線形多変数系における根軌跡の一近似法

伝 田 健 夫*・小 林 精 次*

A Method of Approximation of Root-Loci in Multivariable Systems

Takeo DENDA* and Seiji KOBAYASHI*

1. ま え が き

1入出力システムの根軌跡法は、広く知られているように、図的にシステムの特性を把握できるという意味で実用的な設計手法である。一方、多変数システムの根軌跡については、近年、主としてスカラーゲインが十分大きい時の漸近的ふるまい¹⁾、および、出発角・到着角^{2),3)}などについて研究が進められている。

根軌跡の開ループ極からの出発角および有限零点¹⁾への到着角は、すでに Shaked²⁾らによって求められているが、いずれも方向のみを計算するものであり、その近傍の動きについては述べていない。本稿は、これらの動きを、1入出力システムの根軌跡によって近似する手法を与えるものである。

2. 本 論

2.1 問題の設定

ここで扱うシステムは、Fig. 1 のような制御系である。システム $S(A, B, C)$ は、

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad x \in R^n, u \in R^m \quad (1)$$

$$y = Cx \quad y \in R^l \quad (2)$$

で与えられ、フィードバック則は、

$$u = kK(v - y) \quad k \in R, v \in R^l, K \in R^{m \times l} \quad (3)$$

である。このシステムの閉ループ特性方程式は、

$$\Delta(s, k) \triangleq \det(sI_n - A + kBK) = 0 \quad (4)$$

によって与えられる。以下では、 K を固定し、 k をパラメータとした時の(4)式の根の動き（以下、根軌跡という）について考察する。

2.2 k が十分小さい範囲での根軌跡の近似

閉ループ特性多項式 $\Delta(s, k)$ を k について展開し、

Fig. 1 Multivariable feedback system

Fig. 2 Single-input-single-output feedback system

$$\Delta(s, k) \triangleq P_r(s)k^r + P_{r-1}(s)k^{r-1} + \dots + P_1(s)k + P_0(s) \quad (5)$$

と置く。ここで、 $P_i(s)$, ($i=0, \dots, r$) は s の多項式であり、また、 $r \leq \text{rank } BKC$ である。 k が十分零に近い場合を考えると、 k^2 以上の項が無視できて、(4)式は、

$$P_1(s)k + P_0(s) = 0 \quad (6)$$

と近似できる。また、 $P_0(s)$, $P_1(s)$ は、

$$P_0(s) = \det(sI_n - A) \quad (7)$$

$$P_1(s) = \left. \frac{\partial \Delta(s, k)}{\partial k} \right|_{k=0} = \text{tr} \{C \text{adj}(sI_n - A)BK\} \quad (8)$$

で与えられる⁵⁾。したがって、

$$g(s) \triangleq \frac{\text{tr} \{C \text{adj}(sI_n - A)BK\}}{\det(sI_n - A)} \quad (9)$$

と置けば、(6)式は、

$$1 + kg(s) = 0 \quad (10)$$

となる。上式は、Fig. 1 の多変数システムの根軌跡の出発点付近のふるまいが、Fig. 2 の1入出力システムの根軌跡によって近似できることを示す。なお、(9)式より明らかなように、 $g(s)$ は開ループ伝達関数行列

$$G(s) = C(sI_n - A)^{-1}BK \quad (11)$$

のトレースに一致する。

【例】

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -1 & -3 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

で与えられるシステムに対し、

* 早稲田大学理工学部 東京都新宿区大久保 3-4-1
(Received March 21, 1980)

Fig. 3 Real root-locus (a) and approximated root-locus (b) of the example

$$G(s) = \frac{1}{s^4 - s^3 + 2s^2 - 25s + 29} \times \begin{bmatrix} -s^3 - 9s^2 - 23s + 104 & s^3 - 23s^2 + 11s + 112 \\ 2s^3 + 33s^2 - 32s - 52 & 33s^2 - 170s + 118 \end{bmatrix}$$

$$g(s) = \text{tr}\{G(s)\} = \frac{-s^3 + 24s^2 - 193s + 222}{s^4 - s^3 + 2s^2 - 25s + 29}$$

が得られる。複素根についての真の根軌跡と近似根軌跡を Fig. 3 に示す。出発角は一致しており、また、その近傍の動きも良く近似されている。

なお、以上では行列 K を固定して考察してきたが、(9)式よりわかるように、 K は $g(s)$ の零点だけに関係する。したがって、 K を変更して $g(s)$ の零点を配置し直すことにより、出発角は変更することが可能である。

2.3 有限零点近傍での根軌跡の近似

$l=m$, K : 正則, $\text{rank } B = \text{rank } C = m$ の場合を考える。また、一般には $r \leq m$ であるが、ここでは $r=m$ とする。特殊な場合を除いてこの仮定は成立する。 k が十分大きい時、有限零点の近傍で(4)式は、

$$1 + k\xi(s) = 0, \quad \xi(s) \triangleq P_m(s)/P_{m-1}(s) \quad (12)$$

と近似できる。したがって、有限零点の近傍における根軌跡は、伝達関数 $\xi(s)$ をもつ1入出力システムの根軌跡によって近似できる。 $\xi(s)$ はつぎのようにして得られる。今、 B^* , C^* をそれぞれ B および C の擬似逆行列、 X , Y をそれぞれ、

$$XB = O_{n-m, m}, \quad CY = O_{m, n-m} \quad (13)$$

を満たす full rank の行列とする。このとき、 $[B^*{}^T \ X^T]^T$ と $[C^* \ Y]$ は正則となり、(4)式は、

$$\Delta'(s, k) \triangleq \det \{ [B^*{}^T \ X^T]^T [sI_n - A + kBKC] \}$$

$$\times [C^* \ Y] \} = 0 \quad (14)$$

と等価になる。したがって、(5)式と同様に、

$$\Delta'(s, k) \triangleq P_m'(s)k^m + P_{m-1}'(s)k^{m-1} + \dots + P_1'(s)k + P_0'(s) \quad (15)$$

と置くと、

$$P_m(s)/P_{m-1}(s) = P_m'(s)/P_{m-1}'(s) \quad (16)$$

となる。ここで、 $P_m'(s)$, $P_{m-1}'(s)$ は Schur の公式を用いて¹⁾、

$$P_m'(s) = \det \{ X(sI_n - A)Y \} \quad (17)$$

$$P_{m-1}'(s) = \text{tr} [B^* \{ P_m'(s)(sI_n - A) - (sI_n - A)Y \text{adj} \{ X(sI_n - A)Y \} \times X(sI_n - A) \} C^* K^{-1}] \quad (18)$$

と求められる。

$P_m'(s)$ はシステムの零多項式であり⁴⁾、行列 K によって不変である。したがって、零点への到着角もまた、 K^{-1} により $\xi(s)$ の極を配置し直すことによって変更できる。

3. あとがき

ここで示した手法は、多変数システムの根軌跡を、近似的に1入出力システムの根軌跡に帰着させるものであり、古典的手法を利用できるという意味で有用で、特に、出発角を変更できることは、虚軸に近い所に極をもつシステムの安定化など、多変数制御系の設計に有力な手段を与えるものと思われる。ただし、 $g(s)$ あるいは $\xi(s)$ のある極と零点が一致する場合には、対応する近似根軌跡は求められない。

参考文献

- 1) B. Kouvaritakis and U. Shaked: Asymptotic Behaviour of Root-Loci of Linear Multivariable Systems, Int. J. Control, **23**-3, 297/340 (1976)
- 2) U. Shaked: The Angles of Departure and Approach of the Root-Loci in Linear Multivariable Systems, Int. J. Control, **23**-4, 445/457 (1976)
- 3) I. Postlethwaite: The Asymptotic Behaviour, the Angles of Departure, and the Angles of Approach of the Characteristic Frequency Loci, Int. J. Control, **25**-5, 677/695 (1977)
- 4) B. Kouvaritakis and A. G. J. MacFarlane: Geometric Approach to Analysis and Synthesis of System Zeros, Int. J. Control, **23**-2, 149/166, 167/181 (1976)
- 5) 児玉, 須田: システム制御のためのマトリクス理論, p. 43~, p. 104, 計測自動制御学会 (1978)