微分非直線性誤差を軽減した振幅確率密度関数測定手法[†]

山 田 光*・苅 屋 公 明**

A New Method to Measure the Amplitude Probability Density Function Reducing the Differential Non-Linearity of A. D. C.

Hikaru YAMADA* and Komyo KARIYA**

The differential non-linearity (D. N. L.) of an A-D converter (A. D. C.) is the most influential characteristic to the measurement of probability density function (P. D. F.) of random signals. We have already established in (1) the method to measure P. D. F., reducing D. N. L., under the condition in which a successive approximation type or a parallel type A. D. C. is used. This kind of A. D. C. has a short conversion time and is used in various fields, but has a relatively large D. N. L.. For this reason, this kind of A. D. C. is scarcely used in the measurement of P. D. F..

This paper presents another new method to measure P. D. F., reducing D. N. L., under the same condition. In the new method, a supplementary ramp signal is employed to average the least significant divisions of A. D. C.. The following results are obtained. [1] This new method enables one to detect the probability jump that corresponds to a discontinuity in a probability distribution function or a thin spectrum in the P. D. F.. [2] The conversion speed is increased as compared with the old method in (1). Finally, the experiments are carried out to verify the effect of this method.

1. 緒 言

不規則連続信号やランダムパルスの振幅確率密度関数の測定には、A-D 変換過程における微分非直線性

Differential Non-Linearity (D. N. L.) をできる限り小さくしなければならない。D. N. L. は A-D 変換器の入力電圧分解幅 ΔV の不均一性であって、連続したなめらかな振幅確率密度関数をもつ被処理信号に対しては測定結果を曲線のまわりにばらつかせてしまい、細かいひげ状の確率密度（確率分布関数上では不連続な跳躍）を「確率ジャンプ」と呼ぶことにするが、これをまったく隠してしまう⁵⁾。

Wilkinson 方式は最も D. N. L. の少ない A-D 変換方式で、放射線波高分析装置用の振幅-時間変換形の一種である。これは他の方式に比べて微分直線性のうで 10 倍以上もすぐれているが、汎用性および速度に欠けるため一般の信号処理装置や振幅確率密度関数測定器には使用されず、これらの装置にはもっぱら逐次比較方式や並列比較方式の高速で汎用性の高い A. D. C. (これらを汎用 A. D. C. とよぶことにする) が用いられている¹⁾。

汎用 A. D. C. は D. N. L. による誤差が非常に大きいために測定結果がちらばり、ましてや確率ジャンプの検出は不可能に近い。それゆえ汎用 A. D. C. はなめらかで変化のゆるやかな確率密度関数の測定にしか用いられておらず、それも曲線のちらばりが大きいまま使用されている。そこで、本論文では特別に D. N. L. を少なくする方式をとっているわけではないところの汎用 A. D. C. を使って D. N. L. をできる限り軽減し、正確な振幅確率密度関数を得る方法つまり確率ジャンプも正しく検出できる手法を開発することを目的としている。すでに文献 1 に報告した手法は、被処理振幅が小さいところで D. N. L. 誤差軽減効果が小さくなる欠点をもつので、今回は D. N. L. 誤差軽減効果が、被処理振幅に依存しない新しい方式について検討した。その結果良好に D. N. L. 誤差軽減効果が得られたので実験結果とともに報告する。

[†] 第 16 回理工学における同位元素研究発表会で発表（昭 54・6）

* 広島電機大学 広島市安芸区瀬野川町中野 595

** 立命館大学理工学部 京都市北区等持院北町 28

Hiroshima Denki Institute of Technology, Hiroshima

** Faculty of Science and Engineering, Ritsumeikan University, Kyoto

(Received September 29, 1979)

(Revised January 18, 1980)

近年発展してきた「信号を汎用 A. D. C. でデジタル量に変換し、デジタルコンピュータで目的に従って処理する」というかたちの信号処理システムでは、多様な処理能力のうち統計的な測定をする能力が他の能力に比べて D. N. L. のために劣っている。しかしここに提案する手法は、汎用 A. D. C. で確率ジャンプまでも測定できる手法であるから、今後確率システム理論の応用などにおいても従来のようにノイズを単純にガウス分布に従うと仮定してしまう時代から、確率ジャンプを含むような複雑な分布ノイズを扱う時代が来ても実測を可能にする有用性がある。Gatti による Sliding Scale Method は逐次比較方式 A. D. C. を用いて、A-D 変換を 1 回行うごとにスケールをスライドして微分非直線性による誤差を互いに打ち消し合う形で軽減する手法として知られている⁴⁾。しかしこの手法は、1 回の A-D 変換結果には完全に D. N. L. 誤差がそのまま含まれているので、メモリー内の積算量の少ない場合に D. N. L. 誤差軽減効果が小さいということになる。これに対し本提案方式は A-D 変換 1 回ごとに誤差の処理を行うので、この点において Gatti の方法を改善した方式であるといえる。元来、A. D. C. の微分非直線性はいわゆる個々の A-D 変換素子あるいは装置がもつくせのようなもので、これによって発生する誤差は系統的誤差であるから誤差の原因が明確であって、綿密な調整によって取り除かれるべきものである。しかし、これは技術的にきわめて困難なことで現在ではほぼその限界にある。それゆえここでは D. N. L. 誤差をあえて偶然誤差とみなし、被変換振幅を一定時間ストレッチした信号にランプ状の補助信号を重ねてこれを複数点サンプルの後平均化する。これによって真の振幅を推定する手法をとる。最後に本提案方式の効果を示す実験結果および、従来の方式による結果との比較、さらに確率ジャンプ検出効果を示した^{1), 2)}。

2. D. N. L. 誤差軽減の原理

前報において提案した手法は、被処理振幅に比例した波高値をもつパルス

$$\begin{aligned}
 e(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s\alpha}{(s+\alpha)(s+\beta)(s+\gamma)} \right\} \\
 &= \frac{-\alpha^2}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} \exp[-\alpha t] \\
 &\quad + \frac{-\alpha\beta}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)} \exp[-\beta t] \\
 &\quad + \frac{-\alpha\gamma}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)} \exp[-\gamma t] \quad (1)
 \end{aligned}$$

Fig. 1 Principle and time chart of proposed A-D conversion method

ただし、 α, β, γ は定数で $\alpha > \beta$ である。

を作り、これを汎用 A. D. C. で多点サンプルしたデータ

$$\phi_K = \phi_K^T + w_K, \quad (K=1, 2, \dots, M) \quad (2)$$

ただし、 ϕ_K^T は真の振幅、 w_K は D. N. L. 誤差および量子化誤差である。

からつぎの方法でアドレスを計算し、その結果を使って振幅確率密度関数測定における D. N. L. 誤差を軽減した¹⁾。

add. (address)

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{M} \sum_{K=1}^M \frac{\phi_K}{\phi_K^*} = \frac{1}{M} \sum_{K=1}^M \frac{\phi_K^T + w_K}{\phi_K^*} \\
 &= \frac{1}{M} \sum_{K=1}^M \frac{\phi_K^T}{\phi_K^*} + \frac{1}{M} \sum_{K=1}^M \frac{w_K}{\phi_K^*} \quad (3)
 \end{aligned}$$

ここにおいて ϕ_K^* は標準波形でつぎのように作成する。

$$\phi_K^* = \frac{\phi_{K,1}}{N} + \frac{\phi_{K,2}}{N} + \dots + \frac{\phi_{K,N}}{N}, \quad (K=1, 2, \dots, M) \quad (4)$$

ただし、 N は平均化回数である。

この手法は、被測定振幅が小さい領域において D. N. L. 誤差軽減能力が小さいという欠点をもつ。今回提案する手法は、(i) D. N. L. 誤差軽減効果が、被処理振幅の大きさに依存しないようにすること、(ii) 処理時間を短縮すること、を目的とする。Fig. 1 にその原理を示した。まず被処理振幅（連続信号の場合はサンプル値、ランダムパルスの場合はパルスピーク、図ではランダムパルスの場合をその例として描いてある）を一定電圧 V_H にストレッチする。この信号と常

Fig. 3 Relation between standard deviation of D.N.L. error and sample points M

となるので、 $(\sigma/\bar{N}) \times 100$ と M の関係を σ をパラメータにとってグラフにすると、Fig. 3 に示す右下がりの直線群を得る。たとえば、 $(\sigma/\bar{N}) \times 100$ が Fig. 3 の A 点にあるような汎用 A.D.C. を使って、 $(\sigma/\bar{N}) \times 100$ を 1.0 にするには A 点を通り右下がりの直線に平行な直線を引き、これと $(\sigma/\bar{N}) \times 100 = 1.0$ の直線との交点を B とする。

B 点の横軸の値、すなわち C 点の M を読むと 32 である。つまり 32 点のサンプル値を必要とすることがわかる。Fig. 3 はまた、A および C 点を決めて、そのときの本方式の効果すなわち B 点の縦軸の値を迅速に読みとることもできる。

補助ランプ波形の勾配角 θ の選び方に注意が必要である。結論を先に示すと、(5) 式において $\varepsilon_K^{D.N.L.} = 0$ と仮定した場合、 $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_M$ のうちの二つをとっても同じ値であってはならないという事が必要である。すなわち Fig. 4 において ΔV を電圧最小分解幅 (この場合 $\varepsilon_K^{D.N.L.} = 0$ と仮定しているので ΔV は均一)、 ΔT をサンプリングクロックパルスの周期とするとこの条件は

$$\theta \geq \tan^{-1} \frac{\Delta V}{\Delta T} \quad (15)$$

と表わせる。Fig. 4 におけるランプ信号 L_s, L_o が (15) 式を満足する角度 θ_s, θ_o をもっている。ランプ信号 L_g は (15) 式を満たさない角 θ_g をもつ場合を示している。 L_o を境界として、これより勾配のゆるやかなランプ信号を使用した場合は必ず $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_M$ の中に二つ以上の同じものができる。例として Fig. 4 中の L_g において $\overline{OA}, \overline{AB}, \overline{BC}$ 上のサンプル点はそれぞれ

Fig. 4 Relation between angle θ of ramp signal and sample points M

の区間内で同じサンプル値 $\phi_1^L, \phi_2^L, \phi_3^L$ をもつ。 $\overline{OA}, \overline{AB}, \overline{BC}$ 上のサンプル点の個数はほぼ同数になるが、 $\overline{CD}$ 上の個数だけがこれらと異なる数になる。一般にづぎのことが成り立つ。

【命題 1】 $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_M$ のうち少なくとも二つが同じ値で、異なる値のものは互いに独立である場合における $(\phi_1 + \phi_2 + \dots + \phi_M)/M$ の標準偏差は、 $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_M$ がそれぞれ互いに独立である場合のそれより大きい。証明は付録に示した。

3. 実験と考察

3.1 一様ランダム信号への適用と E_D の測定

本提案方式の D.N.L. 誤差軽減効果を示すために、一様分布振幅確率密度関数をもつランダム信号を、三角波を一定クロックでサンプルしてつくり、 M をパラメータにとって振幅確率密度関数を C.R.T. 上に出力した結果を Fig. 5 に示す。(1) $M=1$ の場合が従来の測定手法に従い汎用 A.D.C. を用いて測定した結果であり、大きくばらついてしまっている。(2) $M=2$ から (8) $M=128$ までは本提案方式による場合の結果である。 M を増加するに従い、単調着実にばらつきが減少して D.N.L. 誤差軽減効果が表われていることがわかる。この効果を定量的に考察するために、それぞれの M の値について (10) あるいは (11) 式に示した (定義 3) に従い E_D を計算した結果 Table 1 に示す結果を得た。これを Fig. 3 と同じ形式に従ってプロットした結果を Fig. 6 に示す。これより、 M の増加に従い、図上右下がりの直線に平行に E_D が減少していることから、定量的にも (14) 式に従う良好な効果が現われていることがわかる。 $M=1$ から $M=8$, および $M=8$ から $M=128$ へと二つの山のかたちに周期的なうねりを程しているのは、実験に使用した汎用 A.D.C. が 2^8 分割の並列比較方式 A.D.C. を中

Fig. 5 Measurement results of Probability Density Function about uniformly distributed random signal

Table 1 Measurements results of standard deviation of uniformly distributed random signal

M	$E_D = \frac{\sigma}{N} \times 100 (\%)$
1	14.8
2	14.7
4	11.5
8	5.9
16	4.8
32	4.8
64	3.6
128	2.5

心に逐次比較方式 A. D. C. を構成した混合形のものを使用しているため、D. N. L. 誤差が 2^3 チャンセルごとに大きな相関をもっていることによると考えられる。

3.2 確率ジャンプを有するランダム信号への適用

演算増幅器の内部雑音を増幅して得たランダム信号

Fig. 6 Measurement results of standard deviation of uniformly distributed random signal in the case of $M=1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128$

Fig. 7 Comparison of old method (a) with proposed method (b) about Gaussian random signal which includes probability jump

は、正規分布に近い振幅確率密度関数をもっている。これをリニアゲートに入力し、ゲートを一定の時間的割合でランダムに開閉する。ただしゲートを閉じている間は必ずしも零とは限らない一定直流電圧にする。

つまり部分的に直流部分を作ることにより、この電圧に相当する振幅の確率密度をふやしてやる。これは振幅確率密度関数に細いひげ状の部分を作り出すことになる。この方法で確率ジャンプを含むランダム信号を得た。

Fig. 7(a)は $M=1$ の場合、すなわち汎用 A. D. C. をそのまま使用したもので、D. N. L. のために曲線のまわりに点がばらついて、確率ジャンプによる細いひげ状確率密度関数の部分を完全に隠してしまっている。Fig. 7(b)は $M=128$ で測定した結果で、図の矢印のところに確率ジャンプが検出測定されている。このように D. N. L. は確率ジャンプ検出を不可能にする最大の原因であり、本提案方式はこれを可能にする能力がある。

3.3 γ -線パルス波高分析への応用

実的な測定対象の一例としてシンチレーションディテクタによる γ -線検出パルスの波高分析への応用を試みた。Fig. 8 にその結果を示す。測定手法は前

Fig. 8 Comparison of old method (a) with proposed method (b) detected r -ray random pulses

記 3.2 節の確率ジャンプを有するランダム信号への適用の場合とまったく同じである。Fig. 8(a) は汎用 A. D. C. の D. N. L. 誤差が大きく現われて確率密度関数をくずしてしまっている。Fig. 8(b) は、Fig. 5 における (8) の程度すなわち D. N. L. 誤差が $(\sigma/\bar{N}) \times 100 = 2.5$ (%) 程度におさえられて、汎用 A. D. C. が放射線計測の分野でも実用的に働かせることが可能であることを示している。

4. 結 言

コンピュータに A-D 変換器を備えて信号を処理するスタイルの計測系は、今後もますます進歩する可能性は十分ある。そこに使用される逐次比較方式や並列比較方式 A. D. C. すなわち汎用 A. D. C. は波形記憶やサンプルデータアキュジションに使われるだけなら十分な精度や速度を有しているが、データの統計をとるかたちの計測を行った場合、特に振幅確率密度関数の測定に用いた場合、D. N. L. 誤差が大きく現われることになり、測定が不可能になる。そこで、汎用 A. D. C. を用いて、補助ランプ信号により A. D. C. の複数個の動作点を使う方法で、D. N. L. 誤差を軽減する手法を提案し実験した結果つぎの事柄が明らかになった。

- (1) (14) 式に従って M を多くすればするほど D. N. L. 誤差軽減効果は大きい。
- (2) Fig. 7 に示したように、確率ジャンプの検出測定が可能になった。
- (3) 被処理振幅 1 点に対する処理時間は (7) 式で与えられ、これは確率密度関数測定装置を構成するうえにおいても十分な速度が実現可能であり、Wilkinson 方式に比べて速度は最高 50 倍近く速める事が可能である。

本方式を用いて振幅確率密度関数を測定する場合の留意点はつぎのとおりである。

- (i) 汎用 A. D. C. はできる限り D. N. L. の小さいものを選ぶこと。ただし、逐次比較方式、並列比較方式では $E_D = 20$ (%) (定義 3 による)

以下のものはほとんどない。

- (ii) ランプ波の勾配は (15) 式を満たすこと。
- (iii) 振幅確率密度関数の測定結果に関して、横軸を n 点とるようにするには、Fig. 1 を参照して、A. D. C. の分解能は $2n$ 分割必要である。

本提案方式に残された問題点はつぎのとおりである。すなわち、D. N. L. 誤差に相関が強ければ強いほど D. N. L. 誤差軽減効果は (14) 式のグラフからずれてくる。特に逐次比較方式 A. D. C. は 2 のべき乗チャンネル間に強い相関をもつので、この点に注意しなければならない。D. N. L. 誤差の相関関数と本方式による D. N. L. 誤差軽減効果の関係については別の機会に明らかにしたい。

参 考 文 献

- 1) 山田 光, 菊屋公明: 逐次比較方式 A. D. C. による微分非直線性を軽減したパルス波高分析手法, 計測自動制御学会論文集, 15-2, 241/245 (1979)
- 2) 山田 光, 菊屋公明: 逐次及び並列比較方式 A. D. C. によるパルス波高値ヒストグラムの測定, 第 16 回理工学における同位元素研究発表会要旨集, 26a-II-8, p. 46 (1979)
- 3) 河田龍夫, 国沢清典: 現代統計学, 上巻 54/69, 廣川書店 (1971)
- 4) (たとえば) E. コワルスキー: 原子核エレクトロニクス, 182/193, 朝倉書店 (1971)
- 5) 高岡宣善: 応用不規則関数論, 4/8, 共立出版 (1975)

《付 録》

(命題 1 の証明)

ϕ_K ($K=1, 2, \dots, M$) は相異なる K について互いに独立であると仮定する。いま

$$X = \frac{1}{M}(\phi_1 + \phi_2 + \dots + \alpha\phi_s + \dots + \phi_{M-\alpha+1}) \quad (\text{A. 1})$$

ただし、 α は $1 \leq \alpha \leq M$ なる整数とする。
なる確率変数 X を考える。つまり $\alpha=1$ の場合は $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_M$ がそれぞれ互いに独立で、 $\alpha=2, 3, \dots, M$ の場合は $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_M$ の中に等しいものが α 個存在することを意味している。 X の標準偏差を考える。

$$\begin{aligned} \text{dev.}[X] &= \{\text{var.}[X]\}^{1/2} \\ &= \left\{ \text{var.} \left[\frac{1}{M}(\phi_1 + \phi_2 + \dots + \alpha\phi_s + \dots + \phi_{M-\alpha+1}) \right] \right\}^{1/2} \quad (\text{A. 2}) \end{aligned}$$

ただし、 $\text{var.}[\cdot]$ は分散を表わす。
(A. 2) 式は、 ϕ_K ($K=1, 2, \dots, M$) が互いに独立であることから分散の性質を用いてつぎのようにかける。

$$\begin{aligned}
 \text{dev. } [X] &= \left\{ \text{var. } \left[\frac{1}{M} \alpha \phi_s \right] \right. \\
 &\quad \left. + \text{var. } \left[\frac{1}{M} \sum_{\substack{i=1 \\ (i \neq s)}}^{M-\alpha+1} \phi_i \right] \right\}^{1/2} \\
 &= \left\{ \left(\frac{\alpha}{M} \right)^2 \cdot \text{var. } [\phi_s] + \left(\frac{M-\alpha}{M} \right)^2 \right. \\
 &\quad \left. \cdot \text{var. } \left[\frac{1}{M-\alpha} \sum_{\substack{i=1 \\ (i \neq s)}}^{M-\alpha+1} \phi_i \right] \right\}^{1/2} \quad (\text{A. 3})
 \end{aligned}$$

$\phi_K (K=1, 2, \dots, M)$ の標準偏差はどの K についても一定 σ であるとする、

$$\text{var. } [\phi_i] = \sigma^2, \quad (i=1, 2, \dots, M) \quad (\text{A. 4})$$

である。さらに統計学上の中心極限定理より、

$$\text{var. } \left[\frac{1}{M-\alpha} \sum_{\substack{i=1 \\ (i \neq s)}}^{M-\alpha+1} \phi_i \right] = \left(\frac{\sigma}{\sqrt{M-\alpha}} \right)^2 \quad (\text{A. 5})$$

となる。(A. 4), (A. 5) 式を (A. 3) 式に代入して整理すると、

$$\begin{aligned}
 \text{dev. } [X] &= \left\{ \left(\frac{\alpha}{M} \right)^2 \sigma^2 + \left(\frac{M-\alpha}{M} \right)^2 \cdot \left(\frac{\sigma}{\sqrt{M-\alpha}} \right)^2 \right\}^{1/2} \\
 &= \frac{\sigma}{\sqrt{M}} \cdot \left\{ \frac{M+\alpha^2-\alpha}{M} \right\}^{1/2} \quad (\text{A. 6})
 \end{aligned}$$

となる。これより

$$\text{dev. } [X]_{\alpha=1} = \frac{\sigma}{\sqrt{M}} < \text{dev. } [X]_{\alpha=2, 3, \dots, M} \quad (\text{A. 7})$$

が成り立つことが明らかである。

(証明終)