リーマン幾何モデルを用いた非線形 レギュレータの一設計法[†]

井 沢 義 明*・箱 守 京次郎*

Design of Nonlinear Regulators Using Riemannian Geometric Model

Yoshiaki IZAWA* and Kyojiro HAKOMORI*

A method for designing a nonlinear state regulator is presented. The method consists of the following steps: (1) finding a fictitious linear system which is homeomorphic to a given nonlinear plant, (2) designing an optimal state regulator for the above linear system, and (3) constructing the nonlinear state regulator having the same topological structure as the above designed optimal state regulator. Control laws are derived in terms of the homeomorphism.

To describe the homeomorphism, a Riemannian geometric model, based on the idea that in the state space a nonlinear system referred to appropriate curvilinear coordinates will behave as a linear system, is developed. Equations which determine the curvilinear coordinate system are also derived.

Numerical examples are given to demonstrate the usefulness of the method.

1. ま え が き

線形最適レギュレータは、フィードバック構成となり、また漸定安定性も保証されることから、実際のプラントの設計ではしばしば利用されている。

制御対象が非線形の場合にも、このような性質をもった状態レギュレータを実現しようとする試みがこれまでにもなされてきたが、最適化の過程において2点境界値問題を解く必要が生じ、工夫が必要となる。

Rhoten と Mulholland¹⁾ は変形した2次形式評価関数を用いて、また大久保と北森²⁾は制御系の記述にテンソル積を用いることによって、2点境界値問題を解くことなく、非線形レギュレータを構成している。

本研究では、リーマン幾何学のモデルを用いて、2点境界値問題を解くことなく、非線形レギュレータを構成する。具体的には、非線形系の解軌道で構成される多様体（解多様体）と、ある特定の線形系の解多様体との間に同相写像が存在する条件を明らかにすることによって、線形系側で構成した最適レギュレータと位相構造の等しい状態レギュレータを非線形系側に構成しようとするものである。なお、この過程においては、非線形系に対する最適化を直接行わないが、位相構造が等しいことから、線形系側の2次形式評価関数に対応する非線形系側の評価関数が存在し、具体的な形も求まる。

この同相写像の考えに近いものとして、連続群の考えがあるが、非線形系の可制御性に関する代数的性質の研究^{3),4)}などと異なり、設計問題を取り扱うには必ずしも便利とは考えられない。本論文では、同相写像を直接用いることとし、リーマン幾何学、テンソル解析を用いる。

2. 設計方針とシステム記述の考え方

制御対象が

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (1)$$

で与えられる非線形系については、直接(1)式の最適化を考えるのではなく、動作点のまわりで線形化して得たつぎの形の線形系

$$\dot{X} = AX + BU \quad (2)$$

を考え、これについて線形最適レギュレータを設計し、(1)式に適用することがしばしば行われている。実際、狭い動作領域を考えるかぎり、この方法はたいへん有効である。しかし、化学プラントのスタートアップのような、広い領域の動作も考慮する場合には、(2)式は、たとえば

$$\dot{x} = a(x, u)x + b(x, u)u \quad (3)$$

のような非線形系として記述されることになり、線形

[†] 第21回自動制御連合講演会で発表(昭53・11)

* 東北大学工学部 仙台市荒巻字青葉

* Faculty of Engineering, Tohoku University, Sendai
(Received November 12, 1979)

(Revised March 31, 1980)

Fig. 1 Fundamental idea for deriving Riemannian geometric model

レギュレータ理論は直接は適用不可能となる。

これに対し本論文では、まず全動作領域にわたって非線形系(3)式と対をなす、(2)式の形の一つの線形系を想定する。

Fig. 1で、直交直線座標系 (X^i) , $i=1, \dots, n$ を用いて線形系(2)式の解軌道を表示すると、(a)のようになるでしょう。もしこの解軌道を(b)のような適当な曲線座標系 (x^i) , $i=1, \dots, n$ で観測したとすると、それはあたかも(c)のように非線形系として観測される。逆に、非線形系も適当な曲線座標系を使えば、線形系として観測可能となる。

このような考えに基づいて(2)式と(3)式間の変換条件を明らかにし、この条件のもとで(2)式に対する線形最適レギュレータの設計を通して(3)式に対する非線形状態レギュレータを設計していく。

上記の目的を達成するために、システム方程式を座標変換に対して不変な形で記述したうえで、非線形系と線形系との間に成立すべき座標変換の関係を明らかにしていく。

すなわち、それぞれの系に対して解軌道の束(解多様体)を考え、この上の各点において、この解多様体に付けられた曲線座標系(直交座標系を含む)の接ベクトルを基底ベクトルとする接空間を考え、そのうえでテンソルを定義し、これを利用してシステム方程式を記述する。さらに非線形系と線形系の解多様体が同相になるような写像を定めていく。以下、これらの目的に適したリーマン幾何学の手法を用いる。

3. リーマン幾何モデル

状態ベクトルの張る空間と操作量ベクトルの張る空

間の直和で構成された空間において制御対象を記述する。

曲線座標系で表示された状態ベクトルおよび操作量ベクトルをそれぞれ x, u とし、直交座標系でのそれらを X, U とし

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$\tilde{X} = \begin{pmatrix} X \\ U \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$\tilde{\alpha}(\tilde{x}) = \begin{pmatrix} a(x, u) & b(x, u) \\ f(x, u) & g(x, u) \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A & B \\ F & G \end{pmatrix} \quad (7)$$

なる記号を用いると、非線形系(3)式および対応する線形系(2)式は、上記の空間のなかでそれぞれ

$$d\tilde{x}/dt = \tilde{\alpha}(\tilde{x}) \cdot \tilde{x} \quad (8)$$

$$d\tilde{X}/dt = \tilde{A} \cdot \tilde{x} \quad (9)$$

と表示される。ただし、 F, G は任意の定係数行列、 $f(x, u), g(x, u)$ は任意の関数行列であるが、これらの具体的な形については4章で述べる。また $x, X \in R^n$, $u, U \in R^m$, $a(x, u), A \in R^{n \times n}$, $b(x, u), B \in R^{n \times m}$, $f(x, u), F \in R^{m \times n}$, $g(x, u), G \in R^{m \times m}$ とする。

座標変換の便宜上、線形系(9)式をテンソル方程式で表現しておこう。テンソルを n 次元ベクトル空間 V とその双対空間 V^* を用いて

$$\underbrace{V^* \times \dots \times V^*}_{r \text{ 個}} \times \underbrace{V \times \dots \times V}_{s \text{ 個}}$$

を定義域とする多重線形写像として定義する⁵⁾。この定義に基づき、反変 r 階共変 s 階のテンソル F を

$$[i_r + n(i_{r-1}-1) + n^2(i_{r-2}-1) + \dots + n^{r-1}(i_1-1),$$

$$j_s + n(j_{s-1}-1) + n^2(j_{s-2}-1) + \dots + n^{s-1}(j_1-1)]$$

成分が $F_{j_1, \dots, j_s}^{i_1, \dots, i_r}$ であるような $n^r \times n^s$ 行列で表示することにする。これにより、テンソル $(\tilde{A}^i_j)$ は (i, j) 成分が $\tilde{A}^i_j$ なる行列として表現できるので、(9)式は

$$\frac{d\tilde{x}^\mu}{dt} = \sum_{\nu=1}^{n+m} \tilde{A}^\mu_\nu \tilde{x}^\nu, \quad \mu=1, \dots, n+m \quad (10)$$

なるテンソル方程式で表示される(注1)。

《定理1》直交座標系 $(\tilde{X}^i)$, $i=1, \dots, n+m$ で記述された線形系

$$\frac{d\tilde{X}^\mu}{dt} - \sum_{\nu=1}^{n+m} \tilde{A}^\mu_\nu \tilde{X}^\nu = 0, \quad \mu=1, \dots, n+m \quad (11)$$

(注1) 通常のテンソル解析では、アインシュタインの総和の約束⁶⁾に従って $\sum_{\nu} \tilde{A}^\mu_\nu \tilde{x}^\nu$ を $\tilde{A}^\mu \cdot \tilde{x}$ と書くが、本論文では和の記号 $\sum$ は付けておくことにする。

を曲線座標系 $(\bar{x}^i)$, $i=1, \dots, n+m$ 上の方程式として表現すると、次式のようになる。

$$\frac{d\bar{x}^\rho}{dt} + \sum_{\gamma, \lambda} \left\{ \frac{\rho}{\gamma \lambda} \right\} \frac{d\bar{x}^\lambda}{dt} \bar{x}^\gamma - \sum_{\beta} \bar{a}^\rho_{\beta} \bar{x}^\beta = 0, \quad (\rho, \gamma, \lambda, \beta = 1, \dots, n+m) \quad (12)$$

ここに $\left\{ \frac{\rho}{\gamma \lambda} \right\}$ はクリストッフエル記号⁵⁾であり、

$$g_{ij} = \sum_h \frac{\partial \bar{x}^h}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial \bar{x}^h}{\partial \bar{x}^j}, \quad (i, j, h = 1, \dots, n+m) \quad (13)$$

で定義されるリーマン計量⁵⁾および

$$g^{ij} = \sum_h \frac{\partial \bar{x}^h}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial \bar{x}^h}{\partial \bar{x}^j} \quad (14)$$

を用いて次式のように定義される。

$$\left\{ \begin{matrix} h \\ i \ k \end{matrix} \right\} = \sum_j \frac{\partial \bar{x}^h}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial^2 \bar{x}^j}{\partial \bar{x}^k \partial \bar{x}^i}, \quad (i, j, h, k = 1, \dots, n+m)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_j g^{hj} \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial \bar{x}^k} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial \bar{x}^i} - \frac{\partial g_{ki}}{\partial \bar{x}^j} \right) \quad (15)$$

また

$$\bar{a}^\rho_{\beta} = \sum_{\mu, \nu} \frac{\partial \bar{x}^\rho}{\partial \bar{x}^\mu} \frac{\partial \bar{x}^\nu}{\partial \bar{x}^\beta} \bar{A}^\mu_{\nu} \quad (16)$$

(証明) テンソル方程式(11)式の $\bar{x}^\nu$ は、直交座標系 $(\bar{x}^i)$ での反変ベクトル $((1, 0)$ テンソル) であり、これに対応する曲線座標系 $(\bar{x}^i)$ での反変ベクトルを $\bar{x}^\beta$ とすると、テンソルの変換式⁵⁾より

$$\bar{x}^\nu = \sum_{\beta} \frac{\partial \bar{x}^\nu}{\partial \bar{x}^\beta} \bar{x}^\beta \quad (17)$$

となる。さらに(11)式に(17)式を代入すると

$$\sum_{\gamma} \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial \bar{x}^\gamma} \frac{d\bar{x}^\gamma}{dt} + \sum_{\gamma, \lambda} \frac{\partial^2 \bar{x}^\mu}{\partial \bar{x}^\gamma \partial \bar{x}^\lambda} \frac{d\bar{x}^\lambda}{dt} \bar{x}^\gamma - \sum_{\nu, \beta} \bar{A}^\mu_{\nu} \frac{\partial \bar{x}^\nu}{\partial \bar{x}^\beta} \bar{x}^\beta = 0 \quad (18)$$

となる。この両辺に $\partial \bar{x}^\rho / \partial \bar{x}^\mu$ を掛け整理すると

$$\frac{d\bar{x}^\rho}{dt} + \sum_{\mu, \lambda, \gamma} \frac{\partial \bar{x}^\rho}{\partial \bar{x}^\mu} \frac{\partial^2 \bar{x}^\mu}{\partial \bar{x}^\lambda \partial \bar{x}^\gamma} \frac{\partial \bar{x}^\lambda}{\partial \bar{x}^\gamma} \bar{x}^\gamma - \sum_{\mu, \nu, \beta} \frac{\partial \bar{x}^\rho}{\partial \bar{x}^\mu} \frac{\partial \bar{x}^\nu}{\partial \bar{x}^\beta} \bar{A}^\mu_{\nu} \bar{x}^\beta = 0 \quad (19)$$

となる。また $\bar{A}^\mu_{\nu}$ は直交座標系 $(\bar{x}^i)$ でのテンソルであり、これに対応する曲線座標系 $(\bar{x}^i)$ でのテンソルを $\bar{a}^\rho_{\beta}$ とすると、テンソルの変換式⁵⁾より(16)式が成り立つ。

(16)式を(19)式へ代入すると次式を得る。

$$\frac{d\bar{x}^\rho}{dt} + \sum_{\mu, \lambda, \gamma} \frac{\partial \bar{x}^\rho}{\partial \bar{x}^\mu} \frac{\partial^2 \bar{x}^\mu}{\partial \bar{x}^\lambda \partial \bar{x}^\gamma} \frac{d\bar{x}^\lambda}{dt} \bar{x}^\gamma - \sum_{\beta} \bar{a}^\rho_{\beta} \bar{x}^\beta = 0 \quad (20)$$

さらに(15)式から(12)式が得られる。(証明終)

(12)式は座標変換に対して不変であり(証明略)、このシステム方程式をリーマン幾何モデルとよぶことにする。

4. 同相写像

本章では、リーマン幾何モデル(12)式と非線形系(8)式が同一であると考えることによって、線形系(9)式の解多様体と非線形系(8)式の解多様体との間の同相写像を明らかにする。すなわち、曲線座標系の座標軸のゆがめ方を定める。

さて、反変 1 階共変 1 階のテンソル τ^ν_{β} , T^β_{ν} を

$$\tau^\nu_{\beta} = \partial \bar{x}^\nu / \partial \bar{x}^\beta \quad (21)$$

$$T^\beta_{\nu} = \partial \bar{x}^\beta / \partial \bar{x}^\nu \quad (22)$$

と定義すると(16), (17)式は以下のようになる。

$$\bar{a}^\rho_{\beta} = \sum_{\mu, \nu} T^\rho_{\mu} \cdot \bar{A}^\mu_{\nu} \cdot \tau^\nu_{\beta} \quad (23)$$

$$\bar{x}^\nu = \sum_{\beta} \tau^\nu_{\beta} \cdot \bar{x}^\beta \quad (24)$$

$$\bar{x}^\beta = \sum_{\nu} T^\beta_{\nu} \cdot \bar{x}^\nu \quad (25)$$

なお、3章で述べたテンソルの行列表現の定義に従い τ^ν_{β} を行列表現すると、(24)式より $\tau = (\tau^\nu_{\beta})$ は $\tau: \bar{x} \rightarrow \bar{x}$ なる写像と考えることができる。同様に(25)式より $T = (T^\beta_{\nu})$ は τ の逆写像と考えることができ、 $T: \bar{x} \rightarrow \bar{x}$ となる。

ここで写像 τ を $\tau_{11} \in R^{n \times n}$, $\tau_{12} \in R^{n \times m}$, $\tau_{21} \in R^{m \times n}$, $\tau_{22} \in R^{m \times m}$ を用いて、次式で表わすことにする。

$$\tau = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} \\ \tau_{21} & \tau_{22} \end{pmatrix} \quad (26)$$

写像 $\tau = T^{-1}$ が存在し、かつこれが連続写像になるなら、この写像は同相写像になる⁵⁾。このとき(11)式の解多様体は(12)式の解多様体に同相であるとよぶことにする。

《定理 2》 非線形系

$$\frac{d\bar{x}^\mu}{dt} = \sum_{\nu=1}^{n+m} \bar{\alpha}^\mu_{\nu}(\bar{x}) \cdot \bar{x}^\nu \quad (\mu=1, \dots, n+m) \quad (27)$$

の解多様体が、線形系

$$\frac{d\bar{x}^\mu}{dt} = \sum_{\nu=1}^{n+m} \bar{A}^\mu_{\nu} \cdot \bar{x}^\nu \quad (\mu=1, \dots, n+m) \quad (28)$$

の解多様体と同相になる必要十分条件は、1 階偏微分方程式

$$\sum_{\lambda=1}^{n+m} \frac{\partial \tau^\lambda_{\nu}}{\partial \bar{x}^\lambda} \left(\sum_{\beta=1}^{n+m} \bar{\alpha}^\lambda_{\beta} \bar{x}^\beta \right) = \sum_{l=1}^{n+m} \bar{A}^\lambda_{\nu} \tau^\lambda_l - \sum_{\rho=1}^{n+m} \tau^\lambda_{\rho} \bar{\alpha}^\rho_{\nu}, \quad (\gamma, \nu=1, \dots, n+m) \quad (29)$$

が正則で連続な解 τ (同相写像) をもつことである。

(証明) (24)式より定まる写像 τ が正則で連続な写像となることが、リーマン幾何モデル(12)式の解多様体が線形系(28)式の解多様体と同相になるための必要十分な条件である。それ故、非線形系(27)式の解多様体と線形系(28)式の解多様体が同相となるためには、

写像 τ がその条件を満たし、さらに非線形系 (27) 式の解多様体とリーマン幾何モデル (12) 式の解多様体が同一になることが、したがって (27) 式と (12) 式が一致することが、必要十分である。

さて、(12) 式は和の順番を入れかえると

$$\frac{d\tilde{\chi}^\rho}{dt} = \sum_\nu \left(\tilde{a}^\rho_\nu - \sum_\lambda \left\{ \frac{\rho}{\nu \lambda} \right\} \frac{d\tilde{\chi}^\lambda}{dt} \right) \tilde{\chi}^\nu \quad (30)$$

となるから、(27) 式と (30) 式を等しいとして

$$\tilde{a}^\rho_\nu(\tilde{\chi}) - \sum_\lambda \left\{ \frac{\rho}{\nu \lambda} \right\} \cdot \frac{d\tilde{\chi}^\lambda}{dt} = \tilde{a}^\rho_\nu(\tilde{\chi}) \quad (31)$$

を得る。一方、(21)、(22) 式を用いて (15) 式を整理すると

$$\left\{ \frac{\rho}{\nu \lambda} \right\} = \sum_j T^{\rho}_j \cdot \frac{\partial \tau^j_\nu}{\partial \tilde{\chi}^\lambda} \quad (32)$$

となる。(23)、(32) 式を (31) 式へ代入し

$$\sum_\rho \tau^j_\rho \cdot T^{\rho}_i = \delta^j_i \quad (33)$$

を考慮すると次式を得る。

$$\sum_\lambda \frac{\partial \tau^j_\nu}{\partial \tilde{\chi}^\lambda} \cdot \frac{d\tilde{\chi}^\lambda}{dt} = \sum_\delta \tilde{A}^j_\delta \cdot \tau^j_\delta - \sum_\rho \tau^j_\rho \cdot \tilde{a}^\rho_\nu(\tilde{\chi}) \quad (34)$$

さらに (27) 式より (29) 式を得る。(証明終)

この τ を用いると計量テンソルは (13)、(21) 式より

$$g_{ij}(\tilde{\chi}) = \sum_{k,l} \delta_{kl} \cdot \tau^k_i(\tilde{\chi}) \cdot \tau^l_j(\tilde{\chi}) \quad (35)$$

となり、 $\tilde{\chi}$ -空間内に場が定まる。これを状態計量場とよび、(29) 式を同相写像の式とよぶことにする。

さて、制御系を設計する場合、(29) 式で与えられる同相写像が唯一に定まるように a, b, f, g は唯一に定まっている必要がある。 a, b については制御対象の式より定まるが、操作量に関する f, g については操作量は自由に選ぶことができるので、唯一には定まらない。

本論文では、 U の張る空間 S_U 内で自由に選んだ操作量 $U^* = \text{const.}$ が、 u の張る空間 S_u 内で $u^* = U^* = \text{const.}$ として表現されるように、あらかじめ空間 S_U と空間 S_u の間に対応関係を定めておく。具体的には解軌道を覆う各局所座標近傍内で任意の定ベクトル $u^* = U^* = \text{const.}$ となるように

$$f = F = 0, \quad g = G = 0 \quad (36)$$

(すなわち $\dot{u} = \dot{U} = 0$)、かつ (24)、(26) 式より定まる

$$U = \tau_{21}x + \tau_{22}u \quad (37)$$

なる関係において、 $U = u$ となるように、 $\tau_{21} = 0$ 、 $\tau_{22} = I_m$ と定めることにする。

5. 非線形レギュレータの構成

本章では、同相写像の考えを応用して、線形最適レ

ギュレータと同相な非線形状態レギュレータを構成する。線形最適レギュレータについては、線形系

$$dX/dt = AX + BU, \quad X \in R^n, \quad U \in R^m \quad (38)$$

に対して、 Q を準正値、 R を正値としたとき、

$$J = \frac{1}{2} \int_0^\infty (X' Q X + U' R U) dt \quad (39)$$

なる評価関数を最小にする最適制御則が

$$A'S + SA - SBR^{-1}B'S + Q = 0 \quad (40)$$

なる Riccati 方程式の解 S を用いて

$$U = -KX \quad (41)$$

$$K = R^{-1}B'S \quad (42)$$

として与えられる⁷⁾。ただし ' は転置記号。以下、これをもとに非線形状態レギュレータを構成する。

《定理 3》 操作量が

$$u = -(\tau_{22} + K\tau_{12})^{-1}(\tau_{21} + K\tau_{11})x \quad (43)$$

で与えられ、かつ同相写像の (29) 式が正則で連続な解をもつなら、非線形制御対象

$$\frac{dx^\rho}{dt} - \sum_{\nu=1}^n a^\rho_\nu(x, u) \cdot x^\nu - \sum_{\lambda=1}^m b^\rho_\lambda(x, u) \cdot u^\lambda = 0 \quad (44)$$

は線形最適レギュレータ

$$\frac{dX^\rho}{dt} - \sum_{\nu=1}^n \left(A^\rho_\nu - \sum_{\lambda=1}^m B^\rho_\lambda \cdot K^\lambda_\nu \right) X^\nu = 0 \quad (45)$$

と同相になり、かつ漸近安定となる。

(証明) 線形最適レギュレータは、 $\tilde{\chi}$ -空間で

$$\tilde{\chi}_{\text{opt}} = \begin{pmatrix} X \\ U_{\text{opt}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ -KX \end{pmatrix}, \quad K = R^{-1}B'S \quad (46)$$

と表わされるので、(24)、(26) 式より

$$\begin{pmatrix} X \\ -KX \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} \\ \tau_{21} & \tau_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} \quad (47)$$

となる。この式を整理すると (43) 式が得られる。

つぎに、この非線形状態レギュレータの漸近安定性について調べる。まず直交座標系 ($\tilde{\chi}'$) および曲線座標系 ($\tilde{\chi}''$) の原点をそれぞれ $\bar{o}$ および $\bar{o}'$ とする。時刻 t_n を $t_0 = 0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \leq t_{n+1} \leq \dots$ とし、 $\tilde{\chi}_n = \tilde{\chi}(t_n)$ と定めると線形最適レギュレータが漸近安定となることから、次式が得られる。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\chi}_n = \bar{o} \quad (48)$$

また、 $\lim_{n \rightarrow \infty} T(\tilde{\chi}_n)$ は正則で連続な写像であるから

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T(\tilde{\chi}_n) \cdot \bar{o} = \bar{o}' \quad (49)$$

となる。したがって、(48)、(49) 式より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\chi}_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \{T(\tilde{\chi}_n) \cdot \tilde{\chi}_n\} = \bar{o}' \quad (50)$$

となる。(証明終)

6. 同相写像の唯一決定条件

本章では、同相写像が唯一に定まる条件について検討する。

(29) 式を直接取り扱うかわりに、その特性方程式

$$\frac{d\tilde{x}^\rho}{dt} = \sum_{\nu=1}^{n+m} \tilde{\alpha}^\rho_\nu(\tilde{x}) \cdot \tilde{x}^\nu \quad (\rho=1, \dots, n+m) \quad (51)$$

$$\frac{d\tau^\rho}{dt} = \sum_{l=1}^{n+m} \bar{A}^\rho_l \cdot \tau^l - \sum_{\rho=1}^{n+m} \tau^\rho \cdot \tilde{\alpha}^\rho_\nu \quad (52)$$

について考察する。ただし $\gamma, \nu=1, \dots, n+m$ 。

《定理 4》 $\tilde{\alpha}(\tilde{x})$, $\partial\tilde{\alpha}(\tilde{x})/\partial\tilde{x}$ が領域 $\Gamma(t, \tilde{x})$ で連続なら、領域 Γ の任意の点 $(t_0, \tilde{x}_0)$ と任意の正則行列 τ_0 に対して、(51) 式は唯一な連続解 $\tilde{x}=\varphi(t)$ をもち、(52) 式は次式で定まる唯一な同相写像 τ をもつ。

$$\tau(t) = \{\exp(\bar{A}(t-t_0))\} \cdot \tau_0 \cdot \{\exp(-\tilde{\alpha}(\tilde{x})(t-t_0))\} \quad (53)$$

ここに $\varphi(t_0)=\tilde{x}_0$, $\tau_0=\tau(t_0)$ である。

(証明) $\tilde{\alpha}(\tilde{x})$, $\partial\tilde{\alpha}(\tilde{x})/\partial\tilde{x}$ が $\tilde{x}$ に関して連続なら、(51) 式の右辺およびその $\tilde{x}$ に関する偏導関数は、 $\tilde{x}$ に関して連続となる。このとき (52) 式はクロネッカーの記号 δ^ν_ρ を用いて

$$\frac{d\tau^\rho}{dt} = \sum_{\lambda} \left\{ \bar{A}^\rho_\lambda - \sum_{\rho, \nu} \delta^\nu_\rho \cdot \delta^\nu_\lambda \cdot \tilde{\alpha}^\rho_\nu(\tilde{x}) \right\} \cdot \tau^\lambda(\tilde{x}) \quad (54)$$

と表示されるので、その右辺および右辺の τ に関する偏導関数もまた τ に関して連続となる。したがって、常微分方程式の解の存在と唯一性の条件⁹⁾より、(51) 式および (52) 式は唯一な連続解をもつ。特に (52) 式は直接代入してみればわかるように、(53) 式なる解をもつ。さらにこれが同相写像となるためには、解 (53) 式が正則となる必要がある。これについては、任意の行列 M に対して指数関数 $\exp(M(t-t_0))$ が常に正則となること、および τ_0 が正則という仮定より明らか。

(証明終)

7. 評価関数値

5 章で構成した非線形レギュレータを、制御対象 (44) 式に対する最適制御系とみた場合の評価関数について調べてみる。

2 次形式評価関数 (39) 式は、(5) 式を用いると

$$J = \frac{1}{2} \int_0^\infty \tilde{x}' \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix} \tilde{x} dt \quad (55)$$

となるが、この量はスカラーであり同相写像によって変化しない。それ故、(55) 式へ (24) 式を代入した

$$J = \frac{1}{2} \int_0^\infty \tilde{x}' \tau' \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix} \tau \tilde{x} dt \quad (56)$$

がこの場合の評価関数となる。

一方、定理 4 より非線形系 (27) の解軌道に沿って (29) 式の解は

$$\tau = \exp \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ F & G \end{pmatrix} (t-t_0) \right\} \cdot \tau_0 \cdot \exp \left\{ - \begin{pmatrix} a(x, u) & b(x, u) \\ f(x, u) & g(x, u) \end{pmatrix} (t-t_0) \right\} \quad (57)$$

となるので、求める評価関数は (56) 式に (57) 式を代入したものである。

8. 初期条件とアルゴリズム

定理 3 を用いて具体的に非線形状態レギュレータを構成するアルゴリズムを考える。

(43) 式の操作量を実現するには、同相写像の式 (29) を解く必要があるが、その特性方程式 (51), (52) を考えれば、非線形レギュレータの解軌道に沿ってつぎの微分方程式を解けば十分である。

$$\frac{d\tau}{dt} = \begin{pmatrix} A & B \\ F & G \end{pmatrix} \tau - \tau \begin{pmatrix} a(x, u) & b(x, u) \\ f(x, u) & g(x, u) \end{pmatrix} \quad (58)$$

その際の初期条件については、初期点は同相写像における一つの不動点であり、かつ $\tilde{x}$ -空間、 $\tilde{x}$ -空間の軌道が同点において接すると考えることによって

$$\tau_0 = \tau(t_0) = I_{n+m} \quad (59)$$

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} A & B \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(x_0, u_0) & b(x_0, u_0) \\ f(x_0, u_0) & g(x_0, u_0) \end{pmatrix} = \tilde{\alpha}(\tilde{x}_0) \quad (60)$$

と定めることにする (Fig. 2 参照)。

したがって、仮定の線形系 (9) 式の $\bar{A}$ の選定に依存する。また、 F, G, f, g については 4 章での議論に基づき、(36) 式の関係に従うことにするので、(58) 式は

$$\frac{d\tau}{dt} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \tau - \tau \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (61)$$

となる。非線形状態レギュレータを構成するためのアルゴリズムを Fig. 3 に示す。

Fig. 2 Boundary conditions for eq. (52)

Fig. 3 Flow chart for calculating u_{opt}

9. 数 値 例

【例題 1】 次式の操作量飽和のある系を考える.

$$\dot{x}^1 = x^2$$

$$\dot{x}^2 = -(1/T) \cdot x^2 + (K/T) \cdot \tanh(u)$$

この場合 $\tilde{\alpha}(\tilde{x})$ は

$$\tilde{\alpha}(\tilde{x}) = \begin{pmatrix} a & b \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1.0 & 0 \\ 0 & -1/T & (K/T) \tanh(u)/u \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となり, $\bar{A}$ は $\tilde{x} = \tilde{x}_0 = (x_0^1, x_0^2, 0)'$ を $\tilde{\alpha}(\tilde{x})$ へ代入して

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} A & B \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1.0 & 0 \\ 0 & -1/T & K/T \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる. きざみ幅 $\Delta=0.01$, $K=10.0$, $T=1.0$, 重み行列が $Q=I_2$, $R=I_1$ の場合の $\tilde{x}$ -空間での状態軌道を Fig. 4 に示す.

【例題 2】 操作量飽和のある双線形システム

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.459 & 0.180 \\ 0.0633 & -0.174 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (-x^1 + 20.0) \tanh(u) \\ 0 \end{pmatrix}$$

を考える. この場合 $\tilde{\alpha}(\tilde{x})$ は

$$\tilde{\alpha}(\tilde{x}) = \begin{pmatrix} -0.459 & 0.180 & (-x^1 + 20.0) \tanh(u)/u \\ 0.0633 & -0.174 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となり, $\bar{A}$ は $\tilde{x} = \tilde{x}_0 = (x_0^1, x_0^2, 0)'$ を $\tilde{\alpha}(\tilde{x})$ へ代入し

Fig. 4 Trajectories of nonlinear regulator for example 1

Fig. 5 Trajectories of nonlinear regulator for example 2

て

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} -0.459 & 0.180 & -x_0^1 + 20.0 \\ 0.0633 & -0.174 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる. $\Delta=0.01$, $Q=I_2$, $R=I_1$ の場合の $\tilde{x}$ -空間での状態軌道を Fig. 5 に示す.

Fig. 4, Fig. 5 は, 曲線座標系のかわりに通常の表現に従い直交座標系で表示してある. さらに, 空間のゆがみを表示する目的で, 同相な線形系の状態空間に付いた直交座標軸を $T=c^{-1}$ を計算することによって $\tilde{x}$ -空間に写し出している (座標軸の方向のみ).

10. 結 論

座標変換に対して不変なリーマン幾何モデル(12)および同相写像の式(29)を導き, これらを用いて滑らかな非線形制御対象(3)式に対してこれと同相な一つの線形系を想定し, この線形系に構成した線形最適レギュレータと位相構造の等しい状態レギュレータを非線

形系側に構成することを提案し、操作量(43)式を導いた。

本レギュレータは、線形レギュレータのフィードバック係数の計算の他に、同相写像を定める(61)式を計算するだけで構成できるので、計算が容易である。さらに(3)式の制御対象を取り扱っているので、比較的広範な系に応用できる。また数例値を通して、本レギュレータのもつフィードバック制御構造および漸近安定性の保証などの特質を確認した。

最後に、有益なご意見を戴いたご校閲の方々に深く感謝いたします。

参 考 文 献

- 1) R. P. Rhoten and R. J. Mulholland: Optimal Regulation of Non-Linear Plants, Int. J. of Control, **10**, 707/718 (1974)
- 2) 大久保, 北森: 非線形レギュレータの構成, 計測自動制御学会論文集, **11**-5, 541/549 (1975)
- 3) R. W. Brockett: System Theory on Group Manifolds and Coset Spaces, SIAM J. Control, **10**, 265/284 (1972)
- 4) 伊藤, 早川: 非線形システムの可制御性, 計測と制御, **16**-12, 891/900 (1977)
- 5) 石原: 初等リーマン幾何, 1~3 章, 森北出版 (1974)
- 6) ポントリャーギン: 常微分方程式, 共立出版 (1967)
- 7) M. Athans and P. L. Falb: Optimal Control, McGraw-Hill (1966)