一般化ボルテラ形エコシステムの安定判別†

柴田 浩*・中沢 高照*・畑 四郎*

On Stability Analysis of Generalized Volterra Ecosystem

Hiroshi SHIBATA*, Takateru NAKAZAWA* and Shiro HATA*

1. はじめに

一般化ボルテラ形エコシステムに対して, Goh¹⁾ や竹内²⁾は, 平衡点が大局的漸近安定となるための定理を与えている. しかしながらこの定理は, 複数個の平衡点をもつ場合が多々あるにもかかわらず, 単一の平衡点をもつ系に対してしか適用できない. この欠点を補う一方法として, 各平衡点のまわりの線形近似による安定判別法が考えられる. この方法はディジタル計算機によって容易に処理できるという利点があるが, 線形近似系の固有値の実部が零になる場合は安定判別が不可能になる. ここではそのうちでしばしば生じする零固有値をもつ場合について, 理論的な解析を行い, 簡単な修正によって線形近似による安定判別が可能になることを述べる.

2. 線形近似系の性質

n 変数の一般化ボルテラ形エコシステムは

$$\dot{x}_i = x_i \left(k_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right) \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (1)$$

で表わされる. ただし $\dot{}$ は時間微分, x_i は変数, k_i , a_{ij} は実定数である. x_i は生物の個体数であるから $x_i \geq 0$, さらに x_i の初期値 x_i^0 は $x_i^0 > 0$ としてよい. また行列 $A = \{a_{ij}\}$ とし, (1)式に対してつぎの仮定をおく.

(a) $|A| \neq 0$ かつ $\{A$ のすべての主小行列式 $\neq 0$ この仮定は平衡点が有限個しか存在しないことを意味している. なお以後において安定とは漸近安定を意味している.

(1)式に対する平衡点は, つぎの二つの式の組合せとして与えられる.

$$x_i = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (2)$$

$$k_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (3)$$

この平衡点の座標を x_i^e とし, この点のまわりの(1)

式に対する線形近似系の方程式を

$$\dot{\mathbf{x}} = B\mathbf{x} \quad (4)$$

とすると, 行列 $B = \{b_{ij}\}$ はつぎのようになる.

$$b_{ii} = -a_{ii} x_i^e + k_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^e \quad (5)$$

$$b_{ij} = -a_{ij} x_i^e \quad (i \neq j) \quad (6)$$

《定理 1》 非線形系(1)の平衡点のまわりの線形近似系(4)が零固有値をもつ場合は, 少なくとも一つの変数が零となっている平衡点に限られる.

(証明) すべての $i=1, 2, \dots, n$ に対して $x_i^e \neq 0$ と仮定する. このとき平衡点であるためには, すべての $i=1, 2, \dots, n$ について(3)式が成立しなければならぬから, 線形近似系(4)の B 行列は(5), (6)式より

$$B = - \begin{bmatrix} a_{11}x_1^e & a_{12}x_1^e & \dots & a_{1n}x_1^e \\ a_{21}x_2^e & a_{22}x_2^e & \dots & a_{2n}x_2^e \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}x_n^e & a_{n2}x_n^e & \dots & a_{nn}x_n^e \end{bmatrix}$$

となる. これに対する固有方程式は, I を単位行列とすると

$$|sI - B| = \begin{vmatrix} s + a_{11}x_1^e & a_{12}x_1^e & \dots & a_{1n}x_1^e \\ a_{21}x_2^e & s + a_{22}x_2^e & \dots & a_{2n}x_2^e \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}x_n^e & a_{n2}x_n^e & \dots & s + a_{nn}x_n^e \end{vmatrix} = 0 \quad (7)$$

となる. 上式がもし $s=0$ という固有値をもてば

$$-|B| = x_1^e x_2^e \dots x_n^e |A| = 0 \quad (8)$$

でなければならない. 仮定(a)より $|A| \neq 0$ だから, (8)式を満たすためには n 個の x_i^e の少なくとも一つは零にならねばならず, これはすべての $x_i^e \neq 0$ としたはじめの仮定に矛盾する. (Q. E. D.)

《定理 2》 線形近似系(4)が零固有値をもつときは, 少なくとも一つ i に対して(2), (3)式が同時に満たされている. すなわち, 少なくとも一つ i に対して(1)式は $\dot{x}_i = 0 \times 0$ という形になっている.

(証明) いま平衡点の n 個の座標のうち, f 個が零で残りのものが零でないとする. このとき(1)式あるいは(4)式において, x_i の順序を適当に入れかえても一般性を失わないので, 平衡点の座標をつぎのようにできる.

† 第8回制御理論シンポジウムで発表(昭 54・5)

* 大阪府立大学工学部 堺市百舌鳥梅町 4-804

(Received January 30, 1980)

$$x_p^e = 0 \quad (p=1, 2, \dots, f) \quad (9)$$

$$x_q^e \neq 0 \quad (q=f+1, f+2, \dots, n) \quad (10)$$

このとき (5), (6) 式より (4) 式の B 行列は

$$B = \left[\begin{array}{cccc|cccc} k_1 - \sum_{j=1}^n a_{1j} x_j^e & & & & & & & \\ & k_2 - \sum_{j=1}^n a_{2j} x_j^e & & & 0 & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & k_f - \sum_{j=1}^n a_{fj} x_j^e & & & & \\ \hline -a_{f+11} x_{f+1}^e & -a_{f+12} x_{f+2}^e & \cdots & -a_{f+1f} x_f^e & -a_{f+1f+1} x_{f+1}^e & \cdots & -a_{f+1n} x_n^e & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ -a_{n1} x_1^e & -a_{n2} x_2^e & \cdots & -a_{nf} x_f^e & -a_{nf+1} x_{f+1}^e & \cdots & -a_{nn} x_n^e & \end{array} \right] \quad (11)$$

となる。いま上の行列の右下の部分 B_q とする。すなわち

$$B_q = \left[\begin{array}{ccc} -a_{f+1f+1} x_{f+1}^e & \cdots & -a_{f+1n} x_n^e \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{nf+1} x_{f+1}^e & \cdots & -a_{nn} x_n^e \end{array} \right] \quad (12)$$

とすると, B に対する固有方程式は

$$|sI - B| = |sI - B_q| \prod_{p=1}^f \left(s - k_p + \sum_{j=1}^n a_{pj} x_j^e \right) \quad (13)$$

となる。(10) 式と定理 1 の証明より明らかなように B_q は零固有値をもたないので, (13) 式が零固有値をもつためには, 少なくとも一つの p ($p=1, 2, \dots, f$) に対して

$$k_p - \sum_{j=1}^n a_{pj} x_j^e = 0 \quad (14)$$

でなければならない。各 p に対しては (9) 式が成立していることを考えると, (9) 式と (14) 式より定理が成立していることがわかる。(Q. E. D.)

上の証明において, (14) 式を (11) 式に代入することによってつぎの定理が得られる。

《定理 3》 もし $i=k$ に対して定理 2 が満たされ

Fig. 1 Geometric aspects for 2-variables

れているならば, 行列 B の第 k 行は零行になっている。

3. 安定判別法

前章の定理の幾何学的な考察と安定判別のためのアルゴリズムについて述べる。簡単のため 2 変数の場合について考えると, このとき (1) 式は

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1(k_1 - a_{11}x_1 - a_{12}x_2) \\ \dot{x}_2 = x_2(k_2 - a_{21}x_1 - a_{22}x_2) \end{cases} \quad (15)$$

となる。定理 1, 2 はつぎのように解釈できる。上式の右辺のカッコ内が零で表わされる二つの等傾線の交点が, 第 1 象限内にある場合は零固有値をもつことはなく, この交点が Fig. 1 の E 点のように, x_1 軸 ($x_2=0$) あるいは x_2 軸 ($x_1=0$) 上に一致したときのみ零固有値をもつようになる。したがってこのとき線形近似による安定判別を可能にするためには, 交点 E が x_1 軸上にくる直前の第 1 象限内にある状態にもどせばよい。そのためには Fig. 1 に示すように

$$u_1 = x_1, \quad u_2 = x_2 + \varepsilon \quad (16)$$

なる変換を (15) 式の右辺のカッコ内のみに対して行えばよい。このとき変換前後の解軌道の位相的な関係が対応づけられることは, 詳細な考察により明らかとなるがここでは省略する。

Fig. 1 の場合は (4) 式の線形近似系の B 行列は 2×2 となり, 第 2 行が定理 3 でいう零行に対応している。このことは B 行列の零行に相当する変数のみに ε を加える (16) 式の変換をすればよいことを意味し, 変換後の B 行列は第 2 行のみが

$$b_{2j} = -a_{2j}\varepsilon \quad (j=1, 2) \quad (17)$$

となり, 第 1 行は変わらない。そしてこの新しい B 行列によれば, 線形近似による安定判別が可能となる。

以上の 2 変数の場合の考察は n 変数の場合にもそのままあてはまる。一般の n 変数に対しては, B 行列の第 i 行が零行になれば, ε を適当に決めて第 i 行のみ

を

$$b_{ij} = -a_{ij}\varepsilon \quad (j=1, 2, \dots, n) \quad (18)$$

に変えた新しい B 行列を用いて安定判別をすればよい。

4. おわりに

n 変数の一般化ボルテラ形エコシステムについて、線形近似系が零固有値をもつ場合にも、簡単な修正によって線形近似による平衡点の安定判別を可能にした。これによって、すべての安定な平衡点の抽出を目

的とする場合には、線形近似による方法がかなり有力なものになる。しかし線形近似系の固有値が純虚数になる場合については今後の課題である。

参 考 文 献

- 1) B.S. Goh: Global Stability in Many-Species Systems, The American Naturalist, 111, 135/143(1977)
- 2) Y. Takeuchi, N. Adachi and H. Tokumaru: The Stability of Generalized Volterra Equation, J. Math. Anal. Applic., 62, 453/473 (1978)