リアプノフ法による離散系モデル規範形適応制御系 の一構成法[†]

武 藤 康 彦*・市 川 邦 彦*

Discrete Model Reference Adaptive Control System
by Lyapunov's Method

Yasuhiko MUTOH* and Kunihiko ICHIKAWA*

In this paper, a single-input single-output linear discrete time model reference adaptive control problem is considered. By transforming the systems description of both the model and the plant into the systems description whose state variables are all known, a very simple adaptive system which uses only accessible signals can be constructed. Further, it has been revealed that an adaptive scheme can be obtained easily by introducing additional filters developed by the authors, even if the difference between the degrees of the denominator and numerator polynomials of the plant transfer function is greater than two.

1. ま え が き

本論文では、1入力1出力の線形離散系に対するモデル規範形適応制御系の一構成法について述べる。

直接法による離散系モデル規範形適応制御系については、Landau, Bethoux^{1),2)}が超安定定理を用いて、また Ionescu および Monopoli³⁾がリアプノフの安定定理を用いた手法について提案している。しかし、前者はパラメータ・アダプテーションであり、制御対象が可変なパラメータをもっているという事は、初めからそれを意図して作られたような特殊なシステムに限られ、応用範囲が狭いと考えられる。後者もリアプノフ関数の選定が難しく、その設計には離散系の正実関数とシステム行列の関係⁴⁾を考慮する必要があり、適応系構成に必要なフィルタのパラメータ計算がやっかいである。一方、わが国における研究として最近の鈴

木・高島⁵⁾、藤井・水野⁶⁾らによる研究は興味あるものであるが、前者においては3次方程式の根を毎回計算しなければならないこと、後者においては、未知パラメータの数の割に可調整パラメータの数が多すぎるなど指摘できよう。

ここでは、これらの問題に対して状態変数フィルタを用いることによって、対象とする誤差方程式を単純化して、単純なリアプノフ関数を考えることで現時刻において測定可能な信号のみを用いた離散系モデル規範形適応制御系が構成できることを示す。ここで構成される適応系は、これまで離散系に対して提案されたものとは異なった形をしている。特にプラントの伝達関数の分母分子の次数差が2以上の場合に対しても、新たなフィルタを用いることで適応系構成を可能にしているが、これは連続系において体系化されつつある適応系設計手法を離散系へ拡張するひとつの方法である。また本手法では、正実条件を必要としないので、各フィルタのパラメータ決定にはかなりの任意性があり、設計に柔軟性がある。

以下では、まず問題の記述を行った後、3章で状態変数フィルタについて述べる。4章では適応系を構成する際の基本的な誤差方程式を導いてから適応系の設計について述べる。適応系は、プラントの伝達関数の分母分子の次数差が1の場合と2以上の場合に分けて論じるが、後者においては、状態変数フィルタの次数を1上げることと、Feuer および Morse⁷⁾の文献に見られるフィルタを離散系に拡張した形のものを新たに導入して、次数差が増加したときの問題を解決している。またその場合、いわゆる増大誤差⁸⁾に対応する信号が必要となるが、ここではそれがスカラー変数として用いられている。最後に5章において、この適応系の有用性を確かめるために、計算機によるシミュレーション結果を示した。

[†] 第22回自動制御連合講演会で発表(昭54・9)

* 上智大学理工学部 東京都千代田区紀尾井町7

* Faculty of Science and Technology, Sophia University, Chiyoda-ku, Tokyo

(Received September 5, 1979)

(Revised February 29, 1980)

2. 問題の記述

制御プラントとして次式で示される 1 入力 1 出力の n 次線形離散系を考える。

$$D_p(z)y_p(k) = D_u(z)u(k) \quad (2.1)$$

ここで、 z は時間進め演算子とし、 $u(k)$ 、 $y_p(k)$ は時刻 k におけるプラントの入出力、また各多項式はつぎのとおりとする。

$$D_p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0 \quad (2.2)$$

$$D_u(z) = b_\nu z^\nu + b_{\nu-1}z^{\nu-1} + \dots + b_0 \quad (\nu \leq n-1) \quad (2.3)$$

ここで、 n 、 ν は既知だが各パラメータは未知定数とし、 b_ν についてのみその符号およびその絶対値の上限が既知と仮定する。すなわち

$$0 < |b_\nu| \leq b_M \quad (2.4)$$

とし、 b_M は既知定数とする。さらに多項式 $D_u(z)$ は安定多項式とする。すなわち $D_u(z) = 0$ の根は複素平面上の原点を中心とした単位円内にあるものとする。

これに対して、理想モデルを次式で表わす。

$$D_m(z)y_m(k) = D_r(z)r(k) \quad (2.5)$$

ここで、 $r(k)$ 、 $y_m(k)$ はそれぞれ時刻におけるモデルの基準入力および出力であり、各多項式は次式で定義される。

$$D_m(z) = z^n + a_{n-1}^M z^{n-1} + \dots + a_0^M \quad (2.6)$$

$$D_r(z) = b_\mu^M z^\mu + b_{\mu-1}^M z^{\mu-1} + \dots + b_0^M \quad (2.7)$$

$D_m(z)$ は安定多項式とし、各パラメータは既知定数とする。またモデルに対して $\mu \leq \nu$ なる条件を課す。これは適応系を測定可能な信号のみから構成するための条件である。

制御目的は、 $k \rightarrow \infty$ でプラントとモデルの出力誤差

$$e(k) \triangleq y_p(k) - y_m(k) \quad (2.8)$$

が 0 に収束するようなプラント入力 $u(k)$ を、時刻 k において測定可能な信号のみを使って構成することである。

3. 状態変数フィルタ

ここでは、適応系を構成するのに都合のよい形に制御対象を変形する。

z の $n-1$ 次安定多項式

$$D_w(z) = z^{n-1} + d_{n-2}z^{n-2} + \dots + d_0 \quad (3.1)$$

を導入して、次式で示されるようなフィルタを構成し、これを連続系の場合にならって状態変数フィルタと呼ぶ⁸⁾。

$$D_w(z)\xi_p(k) = y_p(k) \quad (3.2)$$

$$D_w(z)\xi_u(k) = u(k) \quad (3.3)$$

$$D_w(z)\xi_m(k) = y_m(k) \quad (3.4)$$

$$D_w(z)\xi_r(k) = r(k) \quad (3.5)$$

これらの式と状態表示との対応をつけておく。(3.2) 式について考えると、これはつぎのような可制御標準形に実現させることができる。

$$\bar{\xi}_p(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & I_{n-2} \\ \hline -d_0, \dots, -d_{n-2} \end{bmatrix} \bar{\xi}_p(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} y_p(k) \quad (3.6)$$

$$\xi_p(k) = [1, 0, \dots, 0] \bar{\xi}_p(k) \quad (3.7)$$

ここで

$$\bar{\xi}_p(k) = [\xi_p(k), \xi_p(k+1), \dots, \xi_p(k+n-2)]' \quad (3.8)$$

となり、時刻 k において $\xi_p(k) \sim \xi_p(k+n-1)$ まだが $\bar{\xi}_p(k)$ 、 $y_p(k)$ より求めることができる。同様に $\xi_u(k) \sim \xi_u(k+n-1)$ 、 $\xi_m(k) \sim \xi_m(k+n-1)$ 、 $\xi_r(k) \sim \xi_r(k+n-1)$ の信号は時刻 k において、すべて利用可能である。

さて、ここでこれらのフィルタ出力信号に着目すると、それぞれ次式を満足している。

$$D_p(z)\xi_p(k) = D_u(z)\xi_u(k) \quad (3.9)$$

$$D_m(z)\xi_m(k) = D_r(z)\xi_r(k) \quad (3.10)$$

したがって、当初の適応系の構成問題を以下のように変形する。

すなわち適応制御問題は、(3.9)、(3.10) 式をそれぞれ仮想的にプラントとモデルとみなし、 $k \rightarrow \infty$ で出力誤差 $\xi_p(k) - \xi_m(k)$ が 0 に収束するようなプラント入力 $u(k)$ を現時刻 k において測定可能な信号のみから構成することである。真の出力誤差 $y_p(k) - y_m(k)$ は、

$$D_w(z)\{\xi_p(k) - \xi_m(k)\} = y_p - y_m(k) \quad (3.11)$$

なる関係で結ばれているので、同様に $k \rightarrow 0$ で 0 に収束する。

4. 適応系の構成

ここでは、まず、(3.9)、(3.10) 式を仮想的にプラントとモデルとみなしたときの状態表示について述べ、基本誤差方程式を導いた後、モデル規範形適応制御系の構成についてプラントの伝達関数の分子多項式の最高次数、すなわち ν が $n-1$ の場合と $n-2$ 以下の場合に分けて論じる。

4.1 基本誤差方程式

(3.9)、(3.10) 式をそれぞれ、次式のような可制御標準形に状態表示する。

(仮想プラント)

$$\xi_p(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & I_{n-1} \\ \hline -a_0, \dots, -a_{n-1} \end{bmatrix} \xi_p(k)$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} D_u(z) \xi_u(k) \quad (4.1)$$

$$\xi_p(k) = [1, 0, \dots, 0] \xi_p(k) \quad (4.2)$$

(仮想モデル)

$$\xi_m(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & \vdots & 0 \\ I_{n-1} & & \\ -a_0^M, \dots, -a_{n-1}^M \end{bmatrix} \xi_m(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} D_r(z) \xi_r(k) \quad (4.3)$$

$$\xi_m(k) = [1, 0, \dots, 0] \xi_m(k) \quad (4.4)$$

このとき各状態変数は

$$\begin{aligned} \xi_p(k) &= [\xi_p(k), \xi_p(k+1), \dots, \xi_p(k+n-1)]' \\ \xi_m(k) &= [\xi_m(k), \xi_m(k+1), \dots, \xi_m(k+n-1)]' \end{aligned} \quad (4.5)$$

で表わされるので、前章の議論から (4.1) ~ (4.4) 式は状態変数が測定可能なシステムとみなされる。また同様に、式中現われる $\xi_u(k) \sim \xi_u(k+\nu)$, $D_r(z)\xi_r(k)$ も時刻 k で測定可能、または測定可能な信号から構成できる。

状態誤差を

$$e(k) \triangleq \xi_p(k) - \xi_m(k)$$

と定義すると、状態誤差方程式は

$$e(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & \vdots & 0 \\ I_{n-1} & & \\ 0 & & \end{bmatrix} e(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \{ D_u(z) \xi_u(k) - \alpha_p' \xi_p(k) + \alpha_m' \xi_m(k) - D_r(z) \xi_r(k) \} \quad (4.6)$$

と書ける。ここで α_p , α_m は定数ベクトルで次式で定義される。

$$\alpha_p = [a_0, a_1, \dots, a_{n-1}]'$$

$$\alpha_m = [a_0^M, a_1^M, \dots, a_{n-1}^M]'$$

状態誤差 $e(k)$ をその成分で

$$e(k) = [e_1(k), e_2(k), \dots, e_n(k)]' \quad (4.7)$$

と表わして、(4.6) 式の第 n 番目の成分の関係式のみを取り出すと

$$e_n(k+1) = D_u(z) \xi_u(k) - \alpha_p' \xi_p(k) + \alpha_m' \xi_m(k) - D_r(z) \xi_r(k) \quad (4.8)$$

となる。(4.6) 式の状態方程式の形から $e_n(k) \rightarrow 0$ は $e(k) \rightarrow 0$ を意味するので、以下では (4.8) 式を適応系を導くための基本誤差方程式と見て、 $k \rightarrow \infty$ で $e_n(k) \rightarrow 0$ を保証するようなプラント入力 $u(k)$ を構成する。

4.2 $\nu = n-1$ の場合の適応系

$\nu = n-1$ の場合は $D_u(z)$, $D_w(z)$ は共に $n-1$ 次の z の多項式となるから、

$$D_u(z) = b_\nu D_w(z) + D_R(z) \quad (4.9)$$

と書ける。ここに $D_R(z)$ は $n-2$ 次以下の剰余多項式である。これと (3.3) 式より

$$D_u(z) \xi_u(k) = b_\nu u(k) + D_R(z) \xi_u(k) \quad (4.10)$$

のように表わせるから、これを (4.8) 式に代入して

$$\begin{aligned} e_n(k+1) &= b_\nu u(k) + D_R(z) \xi_u(k) - \alpha_p' \xi_p(k) \\ &\quad + \alpha_m' \xi_m(k) - D_r(z) \xi_r(k) \\ &= b_\nu u(k) + \varphi^* \theta(k) \end{aligned} \quad (4.11)$$

を得る。ここで $\theta(k)$ は、

$$\theta(k) = [\xi_u(k), \dots, \xi_u(k+n-2), \xi_p'(k), \alpha_m' \xi_m(k) - D_r(z) \xi_r(k)]'$$

で定義される $2n$ 次元ベクトルであり、 φ^* は対応する未知定数の $2n$ 次元係数ベクトルである (最後の成分のみは 1 と既知)。注意すべきことは、 $e_n(k)$, $\theta(k)$ は時刻 k において測定可能な信号のみから構成されているということである。

プラント入力 $u(k)$ を次式に従って発生させる。

$$u(k) = \varphi'(k+1) \theta(k) \quad (4.12)$$

ここで $\varphi(k+1)$ は $2n$ 次元の可調整パラメータであり、次式により調整される。

$$\varphi(k+1) = \varphi(k) + \Delta \varphi(k) \quad (4.13)$$

(4.12) 式を (4.11) 式に代入して次式を得る。

$$e_n(k+1) = \Phi'(k+1) \theta(k) \quad (4.14)$$

ただし

$$\Phi(k) = b_\nu \varphi(k) + \varphi^* \quad (4.15)$$

とし、 $\Phi(k)$ と $\varphi(k)$ の調整はつぎのように対応している。

$$\Phi(k+1) = \Phi(k) + \Delta \Phi(k) \quad (4.16)$$

$$\Delta \Phi(k) = b_\nu \Delta \varphi(k) \quad (4.17)$$

今、(4.14), (4.16) 式に関して調整則を

$$\Delta \Phi(k) = -\varepsilon(k) \cdot e_n(k) \cdot \theta'(k-1) \quad (4.18)$$

とおく。 $\varepsilon(k)$ は安定性を保証する正の時変数である。

このとき、つぎのリアプノフ関数候補を考える。

$$V(k) = \Phi'(k) \Phi(k) \quad (4.19)$$

(4.14), (4.16), (4.18) 式を考慮しながら $\Delta V(k) = V(k+1) - V(k)$ を計算すると

$$\begin{aligned} \Delta V(k) &= 2\Phi'(k) \Delta \Phi(k) + \Delta \Phi'(k) \Delta \Phi(k) \\ &= -2\varepsilon(k) e_n(k) \Phi'(k) \theta'(k-1) \\ &\quad + \varepsilon^2(k) e_n^2(k) \theta'(k-1) \theta(k-1) \\ &= e_n^2(k) \{ -2\varepsilon(k) + \varepsilon^2(k) \theta'(k-1) \theta(k-1) \} \end{aligned} \quad (4.20)$$

したがって、 $\varepsilon(k)$ を

$$\varepsilon(k) = \frac{\alpha}{\theta'(k-1) \theta(k-1)}, \quad 0 < \alpha < 2 \quad (4.21)$$

Fig. 1 Configuration of the discrete model reference adaptive system

と選べば、 $e_n(k) \neq 0$ なら常に $\Delta V(k) < 0$ となる。すなわち $V(k)$ は下に有界な単調減少列となり $k \rightarrow \infty$ で定数に収束し、同時に $\Delta V(k)$ も 0 に収束する。このことと (4.20) 式より $e_n(k)$ は $k \rightarrow \infty$ で 0 に収束するから、適応目的が達成される。また (4.18) 式より $e_n(k) \rightarrow 0$ は $\Delta \Phi(k) \rightarrow 0$ を意味するので、可調整パラメータもある定数に収束する。

なお、(4.17) 式より $\Delta \Phi(k)$ に対する真のパラメータ調整則 $\Delta \varphi(k)$ は $\Delta \Phi(k)/b_v$ となるが、仮定より $0 < b_v \leq b_M$ なる定数 b_M が既知としているので、ここでは $\Delta \varphi(k)$ として $\Delta \Phi(k)/b_M$ を用いる。これにより、適応ゲインは小さくなるが、安定性をくずすことはない。したがって最終的にパラメータ調整は次式によってなされる。

$$\Delta \varphi(k) = -\text{sgn}(b_v) \frac{\alpha}{b_M} \cdot \frac{e_n(k) \cdot \theta(k-1)}{\theta''(k-1) \theta(k-1)} \quad (4.22)$$

$0 < \alpha < 2$

この場合の適応系の概略図を Fig. 1 に示す。

4.3 $\nu \leq n-2$ の場合の適応系

ここでは $\nu \leq n-2$ のときの適応則について述べる。この場合は前述の状態変数フィルタを 1 次ふやし、 $D_w(z)$ として n 次の安定多項式を用いる。すなわち

$$D_w(z) \xi_p(k) = y_p(k) \quad (4.23)$$

$$D_w(z) \xi_u(k) = u(k) \quad (4.24)$$

$$D_w(z) \xi_m(k) = y_m(k) \quad (4.25)$$

$$D_w(z) \xi_r(k) = r(k) \quad (4.26)$$

ここで

$$D_w(z) = z^n + d_{n-1}z^{n-1} + \dots + d_0 \quad (4.27)$$

とする。これまでの議論と同様に、 $\xi_p(k)$, $\xi_u(k)$, $\xi_m(k)$, $\xi_r(k)$ は (3.9), (3.10) 式を満たすから基本誤差

方程式として (4.8) 式を考える。ただし、このときのフィルタ出力は (4.23) ~ (4.27) 式により得られる信号である。前節と異なる点で注意すべきことは、状態変数フィルタの次数が n であるため、 $\xi_p(k) \sim \xi_p(k+n)$, $\xi_u(k) \sim \xi_u(k+n)$, $\xi_m(k) \sim \xi_m(k+n)$, $\xi_r(k) \sim \xi_r(k+n)$ が時刻 k において利用可能になるということである。

さて、この場合 $D_u(z)$ と $D_w(z)$ の次数の関係から (4.9) 式が成立しないので、新たに $n-\nu$ 次のモニク安定多項式 $D_f(z)$ を導入して

$$D_f(z) D_u(z) = b_v D_w(z) + D_R(z) \quad (4.28)$$

なる関係を利用する。ここで $D_R(z)$ は $n-1$ 次以下の剰余多項式である。これと (4.24) 式から次式を得る。

$$D_u(z) \xi_u(k) = \frac{1}{D_f(z)} \{b_v u(k) + D_R(z) \xi_u(k)\} \quad (4.29)$$

一方、(4.8) 式中

$$\begin{aligned} a_p' \xi_p(k) &= (a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0) \xi_p(k) \\ &= \frac{1}{D_f(z)} \{(A_{n-1} z^{n-1} + \dots + A_0) \xi_p(k) \\ &\quad + (B_{n-1} z^{n-1} + \dots + B_0) \xi_u(k)\} \end{aligned} \quad (4.30)$$

$$\begin{aligned} a_m' \xi_m(k) &= (a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0) \xi_m(k) \\ &= \frac{1}{D_f(z)} \{(C_{n-1} z^{n-1} + \dots + C_0) \xi_m(k) \\ &\quad + (D_{n-(\nu-\mu)-1} z^{n-(\nu-\mu)-1} \\ &\quad + \dots + D_0) \xi_r(k)\} \end{aligned} \quad (4.31)$$

$$D_r(z) \xi_r(k) = \frac{1}{D_f(z)} \{D_f(z) D_r(z) \xi_r(k)\} \quad (4.32)$$

と書けることが示される (付録)。式中 A_i, B_i は未知定数であるが、 C_i, D_i は既知定数であるので新たに既知変数 $\delta(k)$ として

$$\begin{aligned} \delta(k) &= (C_{n-1} z^{n-1} + \dots + C_0) \xi_m(k) \\ &\quad + (D_{n-(\nu-\mu)-1} z^{n-(\nu-\mu)-1} + \dots + D_0) \xi_r(k) \\ &\quad + D_f(k) D_r(k) \xi_r(k) \end{aligned} \quad (4.33)$$

を定義すれば (4.31), (4.32) 式はまとめて

$$a_m' \xi_m(k) - D_r(z) \xi_r(k) = \frac{1}{D_f(z)} \delta(k) \quad (4.34)$$

と書ける。したがって、(4.29), (4.30), (4.34) 式を (4.8) 式に代入して基本誤差方程式はつぎのようになる。

$$\begin{aligned} e_n(k+1) &= \frac{1}{D_f(z)} [b_v u(k) + \{D_R(z) + B_{n-1} z^{n-1} \\ &\quad + \dots + B_0\} \xi_u(k) + (A_{n-1} z^{n-1} \\ &\quad + \dots + A_0) \xi_p(k) + \delta(k)] \\ &= \frac{1}{D_f(z)} \{b_v u(k) + \varphi^* \theta(k)\} \end{aligned} \quad (4.35)$$

ここで $\theta(k)$ は

$$\theta(k)=[\xi_u(k), \dots, \xi_u(k+n-1), \xi_r'(k), \delta(k)]' \quad (4.36)$$

で定義される $2n+1$ 次元の測定可能な信号ベクトルであり、 φ^* は対応する未知定数の $2n+1$ 次元係数ベクトルである（その最後の成分のみは 1 と既知）。

前節同様に $2n+1$ 次元可調整パラメータベクトル $\varphi(k)$ を導入して、 $u(k)$ を次式に従って発生させる。

$$u(k)=\varphi'(k+1)\theta(k) \quad (4.37)$$

$$\varphi(k+1)=\varphi(k)+\Delta\varphi(k) \quad (4.38)$$

これらの式を (4.8) 式に代入して

$$\Phi(k)=b_r\varphi(k)+\varphi^* \quad (4.39)$$

とおくと、基本誤差方程式は

$$e_n(k+1)=\frac{1}{D_f(z)}\Phi'(k+1)\theta(k) \quad (4.40)$$

と表わされる。対応する $\Phi(k+1)$ の調整は

$$\Phi(k+1)=\Phi(k)+\Delta\Phi(k) \quad (4.41)$$

$$\Delta\Phi(k)=b_r\Delta\varphi(k) \quad (4.42)$$

である。

ここで、(4.40) 式中の $1/D_f(z)$ を処理するために、つぎのフィルタを新たに導入する。

$$H(k+1)=FH(k)+g\theta'(k) \quad (4.43)$$

$$\zeta(k+1)=F\zeta(k)+\{FH(k)+g\theta'(k)\}\Delta\Phi(k+1) \quad (4.44)$$

式中、 $H(k)$ は $(n-\nu)\times(2n+1)$ の行列であり、 $\zeta(k)$ は $n-\nu$ 次元ベクトルである。また行列の組 (F, g, h) は、伝達関数 $1/D_f(z)$ の実現とし、 $F\in R^{(n-\nu)\times(n-\nu)}$, $g\in R^{n-\nu}$, $h\in R^{n-\nu}$ である。このとき

$$h'H(k)\cdot\Phi(k+1)-h'\zeta(k)=\frac{1}{D_f(z)}\Phi'(k+1)\theta(k) \quad (4.45)$$

が成立する。なぜなら、今

$$x(k)=H(k)\Phi(k+1)-\zeta(k) \quad (4.46)$$

とおくと

$$\begin{aligned} x(k+1) &= H(k+1)\Phi(k+2)-\zeta(k+1) \\ &= \{FH(k)+g\theta'(k)\}\{\Phi(k+1)+\Delta\Phi(k+1)\} \\ &\quad - \{F\zeta(k)+FH(k)\cdot\Delta\Phi(k+1) \\ &\quad + g\theta'(k)\Delta\Phi(k+1)\} \\ &= F\{H(k)\Phi(k+1)-\zeta(k)\}+g\Phi'(k+1)\theta(k) \\ &= Fx(k)+g\Phi'(k+1)\theta(k) \end{aligned} \quad (4.47)$$

が成立しているの、(4.47) 式は、その出力として $h'x(k)$ を合わせて考えれば (4.45) 式の右辺の内部記述にほかならない。したがって、定常状態で (4.45) 式が成立する。

以上の議論から、(4.40) 式は $\Phi(k+1)$ の形を残したままつぎのように変形できる。

$$e_n(k+1)=\Phi'(k+1)H'(k)h-h'\zeta(k) \quad (4.48)$$

式中の $h'\zeta(k)$ の項を処理するために、つぎのスカラ補助変数 $w(k)$ を導入する。

$$w(k+1)\varphi_c(k+1)h'\zeta(k) \quad (4.49)$$

ここで、 $\varphi_c(k)$ はスカラの可調整パラメータである。(4.48), (4.49) 式より次式が得られる。

$$e_n(k+1)+w(k+1)=\phi'(k+1)\beta(k) \quad (4.50)$$

ただし、 $\phi'(k)$, $\beta(k)$ はつぎのように定義される $2n+2$ 次元ベクトルである。

$$\phi(k)=[\Phi'(k), \varphi_c(k)-1]' \quad (4.51)$$

$$\beta(k)=[h'H(k), h'\zeta(k)]' \quad (4.52)$$

(4.50) 式に対して、前節の議論同様にリアプノフ関数を $V(k)=\phi'(k)\phi(k)$ ととり、パラメータ調整則を

$$\phi(k+1)=\phi(k)+\Delta\phi(k) \quad (4.53)$$

$$\Delta\phi(k)=\left\{-\frac{\alpha\{e_n(k)+w(k)\}\beta(k-1)}{\beta'(k-1)\beta(k-1)}\right\} \quad (4.54)$$

$$0<\alpha<2$$

と選ぶことにより、 $k\rightarrow\infty$ で $\{e_n(k)+w(k)\}\rightarrow 0$ が保証され、同時に $\phi(k)$ も定数に収束する。(4.44) 式中、 $\Delta\Phi(k)$ が 0 に収束することから、 $k\rightarrow\infty$ で $\zeta(k)\rightarrow 0$ となり、したがって (4.49) 式より $w(k)\rightarrow 0$ も保証される。以上の議論より $e_n(k)\rightarrow 0$ が保証され、適応目的が達成される。

なお、(4.42), (4.51) 式、および $0<|b_r|\leq b_M$ なる b_M が既知であることより実際の調整則は

$$\Delta\varphi(k)=-\frac{\text{sgn}(b_r)\alpha\cdot\{e_n(k)+w(k)\}H'(k-1)h}{b_M\beta'(k-1)\beta(k-1)} \quad (4.55)$$

$$\Delta\varphi_c(k)=-\frac{\alpha\cdot\{e_n(k)+w(k)\}h'\zeta(k-1)}{\beta'(k-1)\beta(k-1)} \quad (4.56)$$

$$0<\alpha<2$$

となる。またフィルタ (4.44) 式中には $\Delta\Phi(k+1)$ が含まれているが、これは

$$\begin{aligned} \Delta\Phi(k+1) &= -\frac{\alpha\{e_n(k+1)+w(k+1)\}H'(k)h}{\beta'(k)\beta(k)} \\ &= -\frac{\alpha\{e_n(k+1)+\varphi_c(k+1)h'\zeta(k)\}H'(k)h}{\beta'(k)\beta(k)} \end{aligned} \quad (4.57)$$

と表わされるから、 $e_n(k+1)$ が時刻 k において測定可能であれば実行することができる。ところが $e_n(k+1)$ は

$$e_n(k+1)=\xi_r(k+n)-\xi_m(k+n) \quad (4.58)$$

と書けることより、 n 次の状態変数フィルタから時刻 k で測定可能な信号より構成できる。したがって $\Delta\Phi(k+1)$ は (4.57) 式より計算することができる。

Fig. 2 Simulation result for example 1

Fig. 3 Simulation result for example 2

5. シミュレーション結果

ここでは、前章で示した適応系の有用性を確かめるために、2次のプラントとモデルに対して行った計算機シミュレーションの結果を示す。

例題としては、プラント伝達関数の分子の次数差が、1の場合と2の場合の二つを用いた。

【例題 1】

(プラント)

$$(z^2 + 0.6z + 1)y_p(k) = (2z - 0.6)u(k) \quad (5.1)$$

(モデル)

$$(z^2 + 0.7z + 0.1)y_m(k) = r(k) \quad (5.2)$$

基準入力としては $r(k) = 5 \sin(0.4k)$ を用いた。ここで、調整パラメータ、およびプラント、モデルの各状態変数の初期値はすべて 0、また $b_M = 2$ 、 $\alpha = 0.6$ とし、状態変数フィルタとして $D_w(z) = z - 0.2$ を用いた。適応系を作動させたときのモデルとプラントと出力を Fig. 2 に示す。

【例題 2】

(プラント)

$$(z^2 + 0.6z + 1)y_p(k) = u(k) \quad (5.3)$$

(モデル)

$$(z^2 + 0.7z + 0.1)y_m(k) = 0.5r(k) \quad (5.4)$$

基準入力としては $r(k) = 10 \sin(0.4k)$ を用いた。こ

こでも【例題 1】同様調整パラメータおよびプラント、モデルの状態変数の初期値はすべて 0、また $b_M = 1$ 、 $\alpha = 0.6$ とし、各フィルタは $D_w(z) = z^2 - 0.1z - 0.06$ 、 $D_f(z) = z^2 - 0.1z - 0.02$ を用いた。適応系を作動させたときのモデルとプラントの出力を Fig. 3 に示す。

いずれの場合も、20 ステップ程度でプラント出力がモデル出力に追従しており、本手法が有効であることを表わしている。

6. あとがき

本論文では、リアプノフ法により線形離散系のモデル規範形適応制御系の構成について考察した。本手法では、プラントとモデルを現時刻でその状態変数がすべてアクセシブルなシステムに変換することにより、問題を簡単化している。また、プラントの伝達関数の分子の次数差が 2 以上になったときにおいても、新たなフィルタを導入することにより、現時刻においてアクセシブルな信号のみから同様の適応系が構成できることを示した。

参考文献

- 1) I. D. Landau: Synthesis of Discrete Model Reference Adaptive Systems, IEEE Trans., **AC-16-3**, 507/508 (1971)
- 2) I. D. Landau and G. Bethoux: Algorithms for Discrete Model Reference Adaptive Systems, Proc. 6th IFAC World Congress, Boston, Paper 58.4 (1975)
- 3) T. Ionescu and R. Monopoli: Discrete Model Reference Adaptive Control with an Augmented Error Signal, Automatica, **13-5**, 507/517 (1977)
- 4) L. Hitz and B. D. O. Anderson: Discrete Positive-Real Functions and their Application to System Stability, Proc. IEE, **116-1**, 153/155 (1969)
- 5) 鈴木、高島: 超安定離散時間モデル規範形適応制御系の設計, 計測自動制御学会論文集, **13-5**, 433/438 (1977)
- 6) 藤井、水野: 離散時間モデル規範形適応制御系の一設計法, 第 21 回自動制御連合講演会前刷, 73/74 (1978)
- 7) A. Feuer and A. S. Morse: Adaptive Control of Single-Input Single-Output Linear Systems, IEEE Trans., **AC-23-4**, 557/569 (1978)
- 8) R. V. Monopoli: Model Reference Adaptive Control with an Augmented Error Signal, IEEE Trans., **AC-19-5**, 477/484 (1974)

《付 録》

(4.30) 式が成立することを文献 10 に沿って述べる。問題は

$$\begin{aligned} D_f(z)(a_{n-1}z^{n-1} + a_{n-2}z^{n-2} + \dots + a_0) \\ = (A_{n-1}z^{n-1} + \dots + A_0) + (B_{n-1}z^{n-1} \\ + \dots + B_0) \frac{D_f(z)}{D_u(z)} \end{aligned} \quad (A.1)$$

が成立するような A_i, B_i が存在するかということに帰着される。ここで

$$B_{n-1}z^{n-1} + \dots + B_0 = (F_{n-\nu-1}z^{n-\nu-1} + \dots + F_0)D_u(z) \quad (\text{A.2})$$

とおく。この右辺を (A.1) 式に代入すると

$$\begin{aligned} D_f(z)(a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0) \\ = (A_{n-1}z^{n-1} + \dots + A_0) + (F_{n-\nu-1}z^{n-\nu-1} \\ + \dots + F_0)D_p(z) \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

(A.3) 式は両辺とも $2n-\nu-1$ 次式であるから、ベキごとに係数を比較すると、

$$\begin{bmatrix} I_n & * \\ 0 & \begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{matrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_0 \\ \vdots \\ A_{n-1} \\ F_0 \\ \vdots \\ F_{n-\nu-1} \end{bmatrix} = f \quad (\text{A.4})$$

ここで f は $2n-\nu$ 次ベクトルで、その第 i 成分は (A.3) 式左辺の z^{i-1} の係数である。これより、 $A_0 \sim$

$A_{n-1}, F_0 \sim F_{n-\nu-1}$ は一意に決まり、(A.2) 式より B_i も決まる。

つぎに (4.31) 式について述べる。これは上と同様

$$\begin{aligned} D_f(z)(a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0^M) \\ = (C_{n-1}z^{n-1} + \dots + C_0) + (D_{n-(\nu-\mu)-1}z^{n-(\nu-\mu)-1} \\ + \dots + D_0) \frac{D_m(z)}{D_r(z)} \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

なる式を満たす C_i と D_i の存在性に帰着されるから、

$$\begin{aligned} D_{n-(\nu-\mu)-1}z^{n-(\nu-\mu)-1} + \dots + D_0 \\ = (G_{n-\nu-1}z^{n-\nu-1} + \dots + G_0)D_r(z) \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

とおけば、同様にして C_i, D_i を一意に決めることができる。また $\mu \leq \nu$ なる条件より

$$n-(\nu-\mu)-1 \leq n-1 \quad (\text{A.7})$$

となり、時刻 k で測定可能でない信号が現われることはない。