伝達関数で記述された未知入力オブザーバ、 モデル適合問題の一解法[†]

疋 田 弘 光*

A Solution of an Exact Model Matching Problem and an Unknown Input Observer by Transfer Function Approach

Hiromitsu HIKITA*

The exact model matching problem described by transfer function matrices is investigated and the problem of observing a set of linear functions of system states from the system outputs only is also discussed by using the duality of the exact model matching problem. The properties of a minimal basis determined by the plant and model transfer function matrices are studied and are applied to obtain an algorithm for the design of a low order compensator (observer) with arbitrary poles. An example is given in order to illustrate the usefulness of the algorithm.

Furthermore, an observer which uses partial plant inputs is considered so that fixed poles which often generate in the unknown input observer are eliminated.

1. ま え が き

モデル適合問題は、プラントに補償器を結合し、トータルの伝達関数行列を希望モデルの伝達関数行列と一致させるように補償器を設計する問題であるといえることができる。したがって、これは種々の制御問題を包括した基本的な設計問題であると考えられる。これを伝達関数で展開した研究^{1)~5)}には、補償器の存在や最小次元での実現について検討したもの³⁾、さらに安定条件を付与したもの^{4), 5)}などがある。このうち W. A. Wolovich ら⁴⁾の方法は、任意極配置が可能で実際の制御に有効と思われるが、一般に補償器が高次になる難点がある。また、R. W. Scott ら⁵⁾の方法は、補

償器の次元決定と安定化のために未知パラメータを含むしらみつぶしの計算が必要であり、実用範囲に限られると思われる。

本論文では、まずプラントとモデルの伝達関数行列から決まる多項式行列に注目し、この行が張る空間とその双対空間が補償器の構成にどのように関係するかを考察する。さらにその空間の基底の次数などを解析し、結果を補償器の低次元化および任意極配置に応用し、上記の欠点を克服した設計法を導出する。

一方、モデル適合問題においてプラントと補償器の結合関係を逆にすると、これはプラント入力を用いない(未知入力)オブザーバ^{6)~9)}の問題に変換される。したがって、双対関係を利用し、本論文で得られたモデル適合問題の結果を未知入力オブザーバの設計に適用できることを示し、さらにこのオブザーバに生じることがある固定極をプラント入力の部分的な活用により解消する方法を提案する。

2. 準 備

本論文で利用する有理関数行列、多項式行列に関する事柄を簡単に整理しておく。なお詳細については他の文献を参照されたい^{1), 6), 10)~12)}。

$\mathcal{F}(s)$ を実係数をもつ s の有理関数の体、 $\mathcal{F}[s]$ を実係数をもつ s の多項式の環とする。 $M(s)$ を $p \times m$ の多項式行列、つまり要素が $\mathcal{F}[s]$ 内にある行列とする。 $M(s)$ の各列(行)について、その列(行)に含まれる s の最高次の係数だけを残し、他を零としてできる定数行列を $M(s)$ の最高次係数行列といい、 $\Gamma_*[M(s)]$ ($\Gamma_*[M(s)]$) で表わす。 $\Gamma_*[M(s)](\Gamma_*[M(s)])$ の階数が $\min\{p, m\}$ に等しい場合 $M(s)$ は列(行)プロパーであるといわれる。

$p \times m$ 有理関数行列 $M(s)$ が階数 $p(\leq m)$ をもてば $M(s)$ の各行は $\mathcal{F}(s)$ 上でベクトル空間 V の基底を構

[†] 第8回制御理論シンポジウムで一部発表(昭54・5)
第18回計測自動制御学会学術講演会で一部発表
(昭54・8)

* 室蘭工業大学 室蘭市水元町 27-1

* Muroran Institute of Technology, Muroran
(Received November 22, 1979)
(Revised February 1, 1980)

成すると考えられる。また $\mathcal{F}(s)$ 上の双対空間 $V^\perp$ は $M(s)k(s)=0$ を満たす m 次元の有理関数列ベクトル $k(s)$ から作られ、互いに1次独立な $m-p$ 本の列ベクトルがその基底となる。これらをまとめ $m \times (m-p)$ 行列 $K(s)$ とすると、当然 $M(s)K(s)=0$ が成り立つ。以下では各行(列)が $V(V^\perp)$ の基底である行列を便宜的に基底という。

$\mathcal{F}(s)$ 上の $V(V^\perp)$ の主基底 (prime basis) とは、各列(行)が互いに左(右)素である $p \times m(m \times (m-p))$ 多項式行列 $M(s)(K(s))$ と定義される。同じく $V(V^\perp)$ の最小基底 (minimal basis) とは、行(列)プロパーな主基底と定義される。 $\nu_i \triangleq \partial_{r_i}[M(s)]$ ($\mu_i \triangleq \partial_{c_i}[K(s)]$) は多項式行列 $M(s)(K(s))$ の第 i 行(列)に含まれる s の最高次数、つまり行(列)次数 (row (column) degree) を表わすとする。最小基底が $\nu_1 \leq \nu_2 \leq \dots \leq \nu_p$ ($\mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_{m-p}$) を満たしていればそれを次数順 (degree ordered) 最小基底という。

3. 補償器の基本構成

プラント $T_1(s)$ をモデル $T_2(s)$ に適合させるための補償器を $T(s)$ とする。つまり

$$T_1(s)T(s)=T_2(s) \quad (1)$$

ここで、 $T_1(s)$ 、 $T_2(s)$ 、 $T(s)$ はそれぞれ $p \times m$ 、 $p \times q$ 、 $m \times q$ の伝達関数行列とし、 $\text{rank } T_1(s)=p$ ($p < m$) とする。 $p \times (m+q)$ 行列

$$G(s)=[T_1(s) : -T_2(s)] \quad (2)$$

の最小基底を

$$M(s)=[M_m(s) : -M_q(s)] \quad (3)$$

とする。ただし、 $M_m(s)$ 、 $M_q(s)$ はそれぞれ $p \times m$ 、 $p \times q$ の多項式行列である。 $(m+q) \times (m+q-p)$ の多項式行列 $K(s)$ は $\ker M(s)$ の次数順、最小基底を構成しているとし、

$$K(s)=\begin{bmatrix} K_m(s) \\ \vdots \\ K_q(s) \end{bmatrix} \quad (4)$$

と表わす。ただし $K_m(s)$ 、 $K_q(s)$ はそれぞれ $m \times (m+q-p)$ 、 $q \times (m+q-p)$ 行列である。また、

$$\Gamma_c[K(s)]=\begin{bmatrix} K_{m7} \\ \vdots \\ K_{q7} \end{bmatrix} \quad (5)$$

とすると、文献3, 4よりつぎの定理が成り立つ。なお、ダッシュ“'”は行列の転置を表わすとする。

《定理1》 (1)式を満足するプロパーな最小次元の補償器 $T(s)$ が存在する必要十分条件は

$$\text{rank}[K_{q7}]=q \quad (6)$$

が成立することである。また、 K_{q7} の1次独立な列を左側から順に q 本選び、その列に対応する $K(s)$ の q

本の列を $[R'(s) : P'(s)]'$ とすれば、プロパーな最小次元の $T(s)$ は

$$T(s)=R(s)P^{-1}(s) \quad (7)$$

で与えられる。なお、 $T(s)$ の次元は $[R'(s) : P'(s)]'$ の全列次数の和となる。

この定理では、 $T(s)$ の安定性について何も言及していない。 $\det P(s)=0$ の根がすべて左半平面にあれば安定な補償器が得られるが、そうでない場合、もしくは安定であっても他の極配置をもつ補償器が望まれる場合は、極配置も考慮に入れた議論が必要になる。

そこで、以下で $M(s)$ とその双対の最小基底 $K(s)$ が補償器の構成にどのように関連するかを検討する。希望の極配置をもつ補償器を右既約分解形 $T(s)=R_c(s)P_c^{-1}(s)$ で表わすと、(1)式より

$$T_1(s)R_c(s)P_c^{-1}(s)=T_2(s) \quad (8)$$

$$\therefore M(s)\begin{bmatrix} R_c(s) \\ \vdots \\ P_c(s) \end{bmatrix}=0 \quad (9)$$

であるので、 $[R_c'(s) : P_c'(s)]'$ の列空間は $\ker M(s)$ に含まれねばならず、 $[R_c'(s) : P_c'(s)]'$ の各列は $K(s)$ の列の1次結合であることがわかる。したがって、 $[R_c'(s) : P_c'(s)]'$ の設計によって希望の $T(s)$ を得るためには、 $K(s)$ の列をいかに1次結合するかということに帰着される。これは $M(s)$ の双対空間での設計ということができる。

また、 $[R_c'(s) : P_c'(s)]'$ は階数 q の $(m+q) \times q$ 多項式行列、 $M(s)$ は階数 p の $p \times (m+q)$ 多項式行列であるから

$$\begin{bmatrix} M(s) \\ \vdots \\ M_c(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_c(s) \\ \vdots \\ P_c(s) \end{bmatrix}=0 \quad (10)$$

を満たし、 $[M'(s) : M_c'(s)]'$ の階数が m となる $(m-p) \times (m+q)$ 多項式行列 $M_c(s)$ が存在する。 $m \times (m+q)$ 多項式行列 $[M'(s) : M_c'(s)]'$ の最小基底を

$$\bar{M}(s)=[\bar{M}_m(s) : -\bar{M}_q(s)] \quad (11)$$

とする。ただし、 $\bar{M}_m(s)$ 、 $\bar{M}_q(s)$ はそれぞれ $m \times m$ 、 $m \times q$ の多項式行列である。すると、

$$[\bar{M}_m(s) : -\bar{M}_q(s)] \begin{bmatrix} R_c(s) \\ \vdots \\ P_c(s) \end{bmatrix}=0 \quad (12)$$

より

$$T(s)=R_c(s)P_c^{-1}(s) \quad (13)$$

$$=\bar{M}_m^{-1}(s)\bar{M}_q(s) \quad (14)$$

(13)、(14)式はそれぞれ $T(s)$ の右既約分解形、左既約分解形を表わしていて、どちらに従っても同一の補償器が得られる。したがって、(14)式によって希望の $T(s)$ を求めるなら $M_c(s)$ をいかに設計するかという

問題に帰着される。

さらに上記の二つの問題を組み合わせた $T(s)$ の設計問題も考えることができる。階数 r の $(m+q) \times r$ 行列 $\tilde{K}(s)$ はその各列が $K(s)$ の列の 1 次結合であるとする。ただし、 $m+q-p > r \geq q$ 。すると、

$$\tilde{M}(s)\tilde{K}(s)=0 \quad (15)$$

を満足する各行が、互いに 1 次独立である $(m+q-r) \times (m+q)$ 多項式行列 $\tilde{M}(s)$ が存在する。適当な $(r-q) \times (m+q)$ 多項式行列 $\tilde{M}_c(s)$ を結合した階数 m の $m \times (m+q)$ 多項式行列 $[\tilde{M}'(s); \tilde{M}_c'(s)]'$ の最小基底をやはり $[\bar{M}_m(s); -\bar{M}_q(s)]$ とすると、補償器は

$$T(s)=\bar{M}_m^{-1}(s)\bar{M}_q(s) \quad (16)$$

となる。この手順には $\tilde{K}(s)$ と $\tilde{M}_c(s)$ の二つの設計問題が含まれている。本論文では補償器の構成法にこの考え方を採用し、第 5 章でこれら $\tilde{K}(s)$, $\tilde{M}_c(s)$ の決定法を導出する。

4. 最小基底に対する操作

前章で $T(s)$ の基本構成として最小基底に適当な行列を結合する方法が論じられたが、本章ではこれに関連し最小基底に行列を付加することによって、どのような事ができるのか解析する。

$\phi \geq \rho + \sigma$ とする。 $\rho \times \phi$ の最小基底 $H(s)$ に $\sigma \times \phi$ 多項式行列 $H_c(s)$ を結合し、 $(\rho + \sigma) \times \phi$ 多項式行列 $[H'(s); H_c'(s)]'$ を作ると、つぎの定理が成立する。

ただし $\sum_{i=1}^{\rho} \partial_{r_i}[H(s)] \geq \sigma$ とする。

《定理 2》 $H_c(s)$ の適当な設計により $[H'(s); H_c'(s)]'$ の (各列の) 最大共通左因子の行列式の次数を少なくとも ξ 次に行うことができる。ただし、 $\xi = \sigma + \sum_{i=1}^{\sigma} \partial_{r_i}[H_c(s)]$ である。また $\partial_{r_i}[H_c(s)]; i=1 \sim \sigma$ は任意に与えることができる。

(証明) $[H'(s); H_c'(s)]'$ の各列の最大共通左因子の行列式の ξ 個の根として相異なる任意の実数 $\lambda_j; j=1 \sim \xi$ を考える。 $H(s)$ の第 i 行を $h_{\eta_i} s^{\eta_i} + h_{\eta_i-1} s^{\eta_i-1} + \dots + h_{0i}$ とする。ただし、 $h_{\eta_i} \neq 0, h_{\eta_i-1}, \dots, h_{0i}$ はそれぞれ $1 \times \phi$ の定数行列であり、また $\eta_i = \partial_{r_i}[H(s)]$ である。同じく $H_c(s)$ の第 i 行を $\bar{h}_{\zeta_i} s^{\zeta_i} + \bar{h}_{\zeta_i-1} s^{\zeta_i-1} + \dots + \bar{h}_{0i}$ とする。ただし、 $\bar{h}_{\zeta_i} \neq 0, \bar{h}_{\zeta_i-1}, \dots, \bar{h}_{0i}$ をそれぞれ $1 \times \phi$ の未定の定数行列とし、また $\zeta_i = \partial_{r_i}[H_c(s)]$ とする。

$[H'(s); H_c'(s)]'$ の s に $\lambda_j; j=1 \sim \xi$ を代入すると、 λ_j に関する仮定から $\text{rank}[H'(\lambda_j); H_c'(\lambda_j)] < \rho + \sigma$ とならねばならない。したがって、スカラー $f_i^j; i=1 \sim \rho + \sigma, j=1 \sim \xi$ および $1 \times \phi$ 行列 $\bar{h}_k^i; k=0 \sim \zeta_i, i=1 \sim \sigma$ の値を適当に選択することにより次式が

成立しなければならない。

$$\sum_{i=1}^{\rho} f_i^j \left\{ \sum_{k=0}^{\eta_i} h_k^i (\lambda_j)^k \right\} + \sum_{i=1}^{\sigma} f_{\rho+i}^j \left\{ \sum_{k=0}^{\zeta_i} \bar{h}_k^i (\lambda_j)^k \right\} = 0 \quad ; j=1 \sim \xi \quad (17)$$

これは、 $f_i^j; i=1 \sim \rho + \sigma, j=1 \sim \xi$ を適当な値に固定すれば $\bar{h}_k^i; k=0 \sim \zeta_i, i=1 \sim \sigma$ に関する ξ 本の連立 1 次方程式である。また、 $\sum_{i=1}^{\sigma} (1 + \zeta_i) = \sigma + \sum_{i=1}^{\sigma} \zeta_i = \xi$ であるので、適当な $f_i^j; i=1 \sim \rho + \sigma, j=1 \sim \xi$ に対し、一意的に解を求めることができる (付録 1)。なお $f_i^j; i=1 \sim \rho + \sigma, j=1 \sim \xi$ をどのような値に定めても、特別な場合を除きほとんどすべての場合について解が存在することも明らかである。

また、 $\lambda_j; j=1 \sim \xi$ に重根や複素数を指定する場合も同様な結果を得ることができる。

以上より $[H'(s); H_c'(s)]'$ の (各列の) 最大共通左因子の行列式の根として $\lambda_j; j=1 \sim \xi$ を実現できることがわかる。□

さて、最小基底と最大共通左因子の関係からつぎのことがいえる。 $[H'(s); H_c'(s)]'$ の行次数の和と、 $[H'(s); H_c'(s)]'$ の最小基底の行次数の和を比べると少なくとも $[H'(s); H_c'(s)]'$ の (各列の) 最大共通左因子の行列式の次数だけ、最小基底のほうが小さくなる。したがって定理 2 が成立すると σ 次だけ $H(s)$ の行次数の和より $[H'(s); H_c'(s)]'$ の最小基底の行次数の和が低下することがわかる。

ところで、 $H_c(s)$ を部分的に任意に固定してもつぎのような定理 2 と同様な結果が成立する。

【系】 $H_c(s)$ は $\text{rank } \Gamma_r[[H'(s); H_c'(s)]] = \rho + \sigma$ を満足しているとする。 $\Gamma_r[[H'(s); H_c'(s)]]$ の $\rho + \sigma$ 本の 1 次独立な列に含まれる $H_c(s)$ の要素を上記の仮定に反しない範囲で任意に設定し、この $[H'(s); H_c'(s)]'$ の $\rho + \sigma$ 本の列から構成される $(\rho + \sigma) \times (\rho + \sigma)$ 行列の行列式の根の中から任意に ξ 個の根を選ぶ (複素根は共役で選ぶ)。すると、 $H_c(s)$ から上記の $\rho + \sigma$ 本の列を抜き去った残りの部分の設計により、これら ξ 個の根を $[H'(s); H_c'(s)]'$ の (各列の) 最大共通左因子の行列式の根とすることができる。ただし、この ξ 個の根の中には $H(s)$ の選ばれた $\rho + \sigma$ 個の列の最大共通左因子の行列式の根を含めない。

(証明) 定理 2 の証明では、(17) 式の $f_i^j; i=1 \sim \rho + \sigma, j=1 \sim \xi$ は、ほぼ任意に指定することができたが、ここでは $(\rho + \sigma) \times (\rho + \sigma)$ 行列の行列式の根として ξ 個が選ばれようと自動的に決まってしまう (重根が選ばれた場合は若干の自由度が存在する)。したがって、以下各 $1 \times \phi$ 行列 $\bar{h}_k^i; k=1 \sim \zeta_i, i=1 \sim \sigma$ の要

素のうちすでに決定されているものを除き、定理 2 の証明と同様にして $H_c(s)$ を求めることができる。□

この系より、仮定された $(\rho+\sigma)$ 列は自由に設定することができ、 $[H'(s):H_c(s)]'$ の行次数の和の低下とは独立に決めることができる。

ところで、 $H_c(s)$ のこの $(\rho+\sigma)$ 列の設計によって上記の系における $(\rho+\sigma)\times(\rho+\sigma)$ ブロック行列の行列式の根を任意に配置することができる。簡単のため $\phi=\rho+\sigma$ とする。 $\rho\times\phi$ の最小基底 $H(s)$ に $\sigma\times\phi$ 多項式行列 $H_c(s)$ を結合し、 $\phi\times\phi$ 多項式行列 $[H_c(s):H_c'(s)]'$ を作るとつぎの定理が成立する。

《定理 3》 $H(s)$ の最大行次数を ν とすると、 $\partial_{r_i}[H_c(s)]\leq\nu-1; i=1\sim\sigma, \det\Gamma_r[[H'(s):H_c'(s)]]\neq 0$ のもとで $H_c(s)$ を適当に設計することにより、 $\sum_{i=1}^{\phi}\partial_{r_i}[H'(s):H_c'(s)]'$ 次方程式 $\det[H'(s):H_c'(s)]'=0$ の根を任意に配置することができる。

(証明) 文献 1, 4 参照。 □

5. 補償器の設計

$T_1(s), T_2(s)$ をそれぞれ左既約分解形で表わす。

$$T_1(s)=P_1^{-1}(s)Q_1(s) \quad (18)$$

$$T_2(s)=P_2^{-1}(s)Q_2(s) \quad (19)$$

$P_1(s)$ と $P_2(s)$ の最大共通右因子を $G_{RP}(s)$ とする。また、 $\tilde{P}_1(s), \tilde{P}_2(s)$ を

$$P_2(s)P_1^{-1}(s)=\tilde{P}_1^{-1}(s)\tilde{P}_2(s) \quad (20)$$

とする。ただし $\tilde{P}_1(s), \tilde{P}_2(s)$ は互いに左素とする。 $\tilde{P}_2(s)Q_1(s)$ と $\tilde{P}_1(s)Q_2(s)$ の最大共通左因子を $G_{LQ}(s)$ とする。 $G_{LQ}^{-1}(s)\tilde{P}_2(s)Q_1(s)$ の(各列の)最大共通左因子を $G_L(s)$ とする。 $\det G_{RP}(s)=0$ の根、および $\det G_{LQ}(s)=0$ の根はそれぞれ $T_1(s), T_2(s)$ の共通極、共通零と呼ばれる。また、 $\det G_L(s)=0$ の根は補償器 $T(s)$ の固定極と呼ばれ、必然的にこの極は $T(s)$ に導入される⁴⁾。以下の解析ではこの極は存在しないと仮定する。なおこれが存在する場合も、若干の変更で以下の議論を直ちに拡張することができる。

《定理 4》 $K(s)$ を (4) 式とする。 $\Gamma_c[K(s)]$ から $q+1$ 個の列を抜き出して作られる行列の下 q 行で構成される $q\times(q+1)$ ブロック行列が階数 q をもつならば、特別な場合を除き

$$\sum_{i=1}^{q+1}\partial_{c_i}[\tilde{K}(s)]-1 \quad (21)$$

次元で任意の極配置をもつプロパーな補償器 $T(s)$ を実現することができる。ただし、 $\tilde{K}(s)$ は $\Gamma_c[K(s)]$ から抜き出された $q+1$ 本の列に対応する $K(s)$ の列から作られる $(m+q)\times(q+1)$ 多項式行列である。

(証明) 第 3 章で述べた二つの問題の組合せに従っ

て証明する。仮定から $\Gamma_c[\tilde{K}(s)]$ の下 q 行を含む適当な $q+1$ 行から作られる行列が階数 $q+1$ をもつように行を抜き出すことができるので、便宜上 $\Gamma_c[\tilde{K}(s)]$ の下 $q+1$ 行をそれとして議論を進める。 $\tilde{K}(s)$ の下 $q+1$ 行で構成される $(q+1)\times(q+1)$ ブロック行列を $\tilde{K}_2(s)$ とする。したがって $\det\tilde{K}_2(s)$ の次数は $\sum_{i=1}^{q+1}\partial_{c_i}[\tilde{K}(s)]$ である。 $(m-1)\times(m+q)$ 多項式行列 $\tilde{M}(s)$ は (15) 式を満足するとする。ただし、ここで $r=q+1$ となっている。 $\tilde{M}(s)$ の最小基底を $\hat{M}(s)$ とする。 $\hat{M}(s)$ をつぎのように分割する。

$$\hat{M}(s)=[\hat{M}_m(s):-\hat{M}_q(s)] \quad (22)$$

ただし、 $\hat{M}_m(s), \hat{M}_q(s)$ はそれぞれ $(m-1)\times m, (m-1)\times q$ の多項式行列である。双対空間の性質³⁾より、 $\hat{M}(s)$ の最初の $m-1$ 列から作られる $(m-1)\times(m-1)$ 行列の行列式と $\det\tilde{K}_2(s)$ は等しいので $\hat{M}_m(s)$ も行プロパーである。したがって、さらに $\hat{M}_m(s)$ の(各列の)最大共通左因子がユニモジュラであれば、 $\hat{M}_m(s)$ は最小基底であるので定理 3 よりつぎのことが成り立つ。 $\nu\triangleq\max_i\partial_{r_i}[\hat{M}_m(s)]$ とし、 $\partial_r[\alpha_1(s)]=\nu-1$, かつ

$$\text{rank}\Gamma_r\begin{bmatrix}\hat{M}_m(s)\\\vdots\\\alpha_1(s)\end{bmatrix}=m \quad (23)$$

を満足する $1\times m$ 多項式行列 $\alpha_1(s)$ を考えると、 $\alpha_1(s)$ の適当な設計により

$$\det\begin{bmatrix}\hat{M}_m(s)\\\vdots\\\alpha_1(s)\end{bmatrix}=0 \quad (24)$$

の根を自由に設定できる。

つぎに、(23) 式が成立しているの

$$\begin{bmatrix}\hat{M}(s)\\\vdots\\\alpha(s)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\hat{M}_m(s):-\hat{M}_q(s)\\\vdots\\\alpha_1(s):-\alpha_2(s)\end{bmatrix} \quad (25)$$

の $1\times q$ 多項式行列 $\alpha_2(s)$ を定理 2 の系に従って設計することにより、(24) 式の根のうち任意の ν 個を (25) 式の(各列の)最大共通左因子の行列式の根とすることができる。(25) 式の最小基底を

$$[\bar{M}(s)]=[\bar{M}_m(s):-\bar{M}_q(s)] \quad (26)$$

とすると、この行次数の和は $\sum_{i=1}^m\partial_{r_i}[\bar{M}(s)]$

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^{m-1}\partial_{r_i}[\hat{M}(s)]+\partial_r[\alpha(s)]-\nu \\ &= \sum_{i=1}^{q+1}\partial_{c_i}[\tilde{K}(s)]+(\nu-1)-\nu=\sum_{i=1}^{q+1}\partial_{c_i}[\tilde{K}(s)]-1 \end{aligned}$$

となる。ただし $\alpha(s)=[\alpha_1(s):\alpha_2(s)]$ である。(26) 式の $\bar{M}_m(s), \bar{M}_q(s)$ をそれぞれ $m\times m, m\times q$ 多項式行列とすると、補償器 $T(s)$ は (16) 式で与えられる。また (25) 式までの議論から $T(s)$ はプロパーとなることも明らかである。 □

定理4で指摘されている特別な場合については，証明の過程において明らかにされているが，つぎの系でまとめておく。

【系】 $\hat{M}_m(s)$ の (各列の) 最大共通左因子がユニモジュラでなければ，その行列式の根は $T(s)$ の極に含まれ $\alpha(s)$ によって動かすことはできない。

上の系のような場合は一般にまれであると思われるが，そのような場合でも $\hat{K}_2(s)$ の選び方に自由度があればこれを変えてみるなどの措置で，より定理の適用範囲を広げることができよう。

定理1と定理4の比較からつぎの定理が導かれる。

《定理5》 定理1で選ばれた列を $K(s)$ から除外し残された $K(s)$ の列の中の最小の列次数を d とする。任意の極配置をもつプロパーな補償器 $T(s)$ は特別な場合を除き定理1の場合より $d-1$ 次元だけ高次にすることで実現できる。

(証明) 定理1において選ばれた q 列からなる行列を考える。この行列の最高次係数行列の下 q 行からなるブロック行列は階数 q をもつ。したがって，この q 本の列に仮定で選ばれた列次数 d をもつ1本の列を結合した $q+1$ 本の列から構成される行列は，定理4の仮定を必ず満足する。 $\square$

この定理より， $K(s)$ において定理1で選ばれた列以外の列に列次数1のものが存在すれば，特別な場合を除き定理1と同じ次元で任意の極配置をもつ補償器 $T(s)$ が実現できることがわかる。

補償器 $T(s)$ の具体的な設計アルゴリズムはつぎのようにまとめられる。

1) 次数順，最小基底 $K(s)$ および $\Gamma_e[K(s)]$ を計算する。

2) (6)式が満足されれば K_q の1次独立な列を左から順に q 本選びそれに対応する $K(s)$ の q 本の列を抜き出す。

3) 残された $K(s)$ の列のうち一番左側の1列を抜き出し，これと2)で選ばれた列を結合し $(m+q) \times (q+1)$ 多項式行列 $\tilde{K}(s)$ を作る。

4) $\ker \tilde{K}(s)$ の最小基底 $\hat{M}(s)$ を求める。

5) $\sum_{i=1}^{q+1} \partial_{c_i}[\tilde{K}(s)] - 1$ 個の補償器の極を決める。

6) (23)式の根として5)での極の他に ν 個の根を適当に定め，これらを実現する $\alpha_1(s)$ を設計する(定理3または付録2)。

7) (25)式の(各列の)最大共通左因子の行列式の根が6)で定められた ν 個の根となるように $\alpha_2(s)$ を設計する(定理2の系)。

8) (26), (16)式より希望の極をもつプロパーな補

償器 $T(s)$ が導出される。

6. 例題

前章で提示されたアルゴリズムに従って補償器を求めてみる。 $T_1(s)$ はつぎの5次の系

$$T_1(s) = \begin{bmatrix} \frac{2s}{(s+1)(s+2)} & 0 \\ \frac{2(4s^2+7s-3)}{(2s+3)^2(s+2)} & \frac{4s^2-4s+3}{(2s+3)^2} \\ \frac{s^2+s+2}{(s+1)(s+2)} & \frac{1}{2s+1} \\ -\frac{2(s+1)}{s+2} & 0 \end{bmatrix}, T_2(s) = I_2$$

なる問題に対し $T(s)$ を求めてみる。

1) $T_1(s), T_2(s)$ より $K(s)$ は

$$K(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & (2s+3)^2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & (s+1)(s+2) \\ 0 & 2s+1 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 0 & s^2+s+2 \\ -1 & 0 & 4s^2-4s+3 & -2(s+1)^2 \end{bmatrix}$$

したがって，最高次係数行列 $\Gamma_e[K(s)]$ は

$$\Gamma_e[K(s)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

2) 第1, 3列(または4列)が定理1を満足する。

3) 第2列を抜き出し $K(s)$ の第1, 2, 3列からなる 6×3 行列を $\tilde{K}(s)$ とする。

4) $\ker \tilde{K}(s)$ の最小基底 $\hat{M}(s)$ は

$$\hat{M}(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -(2s+1) \\ 0 & -(4s^2-4s+3) & 10 \\ 0 & \vdots & 0 \\ * & -1 & 2s+1 \\ -2(2s+1) & \vdots & 2(2s+1)^2(2s+3)^2 \end{bmatrix}$$

5) $\sum_{i=1}^3 \partial_{c_i}[\tilde{K}(s)] - 1 = 3 - 1 = 2$ より，補償器は2次元で実現でき，希望の極を -3 の重極とする。

6) $\nu=2$ であるので(23)式の根として -3 の重極の他に，たとえば $0, 1$ を仮定すると

$$\alpha_1(s) = [0 \ 20s - 59.190 \ -(12s+46)]$$

7) $0, 1$ が(25)式の(各列の)最大共通左因子の行列式の根となるように $\alpha_2(s)$ を求めると

$$\alpha_2(s) = [- (128s+46) \ - (148s+177)]$$

8) (26)式は

$$\bar{M}(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -(2s+1) \\ 0 & 59s-44 & 10 \\ 0 & 289 & -240 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2s+1 & 0 \\ 50 & -(118s+32) & -(59s+66) \\ -20 & -58 & -9 \end{bmatrix}$$

したがって

$$T(s) = \frac{1}{(s+3)^2} \begin{bmatrix} s^2-s+0.75 & -(7s+8.25) \\ 2s^2+2s+3 & s^2-4s-6 \\ s^2-s+0.75 & -(7s+8.25) \\ 14s^2+23.5s+8.25 & 14s^2+23.5s+8.25 \end{bmatrix}$$

ここでは、2次元の補償器が得られたが、文献4の方法に従えば5次元の補償器が導出される。

なお、同文献で4次元の補償器が得られた例題がのせられているが、やはり同問題に本方法を用いれば任意の極配置をもつ2次元の補償器が導出される。

7. 未知入力オブザーバ

(1)式に対し $T_1(s)$ と $T(s)$ が逆の関係

$$T(s)T_1(s) = T_2(s) \quad (27)$$

にある場合を考察する。これはシステム $T_1(s)$ に (システムの入力をまったく利用しない) 未知入力オブザーバ $T(s)$ を結合し、伝達関数でつぎのように示される状態の線形関数を推定する問題になる。

$$w(s) = T_2(s)u(s) \quad (28)$$

ただし、 $u(s)$ はシステム $T_1(s)$ への入力である。(27)式の関係は(1)式の両辺の転置をとった関係と等価である (ただし、 $T_1(s)$, $T_2(s)$, $T(s)$ の転置を新たに $T_1(s)$, $T_2(s)$, $T(s)$ と置きなおす)。したがって、出力のみから状態の線形関数を推定できる条件、および未知入力オブザーバの設計に関する議論は、前章までの結果を行と列を入れかえた形式でそのまま成立することがわかる。

ところで、モデル適合問題と同様に、このオブザーバにも固定極が生じる可能性があり、これが不安定なら (推定誤差の動的挙動がオブザーバの極によって決まることから) 推定値は発散してしまう。良く知られているように全入力を利用すればオブザーバの極を任意に配置でき固定極は生じないが、以下では入力の部分的利用による解決法と得られるオブザーバの次元などについて検討する。(27)式における $T_1(s)$, $T_2(s)$ をそれぞれ $p \times m$, $q \times m$ の多項式行列とし、つぎの右既約分解形で表わす。

$$T_1(s) = Q_{01}(s)P_{01}^{-1}(s) \quad (29)$$

$$T_2(s) = Q_{02}(s)P_{02}^{-1}(s) \quad (30)$$

オブザーバの入力は

$$u_0(s) = \begin{bmatrix} u_d(s) \\ \vdots \\ y(s) \end{bmatrix} \quad (31)$$

とする。ただし、 $u_d(s)$ は d ベクトルで入力ベクトル $u(s)$ の1部である ($0 \leq d \leq m$)。オブザーバの伝達関数行列 $T(s)$ は $q \times (d+p)$ であり、つぎの左既約分解形で表わされているとする。

$$T(s) = P_0^{-1}(s)R_{10}(s) = P_0^{-1}(s)[R_1(s) : R_0(s)] \quad (32)$$

ただし、 $R_1(s)$, $R_0(s)$ はそれぞれ $q \times d$, $q \times p$ の多項式行列である。 $T_1(s) = P_0^{-1}(s)R_1(s)$, $T_0(s) = P_0^{-1}(s)R_0(s)$ とおくと、推定 $\hat{w}(s)$ は

$$\hat{w}(s) = T_1(s)u_d(s) + T_0(s)y(s) \quad (33)$$

であるので、これと(28)式の $w(s)$ を等置することにより次式が導かれる。

$$\begin{bmatrix} R_1(s) : R_0(s) : P(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_d(s) \\ \vdots \\ Q_{01}(s) \\ \vdots \\ -Q_{02}(s)P_{02}^{-1}P_{01}(s) \end{bmatrix} = 0 \quad (34)$$

これはオブザーバが満足しなければならない条件の一つである。ただし、 $P_d(s)$ は $u_d(s) = E_d u(s)$ とすると $P_d(s) = E_d P_{01}(s)$ である。ここで、 E_d は各行ごとにある1要素のみ1で、他は0で $\text{rank } E_d = d$ なる $d \times m$ の定数行列である。

いま、システムへの入力をまったくオブザーバに利用しなければ(34)式に $R_1(s)$, $P_d(s)$ は現われない。この場合 $Q_{01}(s)$ と $Q_{02}P_{02}^{-1}(s)P_{01}(s)$ の最大共通右因子を $G_{RQ}(s)$ とし、 $Q_{01}(s)G_{RQ}^{-1}(s)$ の(各行の)最大共通右因子を $G_R(s)$ とすれば、モデル適合の場合と同様、 $\det G_{RQ}(s) = 0$ の根および $\det G_R(s) = 0$ の根はそれぞれ共通零およびオブザーバ $T(s)$ の固定極を形成する。 $\det G_R(s) = 0$ の根を λ_i ; $i=1 \sim \delta$ とする。

《定理 6》 $T_1(s)$, $T_2(s)$ に対し、 $T_1'(s) \rightarrow T_1(s)$, $T_2'(s) \rightarrow T_2(s)$, $m \rightarrow p$, $p \rightarrow m$ と置きなおせば、これらは定理1を満足するとする。したがって、(27)式を満たすプロパーな $T(s)$ が存在する。この $T(s)$ は、固定極 λ_i ; $i=1 \sim \delta$ をもつとする。すると、

$$\text{rank} \begin{bmatrix} P_d(\lambda_i) \\ \vdots \\ Q_{01}(\lambda_i) \end{bmatrix} = m; i=1 \sim \delta \quad (35)$$

を満足するように適当に $P_d(s) = E_d P_{01}(s)$ を選べば、入力の一部 $u_d(s) = E_d u(s)$ をオブザーバの入力に利用することで任意の極配置をもつプロパーなオブザーバを構成することができる。

(証明) $[P_d'(s) : Q_{01}'(s)]'$ の(各行の)最大共通右

因子を $G_{RI}(s)$ と置けば， $G_{RI}(s)$ は

$$\begin{bmatrix} P_d(s) \\ \cdots \cdots \cdots \\ Q_{01}(s) \\ \cdots \cdots \cdots \\ -Q_{02}(s)P_2^{-1}(s)P_1(s) \end{bmatrix} \quad (36)$$

の (各行の) 最大共通右因子でもあり， $\det G_{RI}(s)=0$ の根は $\det G_{RQ}(s)=0$ の根の部分集合であることがわかる． $\det G_R(s)=0$ の根はこれらに含まれないので，結局オブザーバから固定極は排除される．

このオブザーバは，具体的に以下のごとく実現される．(36)式の双対の次数順，最小基底を

$$K'(s)=[K_1(s):K_2(s):K_3(s)] \quad (37)$$

とする．ただし， $K_1(s), K_2(s), K_3(s)$ はそれぞれ $(d+p+q-m) \times d, (d+p+q-m) \times p, (d+p+q-m) \times q$ の多項式行列である． $K'(s)=[K_m'(s):K_q'(s)]'$ ， $K_m'(s)=[K_1(s):K_2(s)]$ ， $K_q'(s)=K_3(s)$ とおき，さらに行列のサノズが異なるので，それに注意しさえすれば， $K(s)$ に (4) 式以降の議論をそのまま適用できる．この $K(s)$ は定理 1 の仮定を満たしているので (付録 3) 任意極配置をもつプロパーなオブザーバ $T(s)$ を構成することができる．□

結局，前章までの結果を適用することでオブザーバの次元に対し，つぎの定理が成り立つ．

《定理 7》 定理 6 の仮定を満足するとする．

$\Gamma_r[K'(s)]=[K_{1r}:K_{2r}:K_{3r}]$ とおく．ただし数行行列 K_{1r}, K_{2r}, K_{3r} はそれぞれ $K_1(s), K_2(s), K_3(s)$ のサイズと同じである． K_{3r} の上から 1 次独立な行を q 本抜き出し対応する $K'(s)$ の行次数の和を d_1 ，残された $K'(s)$ の行の中で行次数の最小のものを d_2 とすると，定理 6 のオブザーバは d_1+d_2-1 次元で実現することができる．

8. あとがき

プラントとモデルの伝達関数行列から定まる空間とその双対空間を利用し，モデル適合問題の補償器および未知入力オブザーバの設計法を導出した．この設計法は例題でも示されたように，従来の方法に比べきわめて有効と思われる．また，さらに未知入力オブザーバに対し，プラント入力部分が部分的に利用できる場合固定極を解消する方法を与えた．ところで，ここで低次元化のために提案された手法は，補償器(オブザーバ)に H. H. Rosenbrock によって定義された入力(出力)分離零¹³⁾を発生させ，それを排除する手続であるとも解釈できる．なお，本論文の結果は特殊な場合として安定な逆システムの構成法も含んでいる．

終りに，本研究の一部に昭和 54 年度科学研究費補

助金 (奨励研究 (A) 475167) を使用させて頂いたことを報告する．

参 考 文 献

- 1) W. A. Wolovich: Linear Multivariable Systems, Springer (1974)
- 2) S. -H. Wang and E. J. Davison: A Minimization Algorithm for Design of Linear Multivariable Systems, IEEE Trans., **AC-18-3**, 220/225 (1973)
- 3) G. D. Forney: Minimal Bases of Rational Vector Spaces, with Applications to Multivariable Linear Systems, SIAM J. Control, **13-3**, 493/520 (1975)
- 4) W. A. Wolovich, et al.: On the Stability of Solutions to Minimal and Nonminimal Design Problems, IEEE Trans., **AC-22-1**, 88/94 (1977)
- 5) R. W. Scott and B. D. O. Anderson: Least Order, Stable Solution of the Exact Model Matching Problem, Automatica, **14-5**, 481/492 (1978)
- 6) S. -H. Wang and E. J. Davison: Observing Partial States for Systems with Unmeasurable Disturbances, IEEE Trans., **AC-23-3**, 481/483 (1978)
- 7) S. P. Bhattacharyya: Observer Design for Linear Systems with Unknown Inputs, IEEE Trans., **AC-23-3**, 483/484 (1978)
- 8) T. Mita: On the Synthesis of an Unknown Input Observer for a Class of Multi-Input/Output Systems, Int. J. Control, **26-6**, 841/851 (1977)
- 9) 高橋，美多：未知入力オブザーバの構造と安定性，第 7 回制御理論シンポジウム資料，279/283 (1978)
- 10) S. Kung, et al.: Fast and Stable Algorithms for Minimal Design Problems, Multivariable Technological Systems (Proc. 4-th IFAC Int. Sympo.), 97/104, Pergamon Press (1977)
- 11) M. K. Sain: A Free-Modular Algorithm for Minimal Design of Linear Multivariable Systems, Proc. IFAC 6th World Congress (1975)
- 12) 児玉，須田：システム制御のためのマトリクス理論，計測自動制御学会 (1978)
- 13) H. H. Rosenbrock: State Space and Multivariable Theory, 64/65, Nelson (1970)

《付 録》

〈付録 1〉

$\bar{\xi}_{l-1} = \sum_{k=0}^{i-1} \xi_k + l$ と仮定する．ただし $\xi_0=0$ ． $f_i^j; i=1 \sim \rho, j=1 \sim \xi$ を任意の定数， $f_i^j; i=\rho+1 \sim \rho+\sigma, j=1 \sim \xi$ は $f_{l+\rho}^{\xi_{l-1}}, f_{l+\rho}^{\xi_{l-1}+1}, \dots, f_{l+\rho}^{\xi_{l-1}+\xi_l}; l=1 \sim \sigma$ のみを 1 とし，他のすべてを 0 とする．すると (17) 式はつぎの問題に分解される．

$$\begin{bmatrix} 1 & \lambda_{\xi_{l-1}} & (\lambda_{\xi_{l-1}})^2 & \cdots & (\lambda_{\xi_{l-1}})^{\xi_l} \\ 1 & \lambda_{\xi_{l-1}+1} & (\lambda_{\xi_{l-1}+1})^2 & \cdots & (\lambda_{\xi_{l-1}+1})^{\xi_l} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_{\xi_{l-1}+\xi_l} & (\lambda_{\xi_{l-1}+\xi_l})^2 & \cdots & (\lambda_{\xi_{l-1}+\xi_l})^{\xi_l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{h}_0^l \\ \bar{h}_1^l \\ \vdots \\ \bar{h}_{\xi_l}^l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{\xi_{l-1}} \\ \phi_{\xi_{l-1}+1} \\ \vdots \\ \phi_{\xi_{l-1}+\xi_l} \end{bmatrix}; l=1 \sim \sigma \quad (A.1)$$

ただし

$$\phi_j = - \sum_{i=1}^p f_i \left\{ \sum_{k=0}^{\eta_i} h_k^i(\lambda_j)^k \right\}; \quad j = \bar{\zeta}_{i-1} \sim \bar{\zeta}_i - 1 + \zeta_i \quad (\text{A.2})$$

$H(s)$ の最小基底の性質より、(すべてが0ではない) いかなる f_i^j ; $i=1 \sim p, j=1 \sim \xi$ に対しても $1 \times \nu$ 行列 ϕ_j の全要素が0となることはない。また(A.1)式の左辺の係数行列は Vandermonde 行列で各 λ_j ; $j = \bar{\zeta}_{i-1} \sim \bar{\zeta}_i - 1 + \zeta_i$ は互いに相異なるので、 $\bar{h}_0^i, \bar{h}_1^i, \dots, \bar{h}_{\xi}^i$ は一意的に決まる。

〈付録2〉

Wolovich の方法は左既約分解形を右既約分解形へ変換する手順などを含んでいるが、 $\alpha_1(s)$ は行次数 $\nu-1$ の $1 \times m$ 多項式行列であるので、以下の方法が比較的簡単に有効である。 $\alpha_1(s) = \beta_{\nu-1}s^{\nu-1} + \beta_{\nu-2}s^{\nu-2} + \dots + \beta_0$ とおく。 λ_j ; $j=1 \sim \xi$ を希望の極とすると、

$$\det \begin{bmatrix} \hat{M}(\lambda_j) \\ \alpha_1(\lambda_j) \end{bmatrix} = 0; \quad j=1 \sim \xi \quad (\text{A.3})$$

は β_i ; $i=1 \sim \nu-1$ の単なる1次連立方程式となり、これより直接 β_i ; $i=1 \sim \nu-1$ を求めることができる。

〈付録3〉

(37)式の $K(s)$ に定理1の仮定が成立していることの証明は、 $K'(s)$ と双対関係にある(36)式に対しつぎのことが証明されればよい。“ $A(s)$ は $P_{01}(s)$, $B(s)$ は $Q_{01}(s)$ の m 行からなる $m \times m$ 行列, $C(s)$ は $Q_{01}(s)$ の残りの $p-m$ 行と $-Q_{02}(s)P_{02}^{-1}(s)P_{01}(s)$ をまとめた $(p+q-m) \times m$ 行列とする。ただし、 $B(s)$ は $C(s)B^{-1}(s)$ がプロパーとなるように選ばれる(定理6の仮定より必ず可能である)。すると、行列 $A(s)$ の任意の何行かから作られる行列 $A_1(s)$ ($P_d(s)$ に対応) に対し

$$\begin{bmatrix} B_2(s) \\ C(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1(s) \\ B_1(s) \end{bmatrix}^{-1} \quad (\text{A.4})$$

がプロパーとなる $B_1(s)$ が存在する。ただし、 $B_1(s)$ は $B(s)$ の何行かから構成され、 $B_2(s)$ は残った行を表わす。”まず

$$B_2(s) \begin{bmatrix} A_1(s) \\ B_1(s) \end{bmatrix}^{-1} \quad (\text{A.5})$$

がプロパーとなる $B_1(s)$ が存在することを証明する。

簡単のため一般性を失うことなく $\hat{V}_0(s) \triangleq [A'(s): B'(s)]'$ は echelon form³⁾ に変換されており、かつ $\Gamma_e[A(s)]$ は下三角行列であると仮定する。 $\hat{V}_0(s)$ から $A_1(s)$ に含まれない $A(s)$ の任意の1行(第 j 行)

を抜き去った $(2m-1) \times m$ 行列を $V_1(s)$ とする。 $V_1(s)$ の上 $(m-1)$ 行からなる $(m-1) \times m$ 行列を $\bar{V}_1(s)$ とすると、第 j 列以外の $m-1$ 個の列は互いに1次独立であり、また適当な多項式 $\chi_i(s)$; $i=1 \sim m$ が存在し、 $\sum_{i=1}^m \chi_i(s) \bar{v}_i^1(s) = 0, \chi_i(s) \neq 0$ が成立する。 $V_1(s)$ の第 j 列を $\sum_{i=1}^m \chi_i(s) v_i^1(s)$ で置きかえたものを $\hat{V}_1(s)$ とする。なお、 $\bar{v}_i^1(s), v_i^1(s)$; $i=1 \sim m$ はそれぞれ $\bar{V}_1(s), V_1(s)$ の第 i 列を意味する。 $V_1(s)$ から $\hat{V}_1(s)$ への変換は $V_1(s)$ の右から正則な多項式行列が掛けられたと同じである。さて、 $\hat{V}_1(s)$ の第 j 列 $\hat{v}_j^1(s)$ の上から $(m-1)$ 個の要素はすべて0であるが、 $B(s)$ の正則性より $\hat{v}_j^1(s)$ の他の要素には0でないものが存在する。 $\Gamma_e[\hat{v}_j^1(s)]$ より0でない要素の一つを選び、この要素を含む $\hat{V}_1(s)$ の行を見出す。この行に対応する $B(s)$ の行が $B_1(s)$ に入れられる行である。便宜上 $\Gamma_e[\hat{V}_1(s)]$ の上から m 番目の要素が選ばれたとする(今の場合 $B(s)$ の第1行に対応) と、 $\hat{V}_1(s)$ の上 m 行からなる $m \times m$ 行列は列プロパーであり、その最高次係数行列は $\Gamma_e[\hat{V}_1(s)]$ の上から m 行からなる $m \times m$ 行列と一致する。

さらに、 $(2m-1) \times m$ 行列 $\hat{V}_1(s)$ から $A_1(s)$ に含まれない任意の1行を抜き去り、その行列の上 $(m-1)$ 行からなる行列に同様の手順を繰り返すと $\hat{V}_2(s)$ が決まり、同じく $B_1(s)$ に入れられる行が見い出される。この手順を適当回(s 回とする)繰り返し $\hat{V}_s(s)$ が求まった時、 $A_1(s)$ に含まれない行がすべて除かれているなら、 $B_1(s)$ が自動的に確定している。簡単のため $B_1(s)$ は $B(s)$ の上から s 行とする。いま、 $\hat{V}_s(s)$ の上から m 行からなる $m \times m$ 行列を $\hat{V}_s^p(s)$ 、残された $(m-s) \times m$ 行列を $\hat{V}_s^N(s)$ とすると、 $s=1$ の場合と同様 $\hat{V}_s^p(s)$ は列プロパーが保たれ、またその最高次係数行列 $\Gamma_e[\hat{V}_s^p(s)]$ は $\Gamma_e[\hat{V}_s(s)]$ の上から m 行からなる $m \times m$ 行列と一致する。したがって、

$$\hat{V}_s^N(s) [\hat{V}_s^p(s)]^{-1} = B_2(s) \begin{bmatrix} A_1(s) \\ B_1(s) \end{bmatrix}^{-1} \quad (\text{A.6})$$

はプロパーとなり、(A.5)式はプロパーとなる。

$$\text{つぎに、} C(s) \begin{bmatrix} A_1(s) \\ B_1(s) \end{bmatrix}^{-1} = C(s) B^{-1}(s) \begin{bmatrix} B_1(s) \\ B_2(s) \end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix} A_1(s) \\ B_1(s) \end{bmatrix}^{-1}$ は、明らかにプロパーであるから、結局(A.4)式はプロパーとなることが証明された。