観測器を含む離散時間モデル規範形適応制御系の構成[†]

金 井 喜美雄*・出 川 喬 庸*

Construction of a Discrete Model Reference Adaptive Control System with an Observer

Kimio KANAI* and Tadayasu DEGAWA*

This paper deals with the problem of designing a model reference adaptive controller with an observer for a single-input single-output linear discrete system where only the input and the output can be measured. An adaptive observer which is constructed on the basis of the prior information regarding the relative degree of the pulse transfer function of the plant is employed to estimate the parameters and the state variables of the plant, and these estimates, in turn, are used to adjust the parameters of a controller. The synthesized adaptive controller is such that the tracking error between the output of the controlled system and the output of a pre-specified linear reference model is regulated to zero asymptotically. The proposed controller has a simple structure with the determined convergence rate not affected by the relative degree of the plant.

Simulation studies of third order systems with different relative degrees are shown to justify the proposed scheme.

1. ま え が き

未知動特性を含み、入出力信号のみが観測できる線形システムを制御する適応制御系に関しては、近年規範モデルを用いた種々の方式が提案されており、一般に間接制御と直接制御に分類されて研究されている^{1)~4)}。間接制御はオブザーバを用いてプラントのパラメータを同定し、これらの推定値を用いて制御パラメータを決定する方式であり、直接制御はプラントのパラメータの同定を行わないで直接、制御パラメータを決定する方式である。文献 2, 4 の方式では、プラントの伝達関数の分母と分子の次数差が大きくなるに従って制御器が複雑となり、実際の適用が困難となり

やすい。本研究では単入力単出力線形離散時間系に関して、制御入力決定を容易にするような分母と分子の次数差に基づいたプラントの入出力関係式を導出し、パルス伝達関数の分母と分子の次数差が大きくなっても、構造が簡単で収束の速さの変わらない観測器を含むモデル規範形適応制御器の設計を考察する。適応観測器は分母と分子の次数の情報を取り入れて、次数差が大きくなれば収束が速くなるように構成され、この適応観測器の推定値を用いる適応制御器に関しては、設計パラメータの選択により、いかなる次数差においても同様の繰返し回数でプラントの出力が規範モデルの出力に一致することを明らかにし、これを達成するために必要な零点の消去と前置補償器の関係を内部構造に立ち入って調べる。異なった次数差をもつ 3 次系のシミュレーション研究によって本方式の正当性を実証する。

2. 問題の記述

つぎの差分方程式で記述される線形固定係数系を考える。

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + \beta u_k \\ y_k = c^T x_k \end{cases} \quad (1)$$

ここで、 $x_k \in R^n$, $u_k \in R^1$, $y_k \in R^1$

$$A \triangleq \begin{bmatrix} -\alpha \frac{\mathbf{I}_{(n-1) \times (n-1)}}{0 \dots \dots \dots 0} & \alpha^T \triangleq [\alpha_{n-1} \ \alpha_{n-2} \dots \alpha_0] \\ & c^T \triangleq [1 \ 0 \dots \dots \dots 0] \end{bmatrix}$$

$$\beta^T \triangleq [0 \dots 0 \ \beta_m \ \beta_{m-1} \dots \beta_0] \quad \beta_m \neq 0$$

(1)式において、入力 u_k 、出力 y_k のみが観測できる信号とし、状態量 x_k 、パラメータ α, β は未知とする。また系は完全可制御・可観測とし、プラントのパルス伝達関数の分母と分子のそれぞれの次数 n, m は既知でその零点は単位円内にあるとする。

さらに、プラントの出力 y_k の望ましい応答は基準入力 r_k に対する安定な規範モデルの出力 y_{Mk} で記述され、つぎのような線形固定係数系で与えられるものとする。

[†] 第 8 回制御理論シンポジウムで一部発表 (昭 54・5)
第 18 回計測自動制御学会学術講演会で一部発表 (昭 54・8)

* 防衛大学校 横須賀市走水 1-10-20

* The National Defence Academy, Yokosuka
(Received October 1, 1979)
(Revised February 14, 1980)

$$\begin{cases} x_{Mk+1} = A_M x_{Mk} + \beta_M r_k \\ y_{Mk} = c^T x_{Mk} \end{cases} \quad (2)$$

ここで, $x_{Mk} \in R^n$, $r_k \in R^1$, $y_{Mk} \in R^1$

$$A_M \triangleq \begin{bmatrix} -\alpha_M & \frac{I_{(n-1) \times (n-1)}}{0 \dots \dots \dots 0} \end{bmatrix}$$

$$\alpha_M^T \triangleq [\alpha_{Mn-1} \quad \alpha_{Mn-2} \dots \alpha_{M0}]$$

$$\beta_M^T \triangleq [0 \dots 0 \quad \beta_{Mm^*} \quad \beta_{Mm^*-1} \dots \beta_{M0}]$$

(2)式において, 出力の未来値を用いなくてプラントが規範モデルの出力に追従する制御器を設計するに必要な仮定は $m^* \leq m$ である.

(1)式のプラントの入出力関係は, 任意定数 $|\lambda_i| < 1$ を用いてつぎのように書くことができる⁵⁾.

$$\begin{cases} \bar{x}_{k+1} = \Lambda \bar{x}_k - a y_k + b u_k \\ y_k = p^T \bar{x}_k \end{cases} \quad (3)$$

ここで,

$$\Lambda \triangleq \text{diag}(-\lambda_i), \quad i=1, 2, \dots, n, \quad \lambda_i \neq \lambda_j \text{ for } i \neq j$$

$$a^T \triangleq [a_1 \quad a_2 \dots a_n] \quad b^T \triangleq [b_1 \quad b_2 \dots b_n]$$

$$p^T \triangleq [1 \quad 1 \dots 1]$$

(3)式で, a, b は新たに定義した未知パラメータであり, $\bar{x}_k$ は未知状態量を表す. (1)式と(3)式はつぎのような関係になる⁶⁾.

$$x_k = T_s(\lambda) \bar{x}_k \quad (4)$$

$$\begin{cases} \alpha = T_s(\lambda) a + D(\Lambda) \\ \beta = T_s(\lambda) b \end{cases} \quad (5)$$

ここで,

$$T_s(\lambda) \triangleq [C(\Lambda/\lambda_1) : C(\Lambda/\lambda_2) : \dots : C(\Lambda/\lambda_n)]$$

$$C^T(\Lambda) \triangleq [1 : D^T(\Lambda)]$$

上式で $C(\Lambda)$ は対角マトリクス Λ の特性多項式の係数で作られるベクトルで, $C(\Lambda/\lambda_i)$ はこの多項式から因数 $(z + \lambda_i)$ を除いた係数から作られるベクトルである.

以上から, 本研究における適応制御問題は(3)式において入力 u_k と出力 y_k のみが観測されるとき, パラメータ (a, b) を同定し, 内部状態量 $\bar{x}_k$ を推定する適応方式 (適応観測器のシンセシス) を導き, これらの推定値を用いてプラントの出力 y_k が規範モデルの出力 y_{Mk} に漸近的に一致するような制御入力 u_k を決定する (制御器の構成) ことである.

3. 適応観測器の設計 (プラントのパルス伝達関数の分母分子の次数差に基づく構成)

(3)式で記述されるプラントの入出力関係は, 補助状態ベクトル v_k, w_k を用いるとつぎのように書き換えられる.

$$\begin{cases} v_{k+1} = \Lambda v_k + p y_k & v_0^T = [0 \dots 0] \\ w_{k+1} = \Lambda w_k + p u_k & w_0^T = [0 \dots 0] \\ \theta_{k+1} = \Lambda \theta_k & \theta_0^T \triangleq [1 \dots 1] \end{cases} \quad (6)$$

$$y_k = -a^T v_k + b^T w_k + \bar{x}_0^T \theta_k \quad (7)$$

$$\bar{x}_k = -a \otimes v_k + b \otimes w_k + \bar{x}_0 \otimes \theta_k \quad (8)$$

ここで, θ_k は初期状態量を推定するために導入された変数であり, 記号 $\otimes$ は二つのベクトルの対応する要素ごとの掛算を意味する.

適応観測器の構造をつぎのように設定する.

$$\eta_{k+1} = \mu \eta_k + \phi \gamma_k \quad \eta_0^T = [0 \dots 0 : 0 \dots 0 : 1 \dots 1] \quad (9)$$

$$\hat{x}_k = -\hat{a}_k \otimes v_k + \hat{b}_k \otimes w_k + \hat{x}_0 \otimes \theta_k \quad (10)$$

$$\hat{y}_k = \eta_k^T \hat{h}_k = p^T \hat{x}_k \quad (11)$$

ここで,

$$\eta_k^T \triangleq [v_k^T, w_k^T, \theta_k^T] \quad \hat{h}_k^T \triangleq [-\hat{a}_k^T, \hat{b}_k^T, \bar{x}_0^T]$$

$$\mu \triangleq \begin{bmatrix} \Lambda & O_{n \times n} & O_{n \times n} \\ O_{n \times n} & \Lambda & O_{n \times n} \\ O_{n \times n} & O_{n \times n} & \Lambda \end{bmatrix} \quad \phi \triangleq \begin{bmatrix} p & O_{n \times 1} \\ O_{n \times 1} & p \\ O_{n \times 1} & O_{n \times 1} \end{bmatrix}$$

$$\gamma_k^T \triangleq [y_k, u_k]$$

パラメータ調整の関係式は評価関数,

$$J_k(\hat{h}) = J_0(\hat{h}) + \sum_{i=1}^k (y_i - \eta_i^T \hat{h})^2$$

$$J_0(\hat{h}) \triangleq (\hat{h} - \hat{h}_0)^T Q_0^{-1} (\hat{h} - \hat{h}_0) \quad (12)$$

を最小にするように選ばれ, 次式が得られる⁷⁾.

$$\hat{h}_{k+1} = \hat{h}_k + K_{k+1} (y_{k+1} - \eta_{k+1}^T \hat{h}_k) \quad (13)$$

ここで,

$$K_{k+1} = Q_k \eta_{k+1} / (1 + \eta_{k+1}^T Q_k \eta_{k+1}) \quad (14)$$

$$Q_{k+1} = \left(I - Q_k \frac{\eta_{k+1} \eta_{k+1}^T}{1 + \eta_{k+1}^T Q_k \eta_{k+1}} \right) Q_k \quad (15)$$

繰返し計算によるこの適応観測器の収束は, プラントへの入力 u_k と出力 y_k が有界のときは容易に証明され, (12)式の Q_0 を $Q_0^{-1} = \varepsilon I$ に選ぶならば 3 回でほぼ収束する⁷⁾. ここで, ε は十分に小さな正の定数であり, その値の選定は使用する計算機の有効桁数などに依存する.

つぎにプラントのパルス伝達関数の分母と分子の次数差に基づく設計法を検討する.

プラントの伝達関数の分母と分子のそれぞれの次数 n, m が既知であると仮定しているから, $0 \leq m \leq n-2$ のとき $\beta_i = 0$ ($i = m+1, m+2, \dots, n-1$) であり, 未知パラメータの数は α で n 個, β で $m+1$ 個, 合計 $n+m+1$ 個であるにすぎない. いま, 変換マトリクス $T_s(\lambda)$ の第 i 行ベクトルを d_i で表わすと, (5)式の第2式と上の関係とから次式が得られる.

$$0 \leq m \leq n-2 \text{ のとき} \\ d_i b = 0 \quad i=1, 2, \dots, n-m-1 \quad (16) \text{ (注1)}$$

そして, (12)式の評価関数における $Q_0, \hat{h}_0$ は $0 \leq m \leq n-2$ のとき, つぎの評価関数を最小にするように選ぶことにする.

$$J(\hat{h}) = J_{m-n+1}(\hat{h}) + \sum_{t=m-n+2}^0 (\xi_t^T \hat{h})^2 \quad (17)$$

ここで、

$$J_{m-n+1}(\hat{h}) \triangleq (\hat{h} - \hat{h}_{m-n+1}) Q_0^{-1} (\hat{h} - \hat{h}_{m-n+1})$$

$$Q_0^{-1} = \varepsilon I, \quad \varepsilon \text{ は小さな正の定数}$$

$$\xi_t^T \triangleq [0 \cdots 0 : d_{1-t} : 0 \cdots 0], \quad t=0, -1, \dots, m-n+2$$

(17) 式の評価関数を最小にする $Q_0, \hat{h}_0$ は (13)~(15) 式と同様の繰返し計算で求めることができる。ただし、 $m=n-1$ のときは (17) 式のような評価関数は得られないので、(12) 式において単に $Q_0^{-1} = \varepsilon I$ として計算を実行する。(17) 式の評価関数を最小にする、 $\hat{h}_0, Q_0$ を具体的に求めるためには、 $t=m-n+2, m-n+1, \dots, -1, 0$ と変化させてパラメータ推定のアルゴリズムを実行しているので、こうして得られる $Q_0, \hat{h}_0$ を用いるとプラントに適応観測器を適用する前に、パラメータ推定のアルゴリズムが $n-m-1$ 回繰返されたことになり、 ε を十分小さく選定するならば、プラントに適応観測器を適用した後は、前述した収束回数 $3n$ 回から $n-m-1$ 回を引いた差 $2n+m+1$ 回でパラメータの推定値は真値にほぼ収束する。

4. 制御器の構成

4.1 プラントが既知の場合

制御入力の設定を容易にするために、分母分子の次数差に基づいて (1) 式のプラントの入出力関係を書き換えるとうぎのようになる。

(1) 式から次式が得られる。

$$c^T A^{i-1} = [\underbrace{\times \times \cdots \times}_{i} 10 \cdots 0] \quad 1 \leq i \leq n \quad (18)$$

ここで、記号 $\times$ は一般に非零要素を表わす。

つぎに、ベクトル β の構造から次式が成り立つ。

i) $m=n-1$ のとき

$$c^T A^{i-1} \beta = \beta_m \quad \text{for } i=n-m \quad (19)$$

ii) $0 \leq m \leq n-2$ のとき

$$c^T A^{i-1} \beta = \begin{cases} 0 & \text{for } i=1, 2, \dots, n-m-1 \\ \beta_m & \text{for } i=n-m \end{cases} \quad (20)$$

したがって、(1) 式に (19), (20) 式の関係を適用するとつぎの関係式が成り立つことがわかる。

(注 1) (16) 式を書き換えると $\xi_t^T \hat{h} = 0, t=0, -1, \dots, m-n+2$ となり、真のパラメータ h が満たすべき $n-m-1$ 個の方程式が得られるが未知数が $3n$ であるから、 h を決定することはできない。しかしながら、評価関数

$$J(\hat{h}) = J_{m-n+1}(\hat{h}) + \sum_{t=m-n+2}^0 (\xi_t^T \hat{h} - \xi_t^T \hat{h})^2 = J_{m-n+1}(\hat{h}) + \sum_{t=m-n+2}^0 (\xi_t^T \hat{h})^2$$

を最小にする $\hat{h}_0$ と Q_0 を決定することができる。

$$\left. \begin{aligned} y_{k+i-1} &= c^T A^{i-1} x_k \quad \text{for } i=1, 2, \dots, n-m \\ y_{k+n-m} &= c^T A^{n-m} x_k + \beta_m u_k \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

いま、定数 $f_i (i=1, 2, \dots, n-m)$ を方程式 $z^{n-m} + f_1 z^{n-m-1} + f_2 z^{n-m-2} + \dots + f_{n-m} = 0$ の根がすべて単位円内にあるように選定して、(21) 式を用いると次式の関係が得られる。

$$\begin{aligned} & y_{k+n-m} + f_1 y_{k+n-m-1} + f_2 y_{k+n-m-2} \\ & + \dots + f_{n-m-1} y_{k+1} + f_{n-m} y_k \\ & = \tau_c x_k + f_{n-m} y_k + \beta_m u_k \end{aligned} \quad (22)$$

ここで、

$$\tau_c \triangleq c^T A^{n-m} + f_1 c^T A^{n-m-1} + \dots + f_{n-m-1} c^T A$$

また、上式に対応して規範モデルの入出力関係は (2) 式を一般化してつぎのように書き換えられる。

$$\begin{aligned} & y_{Mk+n-m} + f_1 y_{Mk+n-m-1} + f_2 y_{Mk+n-m-2} \\ & + \dots + f_{n-m-1} y_{Mk+1} + f_{n-m} y_{Mk} \\ & = \tau_M x_{Mk} + f_{n-m} y_{Mk} + \beta_{Mm} r_k \end{aligned} \quad (23)$$

ただし、 $m=m^*$ のときは $\beta_{Mm} = \beta_{Mm^*}, m > m^*$ のときは $\beta_{Mm} = 0$ を意味する。

ここで、

$$\tau_M \triangleq c^T A^{n-m} + f_1 c^T A^{n-m-1} + \dots + f_{n-m-1} c^T A$$

つぎに制御出力誤差 e_{1k} をつぎのように定義する。

$$e_{1k} \triangleq y_{Mk} - y_k \quad (24)$$

(23) 式から (22) 式を引いて (24) 式を用いると次式が得られる。

$$\begin{aligned} & e_{1k+n-m} + f_1 e_{1k+n-m-1} + \dots + f_{n-m-1} e_{1k+1} + f_{n-m} e_{1k} \\ & = q_k - \tau_c x_k - \beta_m u_k \end{aligned} \quad (25)$$

ここで、

$$q_k \triangleq \tau_M x_{Mk} + f_{n-m} T_{1k} + \beta_{Mm} r_k$$

はすべて既知量である。

したがって、もし制御入力 u_k をつぎのように選定するならば、

$$u_k^* = (q_k - \tau_c x_k) / \beta_m \quad (26)$$

(25) 式は次式のようになる。

$$\begin{aligned} & e_{1k+n-m} + f_1 e_{1k+n-m-1} + \dots + f_{n-m-1} e_{1k+1} + f_{n-m} e_{1k} \\ & = 0 \end{aligned} \quad (27)$$

このとき、(27) 式から $k \rightarrow \infty$ のとき $e_{1k} \rightarrow 0$ となることがわかる。さらに、 $f_i = 0 (i=1, 2, \dots, n-m)$ と選定するならば、 $e_{1k+n-m} = 0$ となり、(26) 式の制御入力 u_k^* を与えた後 $n-m$ 回でプラントの出力は規範モデルの出力に一致する。

一般に、基準入力 r_k とプラントの出力間のパルス伝達関数が、規範モデルのパルス伝達関数に一致するためには、プラントの零点の消去と前置補償器が必要となることが明らかであるが、本方式の u_k^* を用いた場合、いかにしてそれが達成されているかを内部構造に

Fig. 1 Blockdiagram of a model reference control system

立ち入って考察する。

いま、(26)式の制御入力 u_k^* をつぎのように書き換える。

$$u_k^* = (q_{fk} - k_p x_k) / \beta_m \quad (28)$$

ここで、

$$\begin{aligned} q_{fk} &\triangleq \beta_{Mm} r_k + k_f x_{Mk} \\ k_f &\triangleq c^T A_M^{n-m} + f_1 c^T A_M^{n-m-1} \\ &\quad + \cdots + f_{n-m-1} c^T A_M + f_{n-m} c^T \\ k_p &\triangleq c^T A^{n-m} + f_1 c^T A^{n-m-1} \\ &\quad + \cdots + f_{n-m-1} c^T A + f_{n-m} c^T \end{aligned}$$

このとき、制御系は Fig. 1 のように構成されている。

まず、 q_{fk} と y_k 間のパルス伝達関数を求める。

(28)式を(1)式に代入すると

$$\left. \begin{aligned} x_{k+1} &= (A - \beta k_p / \beta_m) x_k + \beta q_{fk} / \beta_m \\ y_k &= c^T x_k \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

となり、 q_{fk} と y_k 間のパルス伝達関数はつぎのように与えられる。

$$\begin{aligned} Y(z)/Q_f(z) &= c^T (zI - A + \beta k_p / \beta_m)^{-1} \beta / \beta_m \\ &= c^T \text{adj}(zI - A) \beta / \beta_m |zI \\ &\quad - A + (\beta / \beta_m) k_p| \end{aligned} \quad (30)$$

つぎに、 $\beta_m |zI - A + (\beta / \beta_m) k_p|$ を計算する。

$$\begin{aligned} \beta_m |zI - A + (\beta / \beta_m) k_p| \\ &= \beta_m |zI - A| (1 + k_p (zI - A)^{-1} \beta / \beta_m) \\ &= \beta_m |zI - A| + k_p \text{adj}(zI - A) \beta \end{aligned} \quad (31)$$

また、次式が成り立つことは容易に示される。

$$A \text{adj}(zI - A) = \text{adj}(zI - A) A \quad (32)$$

$$c^T \text{adj}(zI - A) = [z^{n-1} z^{n-2} \cdots z \ 1] \quad (33)$$

(32), (33)式を用いると、つぎの関係式が成り立つ。

$$\begin{aligned} c^T \text{adj}(zI - A) A^{i-1} \\ &= [\underbrace{\times \cdots \times}_{i-1} \alpha(z) z^{n-1} z^{n-2} \cdots z^{i-1}] \end{aligned} \quad (34)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \alpha(z) &\triangleq z^n - |zI - A| \\ &= -(\alpha_{n-1} z^{n-1} + \alpha_{n-2} z^{n-2} + \cdots + \alpha_0) \end{aligned}$$

(34)式を用いると、さらにつぎの関係式が得られる。

$$\begin{aligned} c^T \text{adj}(zI - A) A^{i-1} \beta \\ &= \beta_m z^{m+i-1} + \beta_{m-1} z^{m-1+i-1} + \cdots + \beta_0 z^{i-1} \\ &\quad i=1, 2, \dots, n-m \end{aligned} \quad (35)$$

$$c^T \text{adj}(zI - A) A^{n-m} \beta$$

$$\begin{aligned} &= \beta_m \alpha(z) + \beta_{m-1} z^{n-1} \\ &\quad + \cdots + \beta_0 z^{n-m} \end{aligned} \quad (36)$$

さらに、(32), (35), (36)式を用いると(31)式における $k_p \text{adj}(zI - A) \beta$ はつぎのように計算することができる。

$$\begin{aligned} k_p \text{adj}(zI - A) \beta \\ &= c^T \text{adj}(zI - A) A^{n-m} \beta \\ &\quad + f_1 c^T \text{adj}(zI - A) A^{n-m-1} \beta + \cdots \\ &\quad + f_{n-m} c^T \text{adj}(zI - A) \beta \\ &= -\beta_m |zI - A| \\ &\quad + (z^{n-m} + f_1 z^{n-m-1} + \cdots + f_{n-m}) (\beta_m z^m \\ &\quad + \beta_{m-1} z^{m-1} + \cdots + \beta_0) \end{aligned} \quad (37)$$

(37)式を(31)式に代入すると次式を得る。

$$\begin{aligned} |\beta_m (zI - A) + \beta k_p| \\ &= (z^{n-m} + f_1 z^{n-m-1} + \cdots + f_{n-m}) (\beta_m z^m \\ &\quad + \beta_{m-1} z^{m-1} + \cdots + \beta_0) \end{aligned} \quad (38)$$

(38)式から閉ループ系の極はプラントのパルス伝達関数の零点と等しい m 個の極と、設計者が任意に選択するパラメータ $f_i (i=1, 2, \dots, n-m)$ によって指定する $n-m$ 個の極をもつことがわかる。そして、当然のことながら、プラントのパルス伝達関数の零点はすべて単位円内にあると仮定しているのでこの系は安定である。

(38)式を(30)式に代入すると、 q_{fk} と y_k 間の伝達関数はつぎのように陽な形で表わすことができる。

$$\frac{Y(z)}{Q_f(z)} = \frac{1}{z^{n-m} + f_1 z^{n-m-1} + \cdots + f_{n-m}} \quad (39)$$

(39)式の関係から明らかなように、この制御系においてはまず、状態フィードバックによってプラントの零点を相殺している。

つぎに r_k と q_{fk} 間のパルス伝達関数を求める。

q_{fk} に関する定義式を z 変換すると次式が得られる。

$$Q_f(z) = \beta_{Mm} R(z) + k_f X_M(z) \quad (40)$$

(2)式で、 x_{Mk} の初期値を零として変換すると $R(z)$ と $X_M(z)$ の関係はつぎようになる。

$$X_M(z) = (zI - A_M)^{-1} \beta_M R(z) \quad (41)$$

(41)式を(40)式に代入すると

$$\begin{aligned} Q_f(z)/R(z) &= \beta_{Mm} + k_f (zI - A_M)^{-1} \beta_M \\ &= \frac{\beta_{Mm} |zI - A_M| + k_f \text{adj}(zI - A) \beta_M}{|zI - A_M|} \end{aligned} \quad (42)$$

となり、前述したような手順によって $\beta_{Mm} |zI - A| + k_f \text{adj}(zI - A) \beta_M$ がつぎようになることは容易に示される。

$$\beta_{Mm} |zI - A_M| + k_f \text{adj}(zI - A_M) \beta_M$$

$$= (z^{n-m} + f_1 z^{n-m-1} + \dots + f_{n-m}) (\beta_{Mm} z^m + \beta_{Mm-1} z^{m-1} + \dots + \beta_{M0}) \quad (43)$$

この関係から (42) 式の伝達関数はつぎのように求まる。

$$\frac{Q_f(z)}{R(z)} = \frac{(z^{n-m} + f_1 z^{n-m-1} + \dots + f_{n-m}) c^T \text{adj}(zI - A_M) \beta_M}{|zI - A_M|} \quad (44)$$

そして, (39), (44) 式より r_k と y_k 間のパルス伝達関数は次式のように与えられ, 規範モデルのパルス伝達関数と一致する。

$$Y(z)/R(z) = c^T (zI - A_M)^{-1} \beta_M \quad (45)$$

4.2 プラントが未知の場合

さて, β_m , τ_c および x_k が未知である場合には, (26) 式で与えられる u_k^* を発生することができない。そこで, 適応観測器の推定値からこれらの推定値 $\hat{\beta}_{mk}$, $\hat{\tau}_{ck}$, $\hat{x}_k$ を求め, 制御入力 u_k^* の推定値 $\hat{u}_k$ を構成する。 $\hat{x}_k$, $\hat{a}_k$, $\hat{\beta}_k$ は (4), (5) 式に対応してつぎのようになる。

$$\hat{x}_k = T_x(z) \hat{\hat{x}}_k \quad (46)$$

$$\left. \begin{aligned} \hat{a}_k &= T_a(z) \hat{\hat{a}}_k + D(A) \\ \hat{\beta}_k &= T_\beta(z) \hat{\hat{\beta}}_k \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

そして, マトリクス A の推定値 $\hat{A}_k$ を

$$\hat{A}_k = \begin{bmatrix} -\hat{a}_k & \frac{I_{(n-1) \times (n-1)}}{0 \dots \dots \dots 0} \end{bmatrix} \quad (48)$$

とし, τ_c の推定値 $\hat{\tau}_{ck}$ を

$$\hat{\tau}_{ck} = c^T \hat{A}_k^{n-m} + f_1 c^T \hat{A}_k^{n-m-1} + \dots + f_{n-m-1} c^T \hat{A}_k \quad (49)$$

と設定する。

以上から $\hat{u}_k$ をつぎのように与えることにする。

$$\hat{u}_k = (q_k - \hat{\tau}_{ck} \hat{x}_k) / \hat{\beta}_{mk} \quad (50)$$

ここで, $\hat{\beta}_{mk}$ が零または零に非常に近づいた値が計算の途中で起こらないものとする。

したがって, 適応観測器の推定値が真値に収束したとき $\hat{\beta}_{mk} \Rightarrow \beta_m$, $\hat{\tau}_{ck} \Rightarrow \tau_c$, $\hat{x}_k \Rightarrow x_k$ となり, $\hat{u}_k \Rightarrow u_k^*$ となるので (27) 式から $k \rightarrow \infty$ のとき $e_{1k} \Rightarrow 0$ となり, プラントの出力は規範モデルの出力に漸近することが明らかである。

さらに, 3 章で述べた適応観測器は $2n+m+1$ 回ではば収束することが示されているので $k=2n+m+1$ で $\hat{u}_k = u_k^*$ となり, $f_i = 0 (i=1, 2, \dots, n-m)$ と選定するならばその後 $n-m$ 回で制御出力誤差 e_{1k} は零となる。したがって, プラントのパルス伝達関数の分母と分子の次数差がいかなるときにおいても, $3n+1$ 回の繰返しでプラントの出力が規範モデルの出力に一致することがわかる。Fig. 2 は提案した適応制御器

Fig. 2 An adaptive control system

の構成を示している。

5. 例題

本方式の有効性を検討するために 3 次系の未知プラントおよび規範モデルを取り上げ, 基準入力, 設計パラメータおよび次数差を以下のように設定して計算を実行する。なお, 使用した計算機は NEAC 2200 である。

(1) 未知プラント

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} -\alpha_2 & 1 & 0 \\ -\alpha_1 & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} \beta_2 \\ \beta_1 \\ \beta_0 \end{bmatrix} u_k, \quad x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$y_k = x_{1k}$$

(2) 規範モデル ($n-m=3$)

$$x_{Mk+1} = \begin{bmatrix} -0.8 & 1 & 0 \\ -0.2 & 0 & 1 \\ -0.16 & 0 & 0 \end{bmatrix} x_{Mk} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} r_k, \quad x_{M0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$y_{Mk} = x_{M1k}$$

Fig. 3 Computational results of parameter identification for a third-order system ($n-m=1$, $f_1=-0.1$)

Fig. 4 Computational result of output tracking response for a third-order system ($n-m=1$, $f_1=-0.1$)

(3) 基準入力

$$r_k = 0.2 \sin 0.5k + 0.3 \sin k + 0.5 \sin 2k$$

(4) 設計パラメータ

$$\lambda_1=0.1, \lambda_2=0.2, \lambda_3=0.3, Q_{m-n+1}=10^{20}I$$

(5) 次数差

(i) 次数差 1 のとき

$$\alpha_2=1.2, \alpha_1=-0.25, \alpha_0=-0.3$$

$$\beta_2=4.0, \beta_1=0.4, \beta_0=0.4$$

(a) $f_1=-0.1$ のとき

(b) $f_1=0$ のとき

(ii) 次数差 3 のとき

$$\alpha_2=1.2, \alpha_1=-0.25, \alpha_0=-0.3$$

$$\beta_2=0, \beta_1=0, \beta_0=2.0$$

(a) $f_1=0.3, f_2=0.02, f_3=0.001$ のとき

(b) $f_1=f_2=f_3=0$ のとき

パラメータの同定状況およびプラントと規範モデルの出力の応答を次数差の異なる各場合について計算を実行したのが Fig. 3~Fig. 10 である。これらの計算結果からパラメータの推定値は $2n+m+1$ 回で収束し、また $f_i=0 (i=1, 2, \dots, n-m)$ に選べば、規範モデルとの出力誤差が $3n+1$ 回で零になることが明らかである。

6. あとがき

本研究では、適応制御器の設計を容易にするプラントの入出力関係式を導き、プラントのパルス伝達関数の分母と分子の次数差の情報に基づく設計法を取り上

Fig. 5 Computational results of parameter identification for a third-order system ($n-m=1$, $f_1=0$)

Fig. 6 Computational result of output tracking response for a third-order system ($n-m=1$, $f_1=0$)

げ、次数差が大きくなっても構造が簡単で収束の速さの変わらない適応観測器を構成した。すなわち、分母と分子の次数差がいかなくとも適応観測器は $2n+m+1$ 回で収束し、モデル規範形適応制御器に関しては $3n+1$ 回の繰返しでプラント出力が規範モデルに一致することを明らかにし、3次系の例題のシミュレーションで実証した。さらに、適応観測器の設計においてはプラントのもつ初期値の推定も考慮してい

Fig. 7 Computational results of parameter identification for a third-order system ($n-m=3$, $f_1=0.3$, $f_2=0.02$, $f_3=0.001$)

Fig. 8 Computational results of output tracking response for a third-order system ($n-m=3$, $f_1=0.3$, $f_2=0.02$, $f_3=0.001$)

Fig. 9 Computational results of parameter identification for a third-order system ($n-m=3$, $f_1=f_2=f_3=0$)

Fig. 10 Computational result of output tracking response for a third-order system ($n-m=3$, $f_1=f_2=f_3=0$)

るので良好な収束特性が得られた。しかしながら、制御系全体の安定性に関する理論的保証は、未解決の問題として今後の研究に残されている。

参考文献

- 1) K. S. Narendra and L. S. Valavani: Stable Adaptive Observers and Controllers, Proc. of IEEE, **64**-8, 1198/1208 (1976)
- 2) R. V. Monopoli: Model Reference Adaptive Control with an Augmented Error Signal, IEEE Trans. on Automatic Control, **AC-19**-5, 474/484 (1974)
- 3) K. S. Narendra and L. S. Valavani: Stable Adaptive Controller Design-Direct Control, IEEE Trans. on Automatic Control, **AC-23**-4, 570/583 (1978)
- 4) A. Feuer and A. S. Morse: Adaptive Control of Single-Input, Single-Output Linear Systems, IEEE Trans. on Automatic Control, **AC-23**-4, 557/569 (1978)
- 5) 金井, 出川, 塚原: アダプティブ・オブザーバの設計とその VTOL 飛行制御系への適用, 日本航空宇宙学会誌, **25**-285, 494/501 (1977)
- 6) 金井, 野口: 適応観測器の過渡特性の改善, 計測自動制御学会論文集, **15**-2, 159/164 (1979)
- 7) 金井, 出川: 収束特性改善を考慮した離散時間適応観測器の設計, 計測自動制御学会論文集, **15**-5, 572/577 (1979)