix} \bar{C}^{(l)} \\ 0 \end{bmatrix} \uparrow p_{l+1}, L_1^{(l)} D_l = \begin{bmatrix} \bar{D}^{(l)} \\ 0 \end{bmatrix} \uparrow p_{l+1} + \beta_l \quad (2.1)$$

なる p_l 次正則行列 $L_1^{(l)}$ を構成する. $[\{\bar{y}_1^{(l)}\}^T : \{\bar{y}_2^{(l)}\}^T : 0]^T \triangleq L_1^{(l)} y^{(l)}$ ($\dim \bar{y}_1^{(l)} = p_{l+1}, \dim \bar{y}_2^{(l)} = \beta_l$) とおき, STEP. 2 に進む.

STEP. 2

$$\bar{D}^{(l)} R_1^{(l)} = \begin{bmatrix} \bar{D}_1^{(l)} : \bar{D}_2^{(l)} \\ 0 : \bar{D}^{(l)} \end{bmatrix} \uparrow p_{l+1} \quad (2.2)$$

$\bar{D}^{(l)}$ は β_l 次正則行列

なる m_l 次直交行列 $R_1^{(l)}$ を構成する(注 2).

$[\{u^{(l+1)}\}^T : \{u_2^{(l)}\}^T]^T \triangleq \{R_1^{(l)}\}^T u^{(l)}$ ($\dim u_2^{(l)} = \beta_l, m_{l+1} \triangleq m_l - \beta_l$) とおけば

$$u_2^{(l)}(t) = \{\bar{D}^{(l)}\}^{-1} \bar{y}_2^{(l)}(t) \quad (2.3)$$

を得る. STEP. 3 に進む.

STEP. 3 $\alpha_l \triangleq p_{l+1} - \text{rank } \bar{D}_1^{(l)}$ とするとき,

$$L_2^{(l)} \bar{D}_1^{(l)} = \begin{bmatrix} \hat{D}^{(l)} \\ 0 \end{bmatrix} \uparrow p_{l+1} - \alpha_l \quad (2.4)$$

なる p_{l+1} 次正則行列 $L_2^{(l)}$ を構成する. $\alpha_l = 0$ ならば, $n_{l+1} \triangleq n_l, R_2^{(l)} \triangleq I(n_l)$ とおきアルゴリズムを終了する. $\alpha_l > 0$ ならば, $\bar{C}^{(l)} \triangleq L_2^{(l)} \bar{C}^{(l)} [\{\bar{y}_1^{(l)}\}^T : \{\bar{y}_2^{(l)}\}^T]^T \triangleq L_2^{(l)} (\bar{y}_1^{(l)} - \bar{D}_2^{(l)} u_2^{(l)})$ ($\dim \bar{y}_1^{(l)} = \alpha_l$) とおき STEP. 4 に進む.

STEP. 4

$$\bar{C}^{(l)} R_2^{(l)} = \begin{bmatrix} \hat{C}_1^{(l)} : \hat{C}_2^{(l)} \\ 0 : \bar{C}^{(l)} \end{bmatrix} \uparrow p_{l+1} - \alpha_l \quad (2.5)$$

$\hat{C}^{(l)}$ は α_l 次正則行列

なる n_l 次直交行列 $R_2^{(l)}$ を構成する(注 2).

$[\{x^{(l+1)}\}^T : \{x_2^{(l)}\}^T]^T \triangleq \{R_2^{(l)}\}^T x^{(l)}$ ($\dim x_2^{(l)} = \alpha_l, n_{l+1} \triangleq n_l - \alpha_l$) とおけば

$$x_2^{(l)}(t) = \{\hat{C}^{(l)}\}^{-1} \bar{y}_2^{(l)}(t) \quad (2.6)$$

を得る. $A_{l+1}, B_{l+1}, C_{l+1}, D_{l+1}$ および $v^{(l+1)}, y^{(l+1)}$ を以下のように定義して, $l=l+1$ とおき STEP. 1 に戻る. すなわち,

$$\left. \begin{aligned} & \begin{bmatrix} \overbrace{A_{l+1} \quad A_1^{(l)}}^{\alpha_l} \\ \overbrace{A_2^{(l)} \quad A_3^{(l)}}^{\beta_l} \end{bmatrix} \uparrow n_{l+1} \triangleq \{R_2^{(l)}\}^T A_l R_2^{(l)} \\ & \begin{bmatrix} \overbrace{B_{l+1} \quad B_1^{(l)}}^{\beta_l} \\ \overbrace{B_2^{(l)} \quad B_3^{(l)}}^{\alpha_l} \end{bmatrix} \uparrow p_{l+1} \triangleq \{R_2^{(l)}\}^T B_l R_1^{(l)} \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

(注 2) $R_1^{(l)}, R_2^{(l)}$ は elementary Hermitian matrix¹⁾ により構成する.

$$\left. \begin{aligned} C_{l+1} &\triangleq \begin{bmatrix} \hat{C}_1^{(l)} \\ \hat{C}_2^{(l)} \end{bmatrix}, \quad D_{l+1} \triangleq \begin{bmatrix} \hat{D}^{(l)} \\ \bar{D}_2^{(l)} \end{bmatrix} \\ v^{(l+1)} &\triangleq A_1^{(l)} x_2^{(l)} + B_1^{(l)} u_2^{(l)} + v_1^{(l)} \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

$$y^{(l+1)} \triangleq \begin{bmatrix} \bar{y}_1^{(l)} - \hat{C}_2^{(l)} x_2^{(l)} \\ \bar{D}_2^{(l)} x_2^{(l)} - A_3^{(l)} x_2^{(l)} - B_3^{(l)} u_2^{(l)} - v_2^{(l)} \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

ここで, $[\{v_1^{(l)}\}^T : \{v_2^{(l)}\}^T]^T \triangleq \{R_2^{(l)}\}^T v^{(l)}$ ($\dim v_2^{(l)} = \alpha_l$) である. □

(注意 2) アルゴリズム I_σ と Moylan のアルゴリズム¹²⁾ との主な相違点は, 各反復段階 $l=l$ において情報 I_σ から決定可能となる入力の部分 $u_2^{(l)}$ を (2.3) 式で再構成し, この $u_2^{(l)}$ に応じる, (2.2), (2.7) 式での係数行列 $\bar{D}_2^{(l)}, \bar{D}^{(l)}$ および $B_1^{(l)}, B_3^{(l)}$ を S_σ から除去する機能を追加したことである. □

(注意 3) 離散系 S_σ において, l 時刻先までの出力情報のみを含む情報 $\{A, B, C, D, y(t), v(t), (0 \leq t \leq l)\}$ から一意に決定可能な $x(0), u(0)$ の最大の部分は, それぞれ, 後述の (3.8, 9) 式で $i=l, \tau=0$ とした場合の右辺により再構成できる. より詳細な議論は付録に記す. □

アルゴリズム I_σ が順次作り出すシステムを $S_\sigma(l)$ と記す. すなわち,

$$\begin{aligned} \Delta_\sigma x^{(l)} &= A_l x^{(l)} + B_l u^{(l)} + v^{(l)} \\ S_\sigma(l): \quad x^{(l)}, v^{(l)} &\in R^{n_l}, \quad u^{(l)} \in R^{m_l} \\ y^{(l)} &= C_l x^{(l)} + D_l u^{(l)}, \quad y^{(l)} \in R^{p_l} \\ t &\in T_\sigma \end{aligned} \quad (2.10)$$

また, 初期状態 $\xi^{(l)} \in R^{n_l}$, 入力対 $(\bar{u}^{(l)}, 0) \in \Omega_\sigma(R^{m_l}) \times \Omega_\sigma(R^{n_l})$ に対して $S_\sigma(l)$ の出力が恒等的に零となるときの, そのときの状態 $x^{(l)}(t)$ を $\bar{x}_\sigma^{(l)}(t; \xi^{(l)}, \bar{u}^{(l)})$ と表記する.

[補題 1.] 任意の $\bar{x}_\sigma^{(l+1)}(t; \xi^{(l+1)}, \bar{u}^{(l+1)})$ ($\triangleq \bar{x}_\sigma^{(l+1)}(t)$) に対して

$$\begin{aligned} \bar{x}^{(l)}(t) &\triangleq R_2^{(l)} \begin{bmatrix} \bar{x}_\sigma^{(l+1)}(t) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \xi^{(l)} \triangleq R_2^{(l)} \begin{bmatrix} \xi^{(l+1)} \\ 0 \end{bmatrix} \\ \bar{u}^{(l)}(t) &\triangleq R_1^{(l)} \begin{bmatrix} \bar{u}^{(l+1)}(t) \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.11)$$

とおけば, $\bar{x}^{(l)}(t) = \bar{x}_\sigma^{(l)}(t; \xi^{(l)}, \bar{u}^{(l)})$ が成立する.

(証明) $\bar{x}_\sigma^{(l+1)}(t)$ の定義と (2.7) 式より

$$\Delta_\sigma \bar{x}_\sigma^{(l+1)} = A_{l+1} \bar{x}_\sigma^{(l+1)} + B_{l+1} \bar{u}^{(l+1)} \quad (2.12)$$

$$0 = \begin{bmatrix} \hat{C}_1^{(l)} \\ \hat{C}_2^{(l)} \end{bmatrix} \bar{x}_\sigma^{(l+1)} + \begin{bmatrix} \hat{D}^{(l)} \\ \bar{D}_2^{(l)} \end{bmatrix} \bar{u}^{(l+1)} \quad (2.13)$$

であり, これらと (2.7) 式より

$$\Delta_\sigma \bar{x}^{(l)} = R_2^{(l)} \begin{bmatrix} \Delta_\sigma \bar{x}_\sigma^{(l+1)} \\ 0 \end{bmatrix} = A_l \bar{x}^{(l)} + B_l \bar{u}^{(l)}$$

を得る. したがって, $[\bar{x}^{(l)}]$ は初期状態 $\xi^{(l)}$, 入力対 $(\bar{u}^{(l)}, 0)$ に対する $S_\sigma(l)$ の状態である. 一方,

$$L_i \triangleq \{L_1^{(i)}\}^{-1} \begin{bmatrix} \{L_2^{(i)}\}^{-1} & 0 \\ 0 & I(p_i - p_{i+1}) \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

とおけば, (2.1, 2), (2.4, 5) 式より

$$C_i = L_i \begin{bmatrix} \hat{C}_1^{(i)} & \hat{C}_2^{(i)} \\ 0 & \hat{C}^{(i)} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \{R_2^{(i)}\}^T$$

$$D_i = L_i \begin{bmatrix} \hat{D}^{(i)} & L_2^{(i)} \hat{D}_2^{(i)} \\ 0 & \hat{D}^{(i)} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \{R_1^{(i)}\}^T$$

が成立するので, 出力は $C_i \bar{x}^{(i)} + D_i \bar{u}^{(i)} = L_i [\{\hat{C}_1^{(i)}\}^T : 0]^T \bar{x}_\sigma^{(i+1)} + [\{\hat{D}^{(i)}\}^T : 0]^T \bar{u}^{(i+1)}$ となり, (2.13) 式より恒等的に零となる。■

またここで, アルゴリズム I_σ の反復のたびに状態ベクトルの次元が減少することより, つぎの補題を得る。

【補題 2_σ】 アルゴリズム I_σ は $n(=n_0)$ 以下の反復回数で終了する。□

3. 縮小化システム

補題 2_σ よりアルゴリズム I_σ は $n(=n_0)$ 以下の反復回数で終了するが, いま $l=\mu(\leq n-1)$ で終了したとする。このとき S_σ の縮小化システム $\tilde{S}_\sigma(\mu)$:

$$A_\sigma \bar{x} = \tilde{A} \bar{x} + [\tilde{B}_1 : \tilde{B}_2] \bar{u} + \tilde{v} \quad (3.1a)$$

$$\tilde{S}_\sigma(\mu):$$

$$\bar{x}, \tilde{v} \in R^{n_\mu}, \bar{u} \in R^{m_{\mu+1}}$$

$$\bar{y} = \tilde{C} \bar{x} + [0 : \tilde{D}] \bar{u}, \bar{y} \in R^{p_{\mu+1}} \quad (3.1b)$$

$$t \in T_\sigma$$

$$\begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \end{bmatrix} \uparrow_{p_{\mu+1}} \triangleq \bar{u} \quad (3.2)$$

をつぎのように構成する。

$\text{rank } \tilde{D}_1^{(\mu)} = p_{\mu+1}$ であるので $\tilde{D}_1^{(\mu)}$ の右から適当な $m_{\mu+1}$ 次直交行列 Q を作用させ

$$\tilde{D}_1^{(\mu)} Q = [0 : \tilde{D}] \quad (3.3)$$

なる $p_{\mu+1}$ 次正則行列 $\tilde{D}$ を構成する。さらに

$$[B_{\mu+1} : B^{(\mu)}] \triangleq B_\mu R_1^{(\mu)}, [\tilde{B}_1 : \tilde{B}_2] \triangleq B_{\mu+1} Q$$

$$\tilde{A} \triangleq A_\mu, \tilde{C} \triangleq \tilde{C}^{(\mu)} \quad (3.4)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{u}_1(t) \\ \bar{u}_2(t) \end{bmatrix} \uparrow_{p_{\mu+1}} \triangleq Q^T u^{(\mu+1)}(t)$$

$$\bar{x}(t) \triangleq x^{(\mu)}(t), \bar{v}(t) \triangleq v^{(\mu)}(t) + B^{(\mu)} u_2^{(\mu)}(t)$$

$$\bar{y}(t) \triangleq \bar{y}_1^{(\mu)}(t) - \tilde{D}_2^{(\mu)} u_2^{(\mu)}(t) \quad (3.5)$$

とする。

(注意 4) (3.4) 式で定義した $\tilde{C}$ は f. r. rank (注 3) である。□

ここで, n 次正方行列 J_i , m 次正方行列 K_i , $0 \leq i \leq \mu$, を以下のように定義する。すなわち,

$$J_i \triangleq \begin{bmatrix} \xleftrightarrow{n_{i+1}} \\ J_i^{(1)} : J_i^{(2)} \end{bmatrix} \triangleq R_2^{(0)} \cdots \begin{bmatrix} R_2^{(i)} & 0 \\ 0 & I(n-n_i) \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

$$K_i \triangleq \begin{bmatrix} \xleftrightarrow{m_{i+1}} \\ K_i^{(1)} : K_i^{(2)} \end{bmatrix} \triangleq R_1^{(0)} \cdots \begin{bmatrix} R_1^{(i)} & 0 \\ 0 & I(m-m_i) \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

つぎの補題は S_σ と $\tilde{S}_\sigma(\mu)$ との間の重要な関係を示すものである。

【補題 3_σ】 $\tilde{S}_\sigma(\mu)$ において, 出力を恒等的に零にする初期状態 $\xi^{(\mu)} \in R^{n_\mu}$, 入力対 $(\bar{u}^*, 0) \in \Omega_\sigma(R^{m_{\mu+1}}) \times \Omega_\sigma(R^{n_\mu})$ に対する状態を $\bar{x}^*(t)$ とする。このとき, $J_\mu^{(1)} \bar{x}^*(t) = \bar{x}_\sigma^{(0)}(t)$; $J_\mu^{(1)} \xi^{(\mu)}$, $K_\mu^{(1)} Q \bar{u}^*$ が成立する。

(証明) (3.4, 5) 式から $\bar{x}^*(t)$ は初期状態 $\xi^{(\mu)}$, 入力対 $(R_1^{(\mu)} [(Q \bar{u}^*)^T : 0]^T, 0)$ に対する $S_\sigma(\mu)$ の状態である。一方, (2.1, 2) 式より

$$C_\mu = \{L_1^{(\mu)}\}^{-1} \begin{bmatrix} \tilde{C}^{(\mu)} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$D_\mu = \{L_1^{(\mu)}\}^{-1} \begin{bmatrix} \tilde{D}_1^{(\mu)} & \tilde{D}_2^{(\mu)} \\ 0 & \tilde{D}^{(\mu)} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \{R_1^{(\mu)}\}^T$$

であるので, 出力 $C_\mu \bar{x}^* + D_\mu (R_1^{(\mu)} [(Q \bar{u}^*)^T : 0]^T) = \{L_1^{(\mu)}\}^{-1} [\tilde{C}^T : 0]^T \bar{x}^* + [\tilde{D}^T : 0]^T \bar{u}_2^*$ となる ($\bar{u}_2^*$ は (3.2) 式と同様に $\bar{u}^*$ から定義されたものである)。この式の右辺は, $\bar{x}^*$, $\bar{u}_2^*$ の定義より恒等的に零である。以上のことより, $\bar{x}^*(t) = \bar{x}_\sigma^{(\mu)}(t)$; $\xi^{(\mu)}$, $R_1^{(\mu)} [(Q \bar{u}^*)^T : 0]^T$ が成立する。したがって, 補題 1_σ を $l=\mu-1$, $\mu-2, \dots, 0$ として順次用いることによりこの補題を得る。■

$R_1^{(1)}$, $R_2^{(1)}$, $0 \leq l \leq \mu$, は直交行列であるから, (3.6, 7) 式で定義された J_i , K_i , $0 \leq i \leq \mu$ は直交行列である。したがって, 各 $\tau \in T_\sigma$ において

$$\text{proj}(\text{Im } (J_i^{(1)})^\perp) x(\tau) = J_i^{(2)} [\{x_2^{(i)}(\tau)\}^T : \dots : \{x_2^{(0)}(\tau)\}^T]^T \quad (3.8)$$

$$\text{proj}(\text{Im } (K_i^{(1)})^\perp) u(\tau) = K_i^{(2)} [\{u_2^{(i)}(\tau)\}^T : \dots : \{u_2^{(0)}(\tau)\}^T]^T \quad (3.9)$$

(注 3) 記述の簡単化のために, 行列の各行 (各列) からなるすべてのベクトルが 1 次独立である場合, full row rank (full column rank) の頭文字をとり, f. r. rank (f. c. rank) と略記する。

が成立する。このことより明らかに

$$\mathcal{X}_\sigma(\tau) \subset \text{Im}(J_\mu^{(1)}), \quad \mathcal{U}_\sigma(\tau) \subset \text{Im}(K_\mu^{(1)}), \quad \tau \in T_\sigma \quad (3.10)$$

なる関係を得る。

さて, $S_\sigma = \tilde{S}_\sigma(\mu)$ としたときの $\mathcal{X}_\sigma(\tau)$, $\mathcal{U}_\sigma(\tau)$ をそれぞれ $\tilde{\mathcal{X}}_\sigma(\tau)$, $\tilde{\mathcal{U}}_\sigma(\tau)$ と表わせば, (3.10)式および補題 3_σ よりつぎの補題が証明される。

【補題 4_σ】 各 $\tau \in T_\sigma$ に対して

$$\mathcal{X}_\sigma(\tau) = J_\mu^{(1)} \tilde{\mathcal{X}}_\sigma(\tau), \quad \mathcal{U}_\sigma(\tau) = K_\mu^{(1)} Q \tilde{\mathcal{U}}_\sigma(\tau) \quad \square$$

この補題と (3.8, 9) 式より, S_σ に対する問題_σ は S_σ の縮小化システム $\tilde{S}_\sigma(\mu)$ に対する考察に帰着する(注 4)。

4. 連続系の場合

まず, $\mathcal{X}_c(\tau)$, $\mathcal{U}_c(\tau)$ をつぎの特別な場合について求める。

【補題 5】 S_c において C , D がともに f. r. rank であるとき, 各 $\tau \in T_c$ に対して

$$\mathcal{X}_c(\tau) = R^n, \quad \mathcal{U}_c(\tau) = R^m$$

が成立する。

(証明) rank $D = p$ であるから, $D\tilde{Q} = [0 : I(p)]$ なる m 次正則行列 $\tilde{Q}$ が存在する。[$B_1 : B_2$] $\triangleq B\tilde{Q}$ ($B_2 \in R^{n \times p}$), $N \triangleq A - B_2C$ とおき, 任意の $\xi \in R^n$, $w \in \Omega_c(R^{m-p})$ に対して

$$\tilde{x}(t; \xi, w) \triangleq e^{Nt} \xi + \int_0^t e^{N(t-s)} B_1 w(s) ds \quad (4.1)$$

$$\tilde{w}(t; \xi, w) \triangleq -C\tilde{x}(t; \xi, w) \quad (4.2)$$

とすれば, $\tilde{x}(t; \xi, w)$ は S_c の出力を恒等的に零にする初期状態 ξ , 入力対 $(\tilde{Q}[w^T : \tilde{w}^T]^T, 0)$ に対する状態となる。したがって, 任意の $w \in \Omega_c(R^{m-p})$ に対して

$$\{\tilde{x}(\tau; \xi, w) | \xi \in R^n\} (\triangleq \mathcal{X}_c) \subset \mathcal{X}_c(\tau), \quad \tau \in T_c \quad (4.3)$$

$$\{[\tilde{Q}w^T(\tau) : \tilde{w}^T(\tau; \xi, w)]^T | \xi \in R^n\} \subset \mathcal{U}_c(\tau), \quad \tau \in T_c \quad (4.4)$$

である。一方, $e^{N\tau}$ は各 $\tau \in T_c$ において正則なので, 任意の $w \in \Omega_c(R^{m-p})$ に対して, $\mathcal{X}_c = R^n$, $\tau \in T_c$, とする。このことと (4.3) 式より $\mathcal{X}_c(\tau) = R^n$, $\tau \in T_c$, を得る。したがって, (4.2), (4.4) 式および C が f. r. rank であることから, $\mathcal{U}_c(\tau) = R^m$, $\tau \in T_c$, を得る。■
つぎに, $\mathcal{X}_c(\tau)$, $\mathcal{U}_c(\tau)$ を一般の S_c に対して特徴づけよう。

《定理 1》 各 $\tau \in T_c$ において

$$\mathcal{X}_c(\tau) = \text{Im}(J_\mu^{(1)}), \quad \mathcal{U}_c(\tau) = \text{Im}(K_\mu^{(1)})$$

が成立し, $\mathcal{X}_c(\tau)$, $\mathcal{U}_c(\tau)$ はともに時刻 τ によらない

(注 4) また明らかに S_c が(左)可逆^{(11)~(12)}であるための必要十分条件は $\tilde{S}_c(\mu)$ が(左)可逆となることである。

一定の部分空間となる(今後, $\mathcal{X}_c(\tau)$, $\mathcal{U}_c(\tau)$ をそれぞれ単に $\mathcal{X}_c$, $\mathcal{U}_c$ と表記する)。

(証明) 縮小化システム $\tilde{S}_c(\mu)$ において $\tilde{C}$, $\tilde{D}$ はともに f. r. rank であるので, 補題 5 より, $\tilde{\mathcal{X}}_c(\tau) = R^{n_\mu}$, $\tilde{\mathcal{U}}_c(\tau) = R^{m_{\mu+1}}$ を得る。ここで Q が正則であることに注意すれば, 補題 4_c によりこの定理を得る。■

この結果より, $\text{proj}(\mathcal{X}_c^+)x(\tau)$, $\text{proj}(\mathcal{U}_c^+)u(\tau)$ はそれぞれ $i = \mu$ に対する (3.8, 9) 式の右辺によって求めることができる。

5. 離散系の場合

本章では, 縮小化システム $\tilde{S}_d(\mu)$ と同値なシステム(後述の (5.1a, b) 式)を導出し, このシステムの有限整定性を解析することにより問題_d を解決する。

このためにまず,

$$\bar{A} \triangleq \bar{A} - \bar{B}_2 \bar{D}^{-1} \bar{C}$$

$$\bar{B} \triangleq \bar{B}_1$$

$$\bar{v} \triangleq \bar{v} + \bar{B}_2 \bar{D}^{-1} \bar{y}$$

$$\hat{G} \triangleq -\bar{D}^{-1} \bar{C}$$

$$\hat{u} \triangleq \hat{u}_1$$

とおき,

$$F\bar{B} = \left[\frac{\bar{B}}{0} \right] \uparrow \zeta, \quad \text{rank } \bar{B} = \zeta$$

なる n_μ 次直交行列 F を構成する。ここで,

$$\zeta \uparrow \left[\frac{\hat{A}_1}{\hat{A}_2} \right] \triangleq \hat{A} \triangleq F \bar{A} F^T, \quad \hat{x} \triangleq F \tilde{x}, \quad \hat{v} \triangleq F \tilde{v}$$

とおくことにより, $\tilde{S}_d(\mu)$ と同値であるつぎの (5.1a, b) 式を得る。

$$\Delta_d \hat{x} = \hat{A} \hat{x} + \left[\frac{\bar{B}}{0} \right] \hat{u} + \hat{v} \quad (5.1a)$$

$$\hat{u}_2 = \hat{G} F^T \hat{x} + \bar{D}^{-1} \bar{y} \quad (5.1b)$$

このシステムの有限整定性を調べるために, つぎのアルゴリズム II を準備する。

アルゴリズム II

STEP. 0 $A^{(0)} = \hat{A}$, $\hat{n}_0 = n_\mu - \zeta$ とおき, $l = 0$ として STEP. 1 に進む。

STEP. 1 $A^{(l)} = 0$ ならば, $\zeta_l \triangleq \hat{n}_l$, $\nu^* \triangleq l+1$ としてアルゴリズムを終了する。 $A^{(l)} \neq 0$ ならば,

$$F_l A^{(l)} = \left[\frac{\bar{A}^{(l)}}{0} \right] \uparrow \hat{n}_{l+1}, \quad \text{rank } \bar{A}^{(l)} = \hat{n}_{l+1}$$

なる $\hat{n}_l$ 次直交行列 F_l を構成して STEP. 2 に進む。

STEP. 2 $\zeta_l = 0$ ならば, 改めて $\zeta_l \triangleq \hat{n}_l$ とおき $\nu^* \triangleq l$ としてアルゴリズムを終了する。 $\zeta_l \neq 0$ の場合は行列 $A^{(l+1)}$ を

$$[A^{(l+1)} : *] \triangleq \bar{A}^{(l)} \left[\begin{array}{c|c} I(\zeta_l) & 0 \\ \hline 0 & F_l^T \end{array} \right]$$

で構成し, $l=l+1$ として STEP. 1 に戻る. $\square$

ここで, アルゴリズム II を実行したとき $l=\nu$ で終了したと仮定する.

$$H_\nu \triangleq \left[\begin{array}{c|c|c} I(\zeta) & 0 & 0 \\ \hline 0 & F_{\nu-1} & 0 \\ \hline 0 & 0 & I(n_\mu - \zeta - \hat{n}_{\nu-1}) \end{array} \right] \cdots \left[\begin{array}{c|c} I(\zeta) & 0 \\ \hline 0 & F_0 \end{array} \right] \quad (5.2)$$

とすれば, H_ν は直交行列であり, つぎの関係式が成立する.

$$H_\nu \begin{bmatrix} \hat{B} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{B} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$H_\nu \hat{A} H_\nu^T = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \xleftrightarrow{\zeta_{\nu-1}} & \xleftrightarrow{\zeta_{\nu-2}} & \cdots & \xleftrightarrow{\zeta_0} \\ & * & & \end{array} \\ \begin{array}{c} \uparrow \zeta \\ \begin{array}{ccc} A^{(\nu)} & V_\nu & * \\ \hline 0 & V_{\nu-1} & * \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline 0 & & V_1 \\ \hline 0 & & \end{array} \\ \uparrow \zeta_{\nu-1} \\ \vdots \\ \uparrow \zeta_1 \\ \downarrow \zeta_0 \end{array} \end{array} \quad (5.3)$$

$$\text{rank } V_i = \zeta_i, \quad 1 \leq i \leq \nu-1$$

$$\text{rank } A^{(\nu)} = 0 \quad (\nu^* = \nu+1), \quad \zeta_\nu (\nu^* = \nu) \quad (5.4)$$

$\hat{G} F^T H_\nu^T$ は f. r. rank であるので,

$$P \hat{G} F^T H_\nu^T = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \xleftrightarrow{\zeta} & \xleftrightarrow{\zeta_\nu} & \cdots & \xleftrightarrow{\zeta_0} \\ & * & & \end{array} \\ \begin{array}{c} \uparrow \delta_{\nu+1} \\ \begin{array}{ccc} G_{\nu+1} & & \\ \hline 0 & G_\nu & * \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline 0 & & G_0 \\ \hline \end{array} \\ \uparrow \delta_\nu \\ \vdots \\ \uparrow \delta_0 \end{array} \end{array} \quad (5.5)$$

$$\text{rank } G_i = \delta_i, \quad 0 \leq i \leq \nu+1 \quad (5.6)$$

なる $p_{\mu+1}$ 次直交行列 P を構成できる. ここで

$$\eta_\tau \triangleq n_\mu(\tau=0), \quad \triangleq n_\mu - \sum_{i=0}^{\tau-1} \zeta_i \quad (1 \leq \tau \leq \nu^*),$$

$$\triangleq \eta_{\nu^*} (\tau \geq \nu^*+1)$$

$$\theta_\tau \triangleq m_{\mu+1}(\tau=0), \quad \triangleq m_{\mu+1} - \sum_{i=0}^{\tau-1} \delta_i \quad (1 \leq \tau \leq \nu^*),$$

$$\triangleq \theta_{\nu^*} (\tau \geq \nu^*+1) \quad (5.7)$$

とおき, $H(\tau) \in R^{n_\mu \times \eta_\tau}$, $P(\tau) \in R^{m_{\mu+1} \times \theta_\tau}$ を次式により定義する.

$$[H(\tau) : *] \triangleq F^T H_\nu^T$$

$$[P(\tau) : *] \triangleq \begin{bmatrix} I(m_{\mu+1} - p_{\mu+1}) & 0 \\ 0 & P^T \end{bmatrix}, \quad \tau \in T_d \quad (5.8)$$

このときつぎの補題が成立する.

〔補題 6〕 各 $\tau \in T_d$ において

$$\tilde{\mathcal{X}}_d(\tau) = \text{Im}(H(\tau))$$

$$\tilde{\mathcal{U}}_d(\tau) = \text{Im}(P(\tau))$$

(証明) (5.1a), (5.3, 4) 式と $\hat{B}$ が f. r. rank であることより $\tilde{\mathcal{X}}_d(\tau) = \text{Im}(H(\tau))$ を得る. この結果と (5.1b), (5.5, 6) 式より $\mathcal{U}_d(\tau) = \text{Im}(P(\tau))$ を得る. $\blacksquare$

ここで, $\mathcal{X}_d(\tau)$, $\mathcal{U}_d(\tau)$ を特徴づけるつぎの定理 2 が証明される.

《定理 2》 各 $\tau \in T_d$ において

$$\mathcal{X}_d(\tau) = \text{Im}(J_\mu^{(1)} H(\tau))$$

$$\mathcal{U}_d(\tau) = \text{Im}(K_\mu^{(1)} Q P(\tau))$$

であり, つぎの関係が成立する.

$$\mathcal{X}_d(0) \supset \cdots \supset \mathcal{X}_d(\nu^*) = \mathcal{X}_d(\tau)$$

$$\mathcal{U}_d(0) \supset \cdots \supset \mathcal{U}_d(\nu^*) = \mathcal{U}_d(\tau)$$

ここで, $\tau \geq \nu^*+1$, $\nu^* \leq n_\mu \leq n$ である.

(証明) 定理の前半は補題 4d, 6 より明らかである. この結果より $\mathcal{X}_d(\tau)$, $\mathcal{U}_d(\tau)$ は集合の包含関係の意味で単調減少である. さらに, $J_\mu^{(1)}$, $K_\mu^{(1)}$, $H(\tau)$, $P(\tau)$, Q はすべて f. c. rank であるので, 各 $\tau \in T_d$ において

$$\dim \mathcal{X}_d(\tau) = \eta_\tau$$

$$\dim \mathcal{U}_d(\tau) = \theta_\tau$$

となる. 一方, アルゴリズム II の構造より $\zeta_i \geq 1$, $0 \leq i \leq \nu^*-1$, であるので, (5.7) 式の η_τ , θ_τ の定義より任意の $\tau \geq \nu^*$ に対して

$$n_\mu = \eta_0 > \eta_1 > \cdots > \eta_{\nu^*} = \eta_\tau \geq 0$$

$$\theta_0 \geq \theta_1 \geq \cdots \geq \theta_{\nu^*} = \theta_\tau \geq 0$$

が成立する. 以上のことより定理の後半を得る. $\blacksquare$

Q , $H(0)$, $P(0)$ は正則であるので, 定理 1, 2 よりつぎの系を得る.

〔系〕 $\mathcal{X}_c = \mathcal{X}_d(0)$, $\mathcal{U}_c = \mathcal{U}_d(0)$ $\square$

さて, $\text{proj}(\mathcal{X}_d^+(\tau))x(\tau)$, $\text{proj}(\mathcal{U}_d^+(\tau))u(\tau)$ を出力 y および既知入力 v から再構成する方法は以上の議論で明らかであるので, 紙数の関係より省略する.

6. おわりに

初期状態が未知の定係数線形系において, 出力情報から一意に決定できる各時刻 τ での入力および状態の最大部分を, 部分空間 $\mathcal{U}_c(\tau)$, $\mathcal{X}_c(\tau)$ を求めることによって明らかにし, 同時に $\text{proj}(\mathcal{U}_d^+(\tau))u(\tau)$, $\text{proj}(\mathcal{X}_d^+(\tau))x(\tau)$ を出力から再構成する方法を与えた.

初期状態が既知である場合の本論文と同様な問題は, S_c にアルゴリズム I. とさらに別のアルゴリズムを順次適用することにより解決できる. 特にこの入力に関する結果は, 従来から広く研究されている(左)可逆性^{10)~12)}の概念を含んでおり, 吉川ら¹⁵⁾の可逆性の一般化についての研究とも関連するが, このことについては稿を改めて報告したい.

今後の課題として、本論文の結果を種々の問題（たとえば、非干渉化⁹⁾やモデルマッチング¹⁴⁾）に応用することが考えられる。

終りに臨み、日頃ご指導を賜っている大阪大学 杉山博教授に感謝の意を表す。

参考文献

- 1) J. H. Wilkinson: The Algebraic Eigenvalue Problem Oxford, London (1965)
- 2) M. Aoki and M. T. Li: Partial Reconstruction of State Vectors in Decentralized Dynamic Systems, IEEE Trans. on Automatic Control, **AC-18-3**, 289/292 (1973)
- 3) L. M. Silverman: Discrete Riccati Equations; Alternative Algorithms, Asymptotic Properties and System Theory Interpretations, in Control and Dynamic Systems, **12**, 313/386, Academic Press, New York (1976)
- 4) G. Basile and G. Marro: On the Observability of Linear, Time-Invariant Systems with Unknown Inputs, J. Optimiz. Theory Appl., **3-6**, 410/415 (1969)
- 5) G. Basile and G. Marro: A New Characterization of Some Structural Properties of Linear Systems; Unknown-Input Observability, Invertibility and Functional Controllability, Int. J. Contr., **17-5**, 931/943 (1973)
- 6) 須田：線形システムの入出力構造，計測自動制御学会論文集，**11-4**，390/397 (1975)
- 7) B. P. Molinari: Extended Controllability and Observability for Linear Systems, IEEE Trans. on Automatic Control, **AC-21-1**, 136/137 (1976)
- 8) B. P. Molinari: A Strong Controllability and Observability in Linear Multivariable Control, IEEE Trans. on Automatic Control, **AC-21-5**, 761/764 (1976)
- 9) L. M. Silverman and H. J. Payne: Input-Output Structure of Linear Systems with Application to the Decoupling Problem, SIAM J. Control, **9-2**, 199/233 (1971)
- 10) L. M. Silverman: Inversion of Multivariable Linear Systems, IEEE Trans. on Automatic Control, **AC-14-3**, 270/276 (1969)
- 11) W. A. Porter: An Algorithm for Inverting Linear Dynamic Systems, IEEE Trans. on Automatic Control, **AC-14-6**, 702/704 (1969)
- 12) P. J. Moylan: Stable Inversion of Linear Systems, IEEE Trans. on Automatic Control, **AC-22-1**, 74/78 (1977)
- 13) D. Rappaport and L. M. Silverman: Structure and Stability of Discrete-Time Optimal Systems, IEEE Trans. on Automatic Control, **AC-16-3**, 227/233 (1971)
- 14) B. C. Moore and L. M. Silverman: Model Matching by State Feedback and Dynamic Compensation, IEEE Trans. on Automatic Control, **AC-17-4**, 491/497 (1972)
- 15) 吉川，杉江，花房：線形関数逆システムの存在条件とその一構成法，第17回SICE学術講演会予稿集，421/422 (1978)
- 16) 児玉，須田：システム制御のためのマトリクス理論，計測自動制御学会 (1978)

《付 録》

S_d に対してつぎの二つの部分空間を定義する。

【定義 2】 ある $\xi \in R^n$ と $\bar{u} \in \Omega_d(R^m)$ が存在して， $y_d(t; \xi, \bar{u}, 0) = 0$ ， $0 \leq t \leq l$ ，が成立するとき， ξ および $\bar{u}(0)$ の全体をそれぞれ $\mathcal{X}_d(0; l)$ ， $\mathcal{U}_d(0; l)$ と定義する。□

(注意 5) $\mathcal{X}_d(0; l)$ の特徴づけは文献 2，5～8 にある。 $\mathcal{U}_d(0; l)$ は $D=0$ の場合について文献 2 で考察されている。□

このとき，注意 3 で示したことを保証するつぎの定理が成立する。

《定理 3》

$$\mathcal{X}_d(0; l) = \text{Im}(J_l^{(1)}), \quad \mathcal{U}_d(0; l) = \text{Im}(K_l^{(1)})$$

(証明) 2段階に分けて証明を行う。

第1段：(2.10)式の $S_d(l)$ において出力 $y^{(1)}$ を

$$y^{(1)}(t) = 0 \quad (t=0), = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ * \end{bmatrix}^{\uparrow p_{l-\alpha_{l-1}}} (t=1) \quad (\text{A.1})$$

とする初期状態 $\xi^{(1)}$ ，入力対 $(\bar{u}^{(1)}, 0)$ が存在したと仮定する。また， $S_d(l-1)$ は変数変換

$$\bar{x}^{(l-1)} = \{R_2^{(l-1)}\}^T x^{(l-1)}$$

$$\bar{u}^{(l-1)} = \{R_1^{(l-1)}\}^T u^{(l-1)}$$

を用いてつぎのシステムに同値変形できる。

$$\begin{aligned} A_d \bar{x}^{(l-1)} = & \begin{bmatrix} A_l \\ \vdots \\ A_2^{(l-1)} \end{bmatrix} * \bar{x}^{(l-1)} \\ & + \begin{bmatrix} B_l \\ \vdots \\ B_2^{(l-1)} \end{bmatrix} * \bar{u}^{(l-1)} \\ & + \{R_2^{(l-1)}\}^T v^{(l-1)} \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

$$\begin{aligned} \{L_{l-1}\}^{-1} y^{(l-1)} = & \begin{bmatrix} \hat{C}_1^{(l-1)} \\ 0 \end{bmatrix} * \bar{x}^{(l-1)} \\ & + \begin{bmatrix} \hat{D}^{(l-1)} \\ 0 \end{bmatrix} * \bar{u}^{(l-1)} \end{aligned}$$

ここで L_{l-1} は (2.14) 式で定義した正則行列である。

このことと (2.7) 式での C_l ， D_l の定義より

$$\xi^{(l-1)} \triangleq R_2^{(l-1)} [\{\xi^{(1)}\}^T; 0]^T$$

$$\bar{u}^{(l-1)} \triangleq R_1^{(l-1)} [\{\bar{u}^{(1)}\}^T; 0]^T$$

とおけば，初期状態 $\xi^{(l-1)}$ ，入力対 $(\bar{u}^{(l-1)}, 0)$ に対して $y^{(l-1)}(t) = 0$ ($0 \leq t \leq 1$) となることから証明できる。したがって (2.7) 式での D_{l-1} ， C_{l-1} の定義および $\hat{C}_1^{(l-2)}$ ， $\hat{D}^{(l-2)}$ が f.r. rank であることより， $\xi^{(l-1)} \in R^{m_{l-1}}$ を適当に選び $\bar{u}^{(l-1)} \triangleq \{\bar{u}^{(l-1)}(0), \bar{u}^{(l-1)}(1), \xi^{(l-1)}, \dots\}$ と定義すれば，初期状態 $\xi^{(l-1)}$ ，入力対 $(\bar{u}^{(l-1)}, 0)$ に対して $S_d(l-1)$ の出力 $y^{(l-1)}$ は

$$y^{(l-1)}(t)=0 \ (0 \leq t \leq 1), \quad = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ * \end{bmatrix} \downarrow p_{l-1}-\alpha_{l-2} \ (t=2)$$

を満足する. 以上の論法を繰り返せば最終的に $y_d(t; \xi^{(0)}, \tilde{u}^{(0)}, 0)=0 \ (0 \leq t \leq l)$ を得る. ここに, $\xi^{(0)} \triangleq J_{l-1} [\{\xi^{(1)}\}^T : 0]^T$, $\tilde{u}^{(0)} \triangleq \{K_{l-1} [\{\tilde{u}^{(1)}(0)\}^T : 0]^T, \dots\}$ である.

第2段: (A.2), (2.7)式および $\hat{D}^{(l)}, \hat{D}^{(l-1)}$ が f. r. rank であることより, 任意の $\xi \in R^{n_{l+1}}$ に対して

$$\xi^{(1)} \triangleq R_2^{(1)} \begin{bmatrix} \xi \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{u}^{(1)}(0) \triangleq R_1^{(1)} \begin{bmatrix} -\{\hat{D}^{(1)}\} + \hat{C}_1^{(1)} \xi \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\tilde{u}^{(1)}(1) \triangleq -\{\hat{D}^{(1-1)}\} + \hat{C}_1^{(1-1)} \{A_l \xi^{(1)} + B_l \tilde{u}^{(1)}(0)\}$ とおけば (A.1) 式が成立する. ここで “+” は擬似逆行列¹⁶⁾を示す. これと第1段の結果とを結合することにより $\mathcal{X}_d(0; l) \supset \text{Im} \langle J_l^{(1)} \rangle$ を得る. また $\hat{C}_1^{(1)}$ も f. r. rank であるので, 同様の議論から $\mathcal{U}_d(0; l) \supset \text{Im} \langle K_l^{(1)} \rangle$ を得る. とともに逆の包含関係は, $i=l$ における (3.8, 9) 式より明らかである. ■